

---

# Chiral Symmetry in Hadron Physics

## Methods and ideas of chiral symmetry

ハドロン物理におけるカイラル対称性 - - 基本的な考え方と方法

---

原子核三者若手夏の学校 2002  
保坂 淳 (阪大、RCNP)

### 目次

- 1 はじめに
- 2 パイオンと核子の相互作用
  - 2.1 パイオンの基本的な性質
  - 2.2 パイオン核子散乱
  - 3.3 例題
- 3 カイラル対称性
  - 3.1  $\gamma_5$ 変換
  - 3.2 右巻・左巻フェルミオン
  - 3.3 右・左変換
  - 3.4 カレントと交換関係
  - 3.5 自発的対称性の破れ
  - 3.6 PCAC と低エネルギー定理
- 4 線形 模型
  - 4.1 場
  - 4.2 ラグランジアンと真空の構造
  - 4.3 フェルミオン場
  - 4.4 N散乱の相殺機構
- 5 非線形 模型
  - 5.1 座標変換
  - 5.2 フェルミオン場
  - 5.3 変換則
  - 5.4 群論的な考察、Callan-Coleman-Wess-Zumino (CCWZ) の方法
  - 5.5 SU(3)
- 6 スキルミオン
  - 6.1 トポロジカルな考察
  - 6.2 ラグランジアン
  - 6.3 バリオン数 1 の hedgehog ( はりねずみ ) 解
  - 6.4 物理的状态
- 7 おわりに

# 1 はじめに

講義の依頼があったから、実際に講義を実施しこの講義録をまとめるまでには、それなりの時間があったはずである。しかし、実際には原稿の最終提出が大幅に遅れ、編集に携わった東工大の学生の皆さんには大変御迷惑をかけてしまった。以下の内容は、講義で用いた OHP をもとに、そこに文章を書き足していくというスタイルをとった。必要に応じて、式を足したりはしたが、基本的にはかなりの部分が講義で説明された内容になっているはずである。

近年、カイラル対称性を指針にしてハドロンダイナミックスの諸性質を研究しようとすることに大変関心が持たれている。この分野はすでに、理論と実験の緊密な関係のもとに多くの発展が成し遂げられ、また今後も発展していく可能性が期待されている。特に日本人の多くの研究者が、重要な発展に貢献してきたことは見逃せない。

もともと強い相互作用の基礎理論である QCD が発見される以前から、物理状態を結びつけるカレント間の対称性として、カイラル対称性の考え方が発展してきた。いわゆるカレント代数の方法は、S 行列の分散関係式を基礎にした和則 (sum rule) に用いられ、主にパイオン ( ) の関係した現象をうまく説明してきた [8]。現在の世界では、カイラル対称性は自発的に破れ、結果として、その一部であるフレーバー対称性のみがあらわに残っていること、パイオンの質量が非常に軽くなる (理想的なカイラル極限では質量がゼロになる) ことが、南部 - Goldstone らによって明らかにされ、基本的な部分は理解されてきた [9]。

その後 QCD によって、カイラル対称性はクォークの大局的なフレーバー空間の対称性として基礎付けられた。最近の格子ゲージ理論の計算では、現在の破れた相は、温度や密度を上げることで対称性の回復した相に向かうことが示されるようになった [10]。最近の興味の一つは、カイラル対称性が回復に向かう際に、ハドロンの性質がどのように変化していくかということに向けられている。逆にハドロンの性質の変化を手がかりに、カイラル対称性のダイナミックスに関する情報を引きだそうとする。大局的には、QCD の相構造全体を解明し、本質的に多体問題として QCD 物性の特性を明らかにしていこうというものである

一方、ハドロンの有効理論としては、クォーク模型が非常に成功してきていることもよく知られている。クォーク模型の提案も、QCD の発見以前である。スピンとフレーバーの対称性を合わせた SU(6) クォーク模型では、メソンとバリオンの質量差、磁気能率、遷移確率の多くを説明しているように見える [11]。ここでは、あからさまなカイラル対称性は仮定されない。基底状態近傍のハドロンの現象では、カイラル対称性が支配的であることを強く示唆している一方で、励起状態も含めたハドロンではクォーク模型が機能しているようである。本来ならばここでも、QCD のカイラル対称性は何らかの形で反映されているはずであろうが、はっきり理解されていない。

カイラル対称性は大局的な対称性のため、局所的 (力学的) なゲージ対称性と異なり、その対称性が (代数的に) あらわに現れる [12]。すなわち、ハドロン質量の縮退を説明

し、同じ数の粒子が含まれる S 行列要素の間を関係づける。この点では理解しやすい対称性である。しかし、現実には対称性の一部（軸性部分）は自発的に破れ、力学的な対称性になってしまう。その結果、代数的な関係は残ったフレーバー対称性のみに限定され、破れた軸性部分については、ゲージ粒子のように振る舞うパイオンが出現する。パイオンと他のハドロンの相互作用の仕方は対称性によって規定され、低エネルギー定理が導出される。このような対称性の自発的な破れの機構の詳細を理解することが重要な問題になる。

対称性があからさまに存在する場合には、粒子群は対称性の既約表現によって分類される。ところが、破れた世界ではそうはならない。量子力学の例をあげると、回転対称性がよければ状態は角運動量  $J, M$  によって分類されるが、そうでなければ状態は他の量子数によって分類される：例えば  $|\alpha\rangle$ 。しかし、この状態は完全系  $|J, M\rangle$  によって展開される：

$$|\alpha\rangle = \sum_{JM} c_{JM} |J, M\rangle$$

この展開係数  $c_{JM}$  がわかれば、対称性の破れの情報が得られるはずである。同様に、現在観測されるハドロンの、カイラル表現のどのような重ね合わせ（または混合）状態にあるかを解明できれば、そこから逆に対称性の破れについて探ることができる。

本講義ではこれらの研究の際に基礎となる考え方を紹介する。カイラル対称性はクォークの、2つの独立なカイラリティー（質量ゼロの場合にはヘリシティーと同じ）状態に対して定義された（内部）フレーバー対称性である。カイラリティーは、ローレンツ群  $O(4) \sim SL(2, C)$  に対して定義される独立な2つ基本クォークを区別する。このそれぞれに作用する内部対称性という点で、カイラル対称性はカイラリティーに関係するが（これがこの名前のゆえんである）、その対称変換自体は、カイラリティーとは別物である。しばしば、このカイラリティーと内部フレーバー空間のカイラル対称変換を混同しやすい。また、自発的対称性の破れの物理が理解しにくい。これらの理由で、カイラル対称性の考え方を正確に理解するには多少努力を要する。しかし、ハドロン物理を研究の対象とする際には必須の概念と道具立てを与えているため、その基本的な側面は理解しておきたいものである。

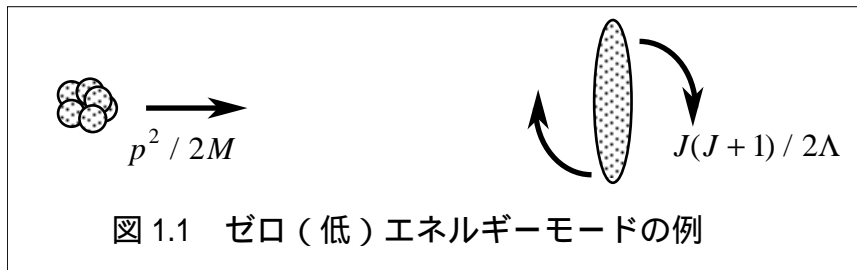
この講義録の内容は以下の通りである。まず2章でパイオンと基本的な性質を核子との相互作用を中心に解説していく。3章ではカイラル対称性の一般的な性質と、カレント代数による低エネルギー定理をいくつか紹介する。4章で線形モデル、5章で非線形モデルを紹介する。これらのモデルの構成の仕方を理解してもらえれば、この講義の目的のおおかたは達成されたものと考えている。6章では、少し前の話題であるが、クォーク模型とともに重要な考え方を提供してくれる、スキルム模型について解説する。

この講義のもとになった関連する文献のうち教科書的なものを [1-7] にあげたので、いずれかを参照していただくとよい。

## 2 パイオンと核子の相互作用

カイラル対称性が自発的に破れると、破れた対称性を回復するようなモードが出現する。このモードは対称変換（すなわち、同一エネルギーの異なった状態を結ぶような変換）に相当するため、エネルギーを要しない、すなわち、質量を伴わない励起になっている。これが、質量ゼロの南部 - ゴールドストーン粒子とよばれ、パイオンとみなすことができる。

もともとあった対称性が自発的に破れ、しかし再度その破れた対称性を回復するようにゼロモード、もしくは比較的低エネルギーのモード（これらは集団運動である）が出現する例は多々みられる。量子力学の例をあげると、例えば、原子や分子がある場所に存在するとしよう。そのことによって系の並進対称性は破れてしまう。しかし、重心の波動関数は  $e^{ipR}$  と書け、並進対称性を回復する（図 1.1 左）。その時のエネルギー  $p^2 / 2M$  はゼロ（ $p = 0$  に対応）から始まる（ゼロエネルギーモード）。ここで  $M$  は並進運動の慣性質量である。もう一つの例は、原子核や原子・分子などで非球形の内部状態が形成される場合である。この場合系のエネルギーは、角運動量と回転の慣性能率を使って、 $J(J+1) / 2\Lambda$  と表される（図 1.1 右）。これらはいずれも、運動の際に形を変えることなくそのもの全体が一斉に動きだすことから、集団運動の励起といえる。ごくナイーブには、全体を一斉に動かすには多くのエネルギーを必要とするように感じられるかもしれないが、実際には、内部の形を変えるような励起の方がエネルギーをはるかに必要とする。集団運動は低エネルギーモードなのである。この2例は量子力学の例であるが、パイオンは場の理論で出現するゼロエネルギー（質量）モードである。



パイオンは物質場である核子と相互作用するが、質量がゼロであるために伝達距離が無限大（現実には  $\sim 1/m_\pi$  程度）になり、長距離力成分を担う重要な役割を果たす。さらに、相互作用の仕方自体カイラル対称性によって規定される。

歴史的に見ても、湯川の予言以来パイオンは素粒子・原子核物理で多くの場合中心的な役割を果たしてきた。本節では、パイオンの性質について現象論的に知られていることから、重要かつ基本的な事項を中心に紹介していく。

## 2.1 パイオンの基本的な性質

パイオンはもっとも軽いハドロンである。その基本的な性質は以下のようにまとめられる：

$$\begin{aligned}
 \text{質量：} & m_\pi \sim 138 \text{ MeV} \\
 \text{スピン}^{\text{パリティ}}、\text{アイソスピン：} & J^P, I = 0^-, 1 \\
 \text{アイソスピン成分：} & (\pi^1, \pi^2, \pi^3) \leftrightarrow (\pi^+, \pi^0, \pi^-) \\
 & \pi^\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \pm i\pi^2), \quad \pi^0 = \pi^3
 \end{aligned}$$

パイオンはアイソスピン 1 (アイソベクトル) の擬スカラー粒子である。アイソスピンの 3 つ成分はデカルト表示もしくは極座標表示で表せ、極座標表示の成分 $(\pi^\pm, \pi^0)$ は、荷電状態に対応している。

パイオンは (擬) スカラー粒子のため、自由空間ではクライン - ゴルドン方程式を満足する：

$$(\partial^2 + m_\pi^2)\pi^a(x) = 0 \xrightarrow{F.T.} (-q^2 + m_\pi^2)\pi^a(q) = 0 \quad (2.2)$$

相互作用がある場合には、それらをまとめてソース項 (パイオンを作り出す源)  $J^a(\pi, \rho, N, \Delta, \text{etc})$  で表し、

$$(\partial^2 + m_\pi^2)\pi^a = J^a(\pi, \rho, N, \Delta, \text{etc}) \quad (2.3)$$

が方程式になる。パイオンは強い相互作用をする粒子に結合することができるが、ここでは典型的かつ重要なもの ( $\pi, \rho, N, \Delta$ ) をソース項の引数に示してある。

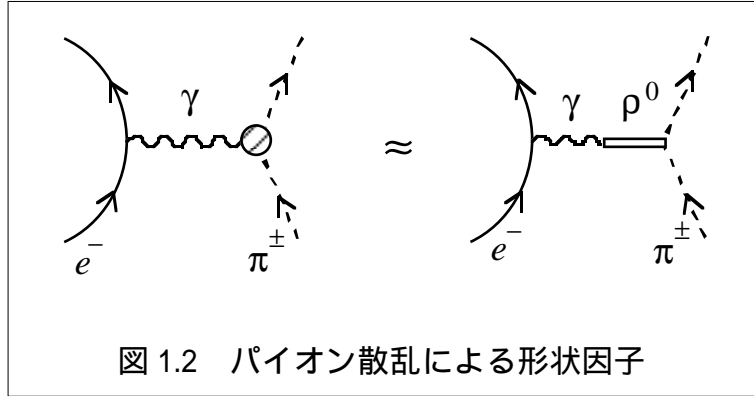
次にパイオンが南部 - ゴールドストーン粒子であることによる特殊な性質を見てみることにする。まず、クォーク・反クォークによる構成は

$$\pi^+ \sim u\bar{d}, \quad \pi^0 \sim u\bar{u} + d\bar{d}, \quad \pi^- \sim d\bar{u} \quad (2.4)$$

である ( $\bar{q}q$ )。構成クォーク模型では u, d 構成クォークの質量は核子の約 1/3、すなわち、300 MeV 程度であるので、ナイーブにはメソンの質量はその約 2 倍、すなわち 600 MeV 程度であると予想される。しかしながら、現実のパイオンの質量はこれよりはるかに軽い 138 MeV である。このことが、まさに、パイオンがカイラル対称性の自発的な破れに伴う南部 - ゴールドストーン粒子であることを強く支持している理由である。この場合、波動関数は簡単な 1 粒子状態ではなく、多 (粒子 - 空孔) 状態の重ね合わせで表現される集団励起である：

$$|\pi\rangle = q\bar{q} + q\bar{q} \cdot q\bar{q} + q\bar{q} \cdot q\bar{q} \cdot q\bar{q} + \dots \quad (2.5)$$

次に特徴的な点は電形状因子に見られる。パイオンを原子に衝突させ、原子中の電子との散乱によってパイオンの電形状因子  $F_\pi(|\vec{q}|^2)$  を測定することができる (図 1.2) :



ハドロンの電磁氣的性質をよく説明する vector meson dominance によれば、光子は一旦  $\rho$  メソンに結合し、次いでパイオンに結合する (図 1.2 右)。このプロセスによると、パイオン固有の大きさを無視しても、パイオンは  $\rho$  メソンのコンプトン波長程度の大きさを持つことになる :

$$\langle r^2 \rangle_\pi = 6 \frac{\partial F_\pi}{\partial q^2} (|\vec{q}|^2 = 0) = \frac{6}{m_\rho^2} \quad (2.6)$$

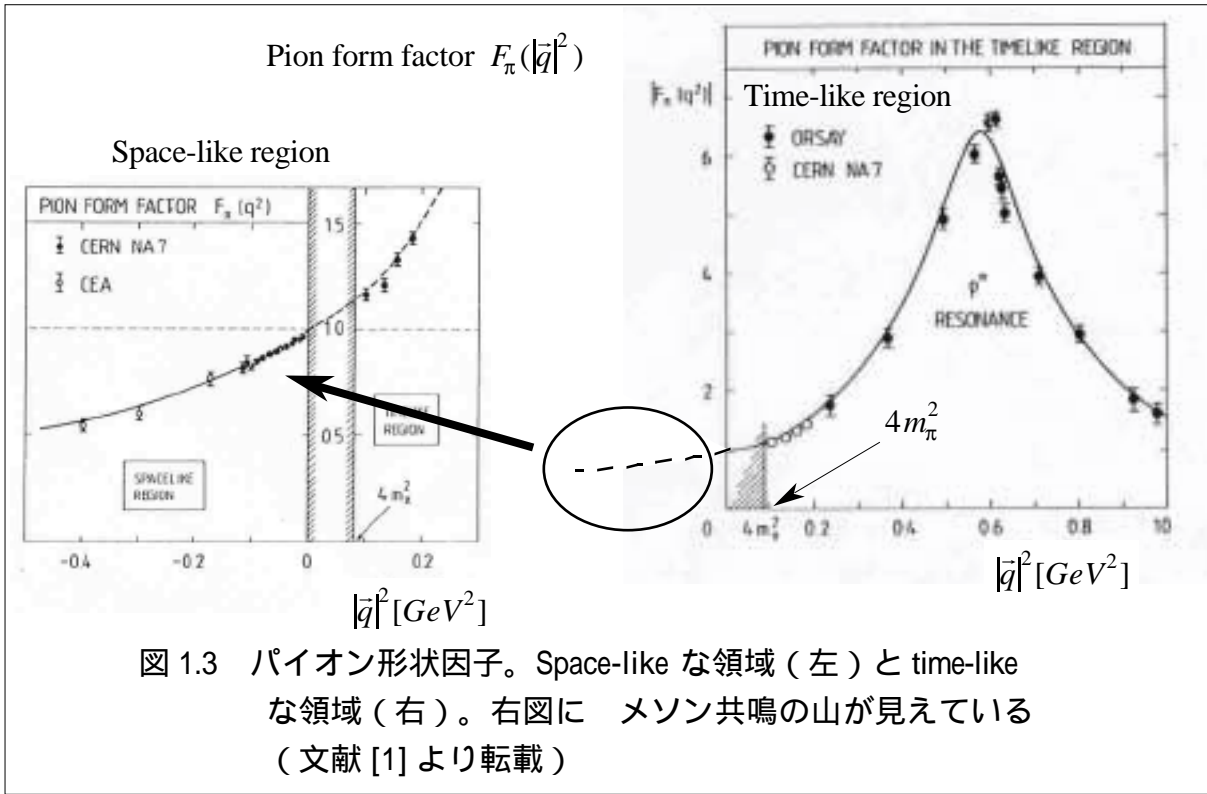
実験的に知られている  $\rho$  メソンの質量  $m_\rho = 770 \text{ MeV}$  を代入すると、

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_\pi} = 0.63 \text{ fm} \quad (2.7)$$

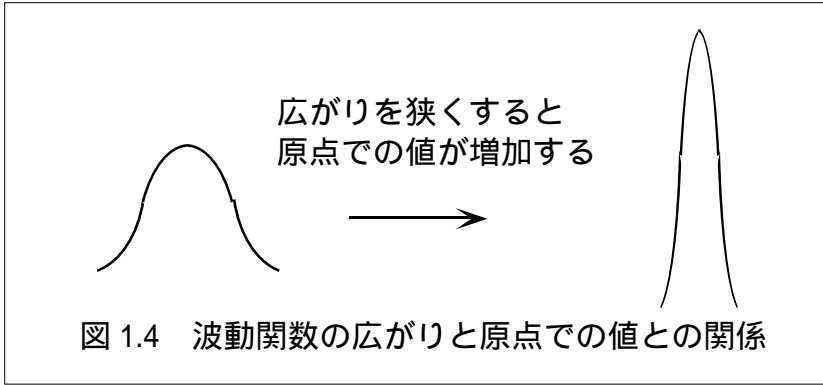
を得る。実験的には、2 のスペクトル関数がよく測定されていて (図 1.3)、そこから得られる実験値

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle_\pi (\text{exp})} = 0.65 \text{ fm} \quad (2.8)$$

と非常によく一致している。このことは、パイオンの固有の大きさがほとんどないことを強く示唆している。



パイオンの大きさがほとんどないことは、単純な1粒子状態では説明が困難である。というのは、クォーク・反クォーク束縛系の広がりを小さくしようと思うと、波動関数は原点に集中し、原点で大きな値をとることになるからである(図1.4)。



ところが、原点での値が大きくなりすぎると、崩壊定数  $f_\pi = 93 \text{ MeV}$  を説明することができない (Van Royan-Weisskopf paradox [13])。この事実は、パイオンが1粒子状態では説明困難な集団励起状態であることを示すものである。

## 2.3 パイオン核子散乱

この節では、パイオンと核子の、低エネルギーにおける散乱について復習する。散乱長などのパラメータの実験値を与え、後にカイラル対称性が重要な役割を果たしていることを議論する際の準備とする。

まず、パイオンと核子の散乱の運動学的なパラメータを以下のように決める：

$q_\mu, q'_\mu = (\omega, q_i), (\omega', q'_i) :$	始・終状態のパイオンのエネルギー・運動量
$a, b :$	始・終状態のパイオンのアイソスピン
$p_\mu, p'_\mu = (E, p_i), (E', p'_i) :$	始・終状態の核子のエネルギー・運動量
$\alpha, \beta :$	始・終状態の核子のアイソスピンその他の量子数

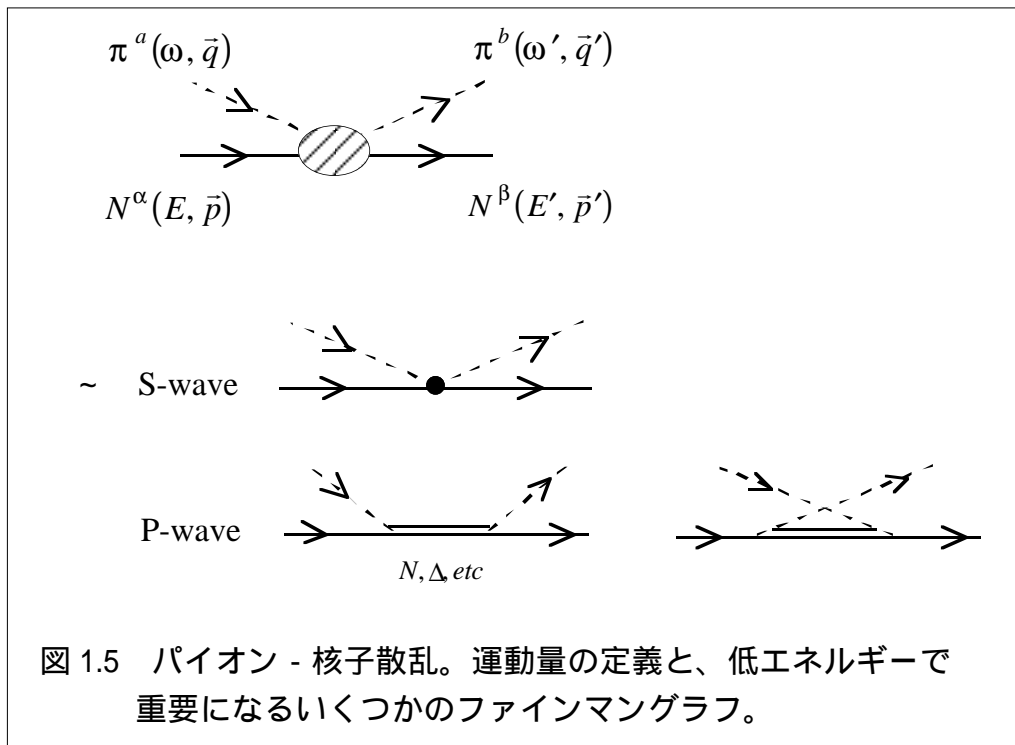


図 1.5 パイオン - 核子散乱。運動量の定義と、低エネルギーで重要になるいくつかのファインマングラフ。

散乱振幅は低エネルギー領域では、図 1.5 中段に示した S 波に寄与するいわゆるコンタクト項 (=contact term, seagull term などとも呼ばれる)、下段に示した主に P 波に寄与するボルン項等が主要な役割を果たす。ボルン項では中間状態として、核子や  $\Delta$  共鳴などの共鳴状態を経由していくが、これらについては後に具体的に考察する。

散乱現象の解析には、S 行列、T 行列 (K 行列)、位相差、散乱長などがしばしば現れるが、それらの間の関係をまとめる：



$$S = \exp(2i\delta) = 1 + iT = \frac{1 + i|q|K}{1 - i|q|K}$$

$$K = \frac{1}{|q|} \tan \delta \quad (2.9)$$

$$a = \lim_{q \rightarrow 0} |q|^{-(2l+1)} \tan \delta = \lim_{q \rightarrow 0} |q|^{-2l} K$$

3つ目の式で  $l=0$  の場合パラメータ  $a$  は長さの次元をもち、散乱長 (scattering length) と呼ばれる ( $l=1$  のときには散乱体積 = scattering volume)。

N 散乱の場合、散乱振幅は核子のスピノル空間に作用する行列で表される。この行列は、スピン空間とアイソスピン空間で定義される行列の直積であることに注意したい。まず、スピン部分に着目すると、低エネルギーでは相対論的な  $4 \times 4$  の行列を非相対論的な  $2 \times 2$  の行列にあらわすと便利である：

$$\bar{u}Tu = \frac{4\pi\sqrt{s}}{M} \chi^\dagger f \chi \quad (2.10)$$

ここで、 $u$  は Dirac スピノル、 $\chi$  は Pauli スピノル、 $s = (p+q)^2$ 、 $M$  は核子の質量である。振幅  $f$  はスピン空間で  $2 \times 2$  の行列である。まず、アイソスピンを無視して、スピン空間で不変な振幅を書くことを考える。それは、始・終状態の運動量およびスピン変数の真性スカラー関数である。そこで、使える変数は、 $q_i$ 、 $q'_i$ 、および  $\sigma_i$  の3つである。これらから、スカラー量を構成しようとする、 $\vec{q} \cdot \vec{\sigma}$ 、 $\vec{q}' \cdot \vec{\sigma}$ 、 $\vec{q} \cdot \vec{q}'$ 、 $\vec{q} \times \vec{q}' \cdot \vec{\sigma}$  の4つの組み合わせが可能である。ところが、初めの二つは擬スカラーなので、ここで、それらを用いることはできない。従って  $f$  は次のように3つの項で表されることになる：

$$f = B + C \vec{q}' \cdot \vec{q} + iD \vec{\sigma} \cdot \vec{q}' \times \vec{q} \quad (2.11)$$

ここで、係数  $B, C, D$  は  $q^2$ 、 $q'^2$  の関数である。

次に、アイソスピンの自由度を考える。核子はアイソスピンスピン 1/2、パイオンはアイソスピン 1 なので、それぞれのアイソスピンを表す行列として、

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

を導入する。これらの行列を使ったアイソスカラーの量を考えると ( $1$  と  $\vec{t} \cdot \vec{\tau}$ )、結局係数  $B, C, D$  それぞれが2つの項で表され、最終的に

$$f = b_0 + b_1 \vec{t} \cdot \vec{\tau} + (c_0 + c_1 \vec{t} \cdot \vec{\tau}) \vec{q}' \cdot \vec{q} + i(d_0 + d_1 \vec{t} \cdot \vec{\tau}) \vec{\sigma} \cdot \vec{q}' \times \vec{q} \quad (2.13)$$

を得る。一般に、N 散乱は6つのスカラー関数  $b_{0,1}$ ,  $c_{0,1}$ ,  $d_{0,1}$  で表されることがわかった。低エネルギーでは、これらは単に定数になる。これらの物理的な意味（スピンフリップ、アイソスピンスリップなど）を以下の表にまとめる：

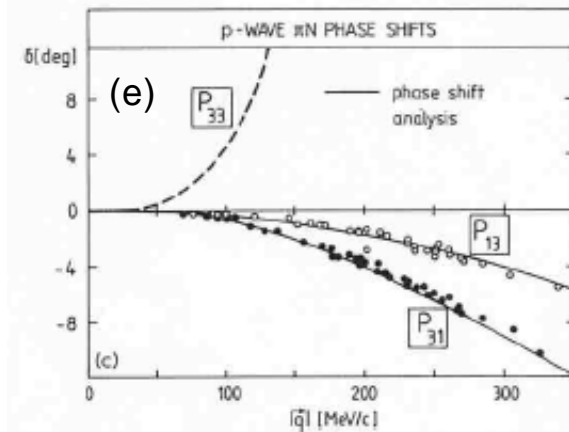
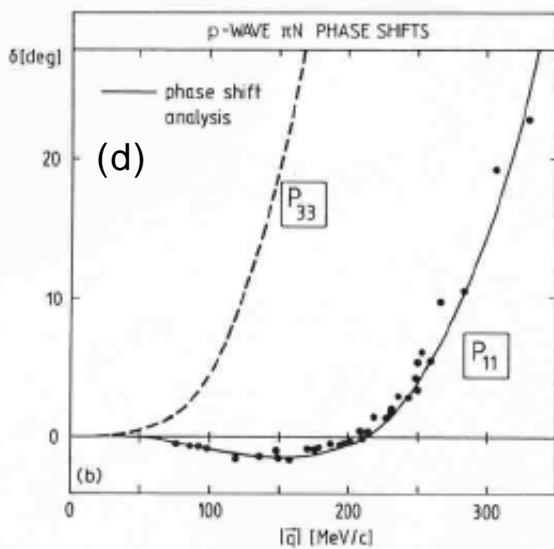
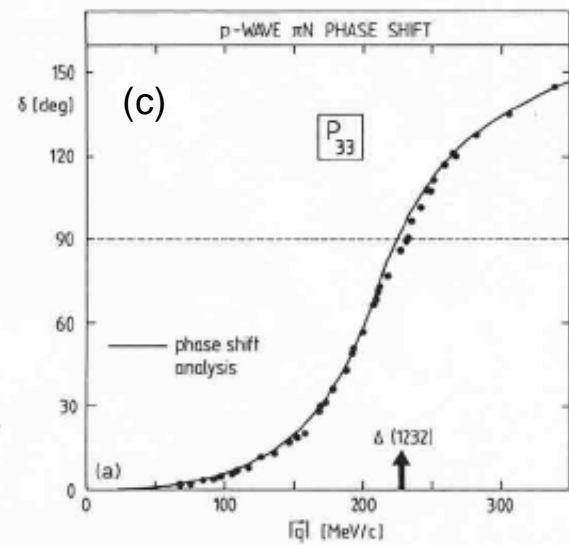
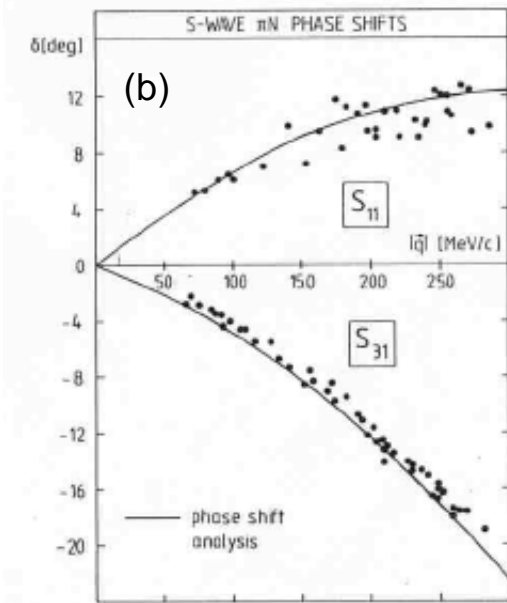
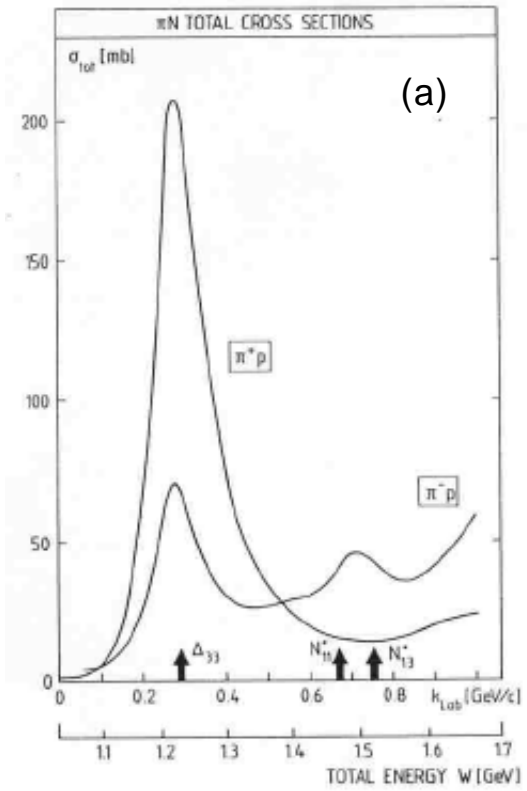
低エネルギー N 散乱のパラメータ						
	S - wave			P - wave		
	$b_0$	$b_1$	$c_0$	$c_1$	$d_0$	$d_1$
Spin	-	-	a	a	f	f
Isospin	a	f	a	f	a	f

a: 平均, f: フリップ

これらのパラメータを各部分波のアイソスピン状態のパラメータに変換すると便利ことがある。S波の場合、全角運動量  $J$  は  $1/2$  に限られるので、このパラメータは全アイソスピン  $I$  ( $1/2$  または  $3/2$ ) のみで識別できる。これらを  $a_{2I} = a_1, a_3$  と書く。P波の場合、全角運動量は  $1/2$  もしくは  $3/2$  の値をとりうるので、アイソスピンの2つの値とあわせて、 $a_{2I,2J} = a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{33}$  などと表す。パラメータ、 $b, c, d$  と  $a$  は以下の以下の行列変換で結びつけることができる：

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ c_0 \\ c_1 \\ d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & & & \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & & \\ & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ & & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ & & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_{11} \\ a_{13} \\ a_{31} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

図 1.6 :  $\pi N$  散乱のデータ。  
 (a) 全断面積、(b) S 波の位相差  
 (c), (d), (e) p 波の位相差。  
 文献 [1] より転載。



次に実験データをみてみよう。図 1.6(a) に示したのが N 散乱の全断面積である。パイオンのエネルギーで約 300 MeV の所に見られる 共鳴のピークを除けば、その典型的な大きさは、数十ミリバールである。これは核子の半径を約 1 fm としたときの、幾何学的な断面積よりいくらか小さめである。もう少し定量的に散乱長を調べてみると、その典型的な値は  $0.1 m_\pi^{-1}$  であり、核力のそれ（典型的には  $10 m_\pi^{-1}$  程度）と比較してかなり小さい。詳しい値は以下のようなものである：

$$\begin{aligned}
 b_0 &= -0.010 m_\pi^{-1}, & b_1 &= -0.091 m_\pi^{-1} & a_1 &= 0.173 m_\pi^{-1}, & a_3 &= -0.101 m_\pi^{-1} \\
 c_0 &= 0.208 m_\pi^{-3}, & c_1 &= 0.175 m_\pi^{-3} & a_{11} &= -0.081 m_\pi^{-3}, & a_{13} &= -0.030 m_\pi^{-3} \\
 d_0 &= -0.190 m_\pi^{-3}, & d_1 &= -0.069 m_\pi^{-3} & a_{31} &= -0.045 m_\pi^{-3}, & a_{33} &= 0.214 m_\pi^{-3}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

特徴を 2 点あげると：

(1)  $b_0$  の値が非常に小さい。このことは、後にカイラル対称性（もしくは メソン ドミナンス）によって説明される（図 1.7 参照）。

(2)  $a_{33}$  の値が非常に大きい。これは  $P_{33}$  チャンネルの 共鳴ドミナンスによって説明される。

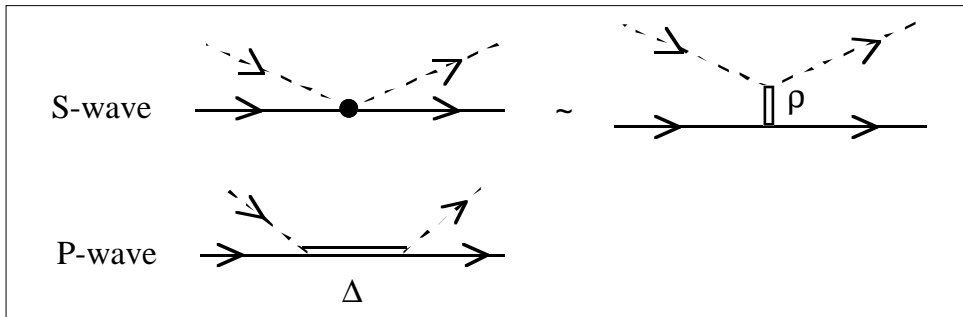


図 1.7 N 散乱の (S 波)、 共鳴ドミナンス (P 波)

## 2.4 例

さて、実験事実をみたところで、簡単な計算を試みよう。まずパイオン交換による核力を導出し、次に  $N$  散乱の断面積を計算する。その際後者ではナイーブな、しかし実験に合わない答えをあえて導くことにする。そのことで、カイラル対称性の役割の重要性を強調することができる。

### (1) 湯川結合

核力の基礎になる、湯川バーテックスから出発することにする。もっとも簡単な擬スカラーパイオンと核子の結合として、いわゆる擬スカラー結合 (pseudoscalar coupling) を考える：

$$L_{\pi NN} = -ig\bar{N}\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5 N \quad (2.16)$$

ここで、 $N$  は核子の Dirac スピノル、 $g$  は無次元の結合定数、 $\gamma_5$  は標準 (Dirac) 表示で

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

で表される ( $0, 1$  は  $2 \times 2$  の対角行列)。非相対論の表式を導くために、核子のスピノルを

$$N(p) = \sqrt{E+M} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+M} \end{pmatrix} \chi \exp(ipx) \rightarrow \sqrt{2M} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{2M} \end{pmatrix} \chi \exp(ipx) \quad (2.18)$$

と書く。すると、バーテックス (2.16) は

$$L_{\pi NN} = -ig\bar{N}(p_2)\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5 N(p_1) \rightarrow 2M \cdot \frac{g}{2M} (\chi^\dagger \sigma_i \tau_a \chi) (\nabla_i^\pi \pi_a) \quad (2.19)$$

となる。こうして、非相対論的な理論で使われる、擬スカラー結合 ( $\vec{\sigma} \cdot \vec{q}$  型) を見いだすことができる (図 1.8 左)。

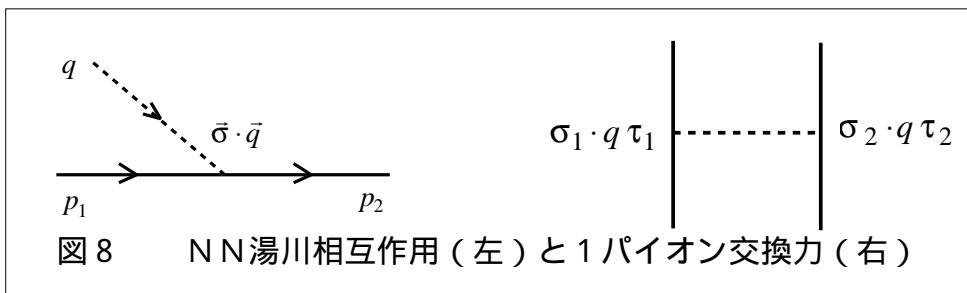


図 8 NN湯川相互作用 (左) と 1パイオン交換力 (右)

(2) OPEP (One Pion Exchange Potential)

バーテックスが与えられたら、その2次の摂動として、1パイオン交換力を計算することができる(図 1.8 右)。運動量空間では

$$\begin{aligned}
 V(q) &= -\left(\frac{g}{2M}\right)^2 \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}}{q^2 + m^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \\
 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{g}{2M}\right)^2 \left\{ \frac{q^2}{q^2 + m^2} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \frac{q^2}{q^2 + m^2} S_{12}(\hat{q}) \right\} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

と表せる。これをフーリエ変換して座標空間の関数にすると、

$$\begin{aligned}
 \xrightarrow{FT} & -\frac{1}{3} \left(\frac{g}{2M}\right)^2 \frac{1}{4\pi} \left\{ \left( m^2 \frac{e^{-mr}}{r} - 4\pi \delta^3(r) \right) \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right. \\
 & \quad \left. + \left( m^2 + 3\frac{m}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \frac{e^{-mr}}{r} S_{12}(\hat{r}) \right\} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

いずれの場合も、1項目は中心力のスピン - スピン成分、2項目はテンソル力を表して、チャンネル依存性という核力の重要な特徴の一端を担っている。例えば、スピン - スピン成分

$$V_{\sigma\tau}(r) = \frac{1}{3} \left(\frac{g}{2M}\right)^2 \frac{1}{4\pi} m^2 \frac{e^{-mr}}{r} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \tag{2.22}$$

は、公式

$$\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 = (2S(S+1))(2I(I+1)) = \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{lll} S & I & L \\ 9 & 0 & 0 \quad odd \quad SO \\ -3 & 1 & 0 \quad even \quad TE \\ -3 & 0 & 1 \quad even \quad SE \\ 1 & 1 & 1 \quad odd \quad TO \end{array} \right. \end{array} \tag{2.23}$$

によって、2核子系の異なったチャンネルに対する力を計算することができる。

より現実的な核力のモデルでは形状因子を導入し、近距離の複雑な構造を表している。しばしば各頂点にモノポール型の形状因子が導入され、核力の場合にはダイポール型を採用する：

$$\frac{1}{q^2 + m^2} \rightarrow \left( \frac{\Lambda^2}{q^2 + \Lambda^2} \right)^2 \frac{1}{q^2 + m^2} \quad (2.24)$$

ここに、 $\Lambda$  はパーテックスの広がりを表すパラメータである。実際上の計算では次の置き換えが便利ことが多い：

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Lambda^2}{q^2 + \Lambda^2} \right)^2 \frac{1}{q^2 + m^2} &\sim \frac{\Lambda^2}{q^2 + \Lambda_1^2} \frac{\Lambda^2}{q^2 + \Lambda_2^2} \frac{1}{q^2 + m^2} \quad (\text{If } \Lambda_1^2 \sim \Lambda_2^2) \\ &= \frac{\Lambda^4}{\Lambda_2^2 - \Lambda_1^2} \left( \frac{1}{q^2 + \Lambda_1^2} - \frac{1}{q^2 + \Lambda_2^2} \right) \frac{1}{q^2 + m^2} \\ &\sim \frac{A}{q^2 + m^2} + \frac{B}{q^2 + \Lambda_1^2} + \frac{C}{q^2 + \Lambda_2^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

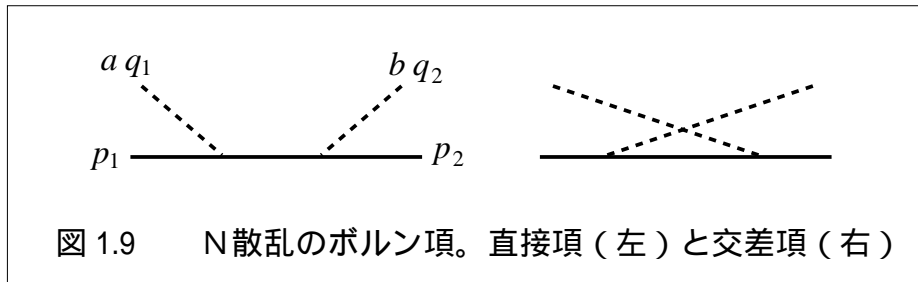
すなわち、適当な似た値の $\Lambda_1, \Lambda_2$ を導入し、部分分数に分け、定数A, B, Cを決定する。位相差解析の結果から、

$$\frac{g^2}{4\pi} \sim 14.9 \rightarrow g \sim 13.7; \quad \Lambda = 1400 \text{ MeV} \quad (2.26)$$

が求められている [14]。

### (3) N 散乱

以上の情報をもとに N 散乱を考え、手始めに下図 1.9 のボルン項の寄与を計算してみよう：



簡単なファインマンルールを使って、T行列として以下の結果を得る：

$$\begin{aligned} T &= g^2 \bar{u}(p_2) i\gamma_5 \tau^b \frac{i}{p_1 + q_1 - M} \tau^a i\gamma_5 u(p_1) \\ &+ g^2 \bar{u}(p_2) i\gamma_5 \tau^a \frac{i}{p_1 - q_2 - M} \tau^b i\gamma_5 u(p_1) \\ &\xrightarrow[\text{At threshold}]{a=b} + i \frac{g^2}{M} \bar{u}(p_2) u(p_1) \end{aligned} \quad (2.27)$$

最後の行では、パイオンがしきい付近（低エネルギー）にあるとして、

$$p_1 \sim p_2 \sim (M, 0), \quad q_1 \sim q_2 \sim \gamma_0 m_\pi \rightarrow m_\pi \quad (2.28)$$

などの関係を使って、式を簡単にした。

散乱断面積は

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4 |T|^2}{4\sqrt{(pq)^2 - m^2 M^2}} d\Phi \quad (2.29)$$

によって与えられる [15]。ここで、 $d\Phi$  は終状態の位相空間体積で、パイオンの質量を  $m$  と書いた。(2.27) の結果と ( $\bar{u}(p_2)u(p_1) \sim 2M$  に注意)、角度積分後の位相空間体積

$$d\Phi = \frac{1}{2(2\pi)^5} \frac{q}{m+M} \quad (\text{angle integrated}), \quad |T|^2 \sim 4g^2 \quad (2.30)$$

を代入して

$$\sigma \sim \frac{g^4}{4\pi M^2} \sim 125 \text{ fm}^2 = 1250 \text{ mb} \quad (2.31)$$

をみいだすが、この値は実験で観測される断面積の値、数 mb と比較してはるかに大きい (図 1.6)。核力の 1 パイオン交換でうまくいっている要素をそのまま適用すると N 散乱は全くうまくいかないのである。何かが足りない。カイラル対称性がこの問題を解決してくれるかをこの後に見ることになる。



### 3 カイラル対称性

この章では、カイラル変換とカイラル群を導入し、カイラル対称性が自発的に破れた世界で成り立つ低エネルギー定理をいくつか紹介する。

#### 3.1 $\gamma_5$ 変換

質量 $m$ のフェルミオン自由場のラグランジアンを考える：

$$L = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ここで、 $u, d$ はアイソスピンの2成分をあらわし、その各々が4成分Diracスピノルである。

まず、アイソスピン変換を考える。すなわち、

$$\psi \rightarrow \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{v})\psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} \exp(-i\vec{\tau} \cdot \vec{v}), \quad (\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger \exp(-i\vec{\tau} \cdot \vec{v})) \quad (3.2)$$

ここで $\vec{\tau} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^3 \tau_i v_i$ であり、 $v_i (i=1,2,3)$ は変換の3つの実数パラメータである。この変換のもと、自由場のラグランジアン $L$ の運動項、質量項ともに不変に保たれる。すなわち：

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\partial\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{-i\vec{\tau}\cdot\vec{v}}\partial e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{v}}\psi = \bar{\psi}\partial\psi \quad (\text{invariant}) \\ \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{-i\vec{\tau}\cdot\vec{v}}e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{v}}\psi = \bar{\psi}\psi \quad ( \quad ) \end{aligned} \quad (3.3)$$

次に、位相に $\gamma_5$ を掛けて行うアイソスピン軸性ベクトル変換（しばしば $\gamma_5$ 変換、あるいは単に軸性変換と呼ばれる。以下では軸性変換と呼ぶことにする）を考える：

$$\psi \rightarrow e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}\gamma_5}\psi; \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}\gamma_5}, \quad (\psi^\dagger \rightarrow \psi^\dagger e^{-i\vec{\tau}\cdot\vec{a}\gamma_5}) \quad (3.4)$$

この後すぐ見るように、アイソスピン変換と軸性変換は質量ゼロのフェルミ粒子に特有な、独立なアイソスピン変換であることがわかる。アイソスピン変換の場合と同様に、ラグランジアン項の変換性を調べてみると：

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\partial\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}\gamma_5}\partial e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}\gamma_5}\psi = \bar{\psi}\partial\psi \quad (\text{invariant}) \\ \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}\gamma_5}e^{i\vec{\tau}\cdot\vec{a}\gamma_5}\psi \neq \bar{\psi}\psi \quad (\text{noninvariant}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

すなわち、軸性変換に対して運動項は不変であるが質量項は不変ではない。このことは

非常に重要な事実である。

### 3.2 右巻・左巻フェルミオン

前節のアイソスピン、軸性変換の内容をより深く考察してみよう。そのために、まず、フェルミオンの場を $\gamma_5$ の固有状態である、正のカイラリティ（右巻き）成分と、負のカイラリティ（左巻き）成分に分ける：

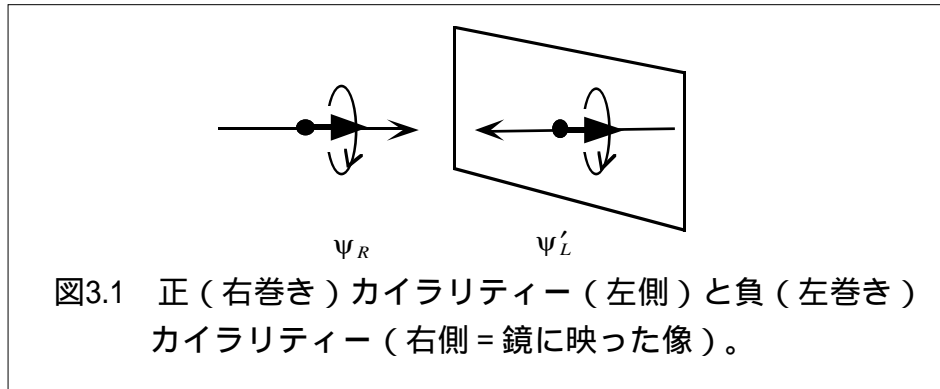
$$\psi = \left( \frac{1+\gamma_5}{2} + \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \psi \equiv \psi_R + \psi_L \quad (3.6)$$

ここで、分解に用いた演算子  $P_R \equiv \frac{1+\gamma_5}{2}$ ,  $P_L \equiv \frac{1-\gamma_5}{2}$  は射影演算子（projection operator）である： $P_R^2 = P_R$ ,  $P_L^2 = P_L$ ,  $P_R P_L = 0$ ,  $P_R + P_L = 1$ 。定義から、

$$\gamma_5 \psi_R = \gamma_5 P_R \psi = +\psi_R, \quad \gamma_5 \psi_L = \gamma_5 P_L \psi = -\psi_L \quad (3.7)$$

である。 $\psi_R, \psi_L$  はパリティ変換のもとでお互いに移り変わる（下図）：

$$\psi_R \xrightarrow{P} \gamma_0 \frac{1+\gamma_5}{2} \psi = \frac{1-\gamma_5}{2} \gamma_0 \psi = \frac{1-\gamma_5}{2} \psi' = \psi'_L \quad (3.8)$$



カイラリティ正・負（右巻き・左巻き）の状態は質量ゼロの場合に、ヘリシティーの固有状態と等価である。このことを確かめるために質量ゼロの粒子が $z$ 方向に光速（ $c=1$ ）で運動している場合を考える： $p=(0,0,1)$ 。このときヘリシティープラス、すなわち $\text{spin } s_z = +1/2$ のDiracスピノルは

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \cdot p \end{pmatrix} \chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \chi_\uparrow \quad (3.9)$$

とかける。ここで  $\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  で、最後の辺の 1 は  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  である。同様にヘリシティーマイナスの Dirac スピノルは

$$\psi_{-} = \left( \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \right) \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \chi_{\downarrow} \quad (3.10)$$

と書ける。これらを用いて、次の式を容易に示すことができる：

$$\begin{aligned} P_R \psi_{+} &= \frac{1+\gamma_5}{2} \psi_{+} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \chi_{\uparrow} = \psi_{+} \\ P_L \psi_{-} &= \frac{1-\gamma_5}{2} \psi_{-} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \chi_{\downarrow} = \psi_{-} \\ P_R \psi_{-} &= P_L \psi_{+} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

これらの関係式は、質量を持たないフェルミオンの場合、

$$\begin{array}{ll} \psi_R \text{ (右巻フェルミオン)} & \text{正のヘリシティー} \\ \psi_L \text{ (左巻フェルミオン)} & \text{負のヘリシティー} \end{array}$$

であることを示している。

### 3.3 右・左変換

フェルミオンの右巻き・左巻き分解を見たところで、再びカイラル変換（アイソスピン変換と軸性変換）に戻ることにしよう。無限小変換

$$\begin{aligned} \text{アイソスピン変換：} & \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{v}) \sim 1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{v} + \dots \equiv g_V \\ \text{軸性変換：} & \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{a}\gamma_5) \sim 1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{a}\gamma_5 + \dots \equiv g_A \end{aligned} \quad (3.12)$$

によって、右・左巻き成分は次の変換を受ける：

$$g_V \psi_R = (1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{v}) \psi_R \quad (3.13a)$$

$$g_V \psi_L = (1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{v}) \psi_L \quad (3.13b)$$

$$g_A \psi_R = (1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{a}\gamma_5) \psi_R = (1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{a}) \psi_R \quad (3.13c)$$

$$g_A \psi_L = (1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{a}\gamma_5) \psi_L = (1 - i\vec{\tau} \cdot \vec{a}) \psi_L \quad (3.13d)$$

ここで、下の 2 つの式（軸性変換）では  $\gamma_5 \psi_{R,L} = \pm \psi_{R,L}$  を使った。さて、(3.13a) と (3.13c) を、また (3.13b) と (3.13d) 足したり引いたりして 2 で割る：

$$\begin{aligned}\frac{g_V + g_A}{2}\psi_R &= \left(1 + i\vec{\tau} \cdot \frac{\vec{v} + \vec{a}}{2}\right)\psi_R \rightarrow g_R\psi_R \\ \frac{g_V - g_A}{2}\psi_R &= i\vec{\tau} \cdot \frac{\vec{v} - \vec{a}}{2}\psi_R\end{aligned}\tag{3.14a}$$

$$\begin{aligned}\frac{g_V + g_A}{2}\psi_L &= \left(1 + i\vec{\tau} \cdot \frac{\vec{v} - \vec{a}}{2}\right)\psi_L \rightarrow g_L\psi_L \\ \frac{g_V - g_A}{2}\psi_L &= i\vec{\tau} \cdot \frac{\vec{v} + \vec{a}}{2}\psi_L\end{aligned}\tag{3.14b}$$

これらの関係式から、(3.14a)においては  $v = a \equiv r$ 、(3.14b)においては  $v = -a \equiv l$  と置き換えることによって、右巻き・左巻き成分の変換を完全に分離することができる：

$$\begin{aligned}g_R\psi_R &= (1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{r})\psi_R, & g_L\psi_R &= \psi_R \\ g_L\psi_L &= (1 + i\vec{\tau} \cdot \vec{l})\psi_L, & g_R\psi_L &= \psi_L\end{aligned}\tag{3.15}$$

すなわち、 $\psi_R, \psi_L$  はここで定義された  $g_R, g_L$  によって独立な変換を受けることになる。 $g_R, g_L$  は  $g_V, g_A$  と変換パラメータの選び方が異なるだけで、お互いに等価である。右巻き・左巻き成分それぞれに独立な内部変換（アイソスピン、フレーバー等）をカイラル変換と呼び、この変換のもとで系が不変に保たれるとき、その系はカイラル対称性を持っているという。3.1節で見たように、質量がゼロのフェルミオン系は、全カイラル変換のもとで対称であるのに対して、質量をもったフェルミオンは、アイソスピン変換についてのみ対称で、軸性変換に対する不変性は破れている。

ここで、しばしば混乱を引き起こす、しかし重要な点を強調しておく。(3.15)で右・左巻き成分の変換のそれぞれを  $g_R, g_L$  と書いた。この記法は便宜上のものであり、 $g_A, g_B$  等と書いても構わない。重要な点は、右巻き、左巻きの成分に対して独立に異なる内部対称変換をアサインしている点である。このとき、 $g_A \rightarrow \psi_R, g_B \rightarrow \psi_L$  とするか、 $g_A \rightarrow \psi_L, g_B \rightarrow \psi_R$  とするか2通りが可能になる。このことは、特にフェルミオンが2つ以上存在する場合に重要になってくる[16]。さらに右巻き成分が  $g_A$  もしくは  $g_B$  の一方による変換を受けるばかりか（このとき左巻き成分は  $g_B$  もしくは  $g_A$  の変換を受ける。これはパリティ不変性の帰結である）、同時に両方の変換を受けることさえありうる。ハドロンがクォークの複合系であればこのようなことが可能になる。このとき  $g_A, g_B$  のもとでどのように変換するか、その表現を並べて書いて、 $(D_A, D_B)$  の様に表す。すなわち、

$$\psi_R \sim (D_A, D_B), \quad \psi_L \sim (D_B, D_A)$$

である。ここに、 $D_A$  は群  $A$  の表現である。

### 3.4 カレントと交換関係

系に対称性があるときには、それに対応する保存するカレントが存在する。そのことを示すネーターの定理を復習しよう。一般に場の変数  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  で書かれたラグランジアン  $L(\phi, \partial_\mu \phi)$  を考えることにする。  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  がある群  $G$  の要素に対応する線形変換  $g$  の表現になっているとする：

$$\begin{aligned} \phi_a \xrightarrow{g} (D(g)\phi)_a &\equiv \sum_b D(g)_{ab} \phi_b \\ &\sim \left( 1 + i \sum_m \varepsilon_m T^m \right) \phi \equiv \phi + \delta\phi \end{aligned} \quad (3.16)$$

$D(g)$  は表現行列である。2行目では微小変換の1次のオーダーまでとって、  $\varepsilon_m$  はその微小変換パラメータ、  $T^m$  は  $\phi$  に作用する  $n \times n$  の行列で生成子と呼ばれる。系に対称性があるとき、ラグランジアンはこの変換に対して不変に保たれる。すなわち

$$\begin{aligned} 0 &= \delta L(\phi, \partial_\mu \phi) \equiv L(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \partial_\mu \delta\phi) - L(\phi, \partial_\mu \phi) \\ &\sim \frac{\partial L}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \delta\phi \\ &= -i \sum_m \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} T^m \phi \right) \varepsilon_m \equiv -\sum_m \partial_\mu (J^m)^\mu \varepsilon_m \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで運動方程式を使っていることに注意したい。最後の式がカレントの定義で、

$$(J^m)^\mu = -i \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} T^m \phi \quad (3.18)$$

カレントは対称変換の個数（それは  $m$  によってラベルされている）分だけ存在する。(3.17)が任意の微小パラメータ  $\varepsilon_m$  に対して成り立つという要請から、カレントの保存則

$$\partial_\mu (J^m)^\mu = 0 \quad (3.19)$$

が導かれる。

以上の方法を、アイソスピン変換と軸性変換に対して適用すると、次のアイソスピンベクトルカレント（あるいは単にベクトルカレント、もしくはアイソスピнкаレント）、軸性ベクトルカレント（あるいは単に軸性カレント）を見いだすことができる：

$$V_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \tau^a \psi, \quad A_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau^a \psi \quad (3.20)$$

これらはまた、右巻き左巻き成分を使うと、

$$\begin{aligned} V_\mu^a &= \bar{\Psi}_R \gamma_\mu \tau^a \Psi_R + \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \tau^a \Psi_L \equiv R_\mu^a + L_\mu^a \\ A_\mu^a &= \bar{\Psi}_R \gamma_\mu \tau^a \Psi_R - \bar{\Psi}_L \gamma_\mu \tau^a \Psi_L \equiv R_\mu^a - L_\mu^a \end{aligned} \quad (3.21)$$

となることが確かめられる。

ここで、カレントの変換性を調べておこう。カイラル変換のもとでの変化分は容易に計算できる。微小変換に対する結果を示しておく。

アイソスピン変換：

$$\begin{aligned} V_\mu^a &\rightarrow \bar{\Psi}(1 - i\tau \cdot v)\gamma_\mu \tau^a(1 + i\tau \cdot v)\Psi \\ &\sim \bar{\Psi} \gamma_\mu \tau^a \Psi + i\bar{\Psi} \gamma_\mu [\tau^a, \tau \cdot v] \Psi \\ &= V_\mu^a - 2\varepsilon_{abc} v_b V_\mu^c \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a - 2\varepsilon_{abc} v_b A_\mu^c \end{aligned} \quad (3.22)$$

軸性変換：

$$\begin{aligned} V_\mu^a &\rightarrow V_\mu^a - 2\varepsilon_{abc} a_b A_\mu^c \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^a - 2\varepsilon_{abc} a_b V_\mu^c \end{aligned} \quad (3.23)$$

である。これらはまた、R, L変換を用いて

R変換：

$$\begin{aligned} R_\mu^a &\rightarrow R_\mu^a - 2\varepsilon_{abc} r_b R_\mu^c \\ L_\mu^a &\rightarrow L_\mu^a \end{aligned} \quad (3.24)$$

L変換：

$$\begin{aligned} R_\mu^a &\rightarrow R_\mu^a \\ L_\mu^a &\rightarrow L_\mu^a - 2\varepsilon_{abc} l_b R_\mu^c \end{aligned} \quad (3.25)$$

と表すことができ、再び、R, L変換の独立性を見いだすことができる。

最後に、量子場の理論に移って、電荷演算子の交換関係を導くことにしよう。そのために、まず、場の演算子 $\phi$ に共役な運動量演算子を定義する：

$$\pi^a(x) = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \phi^a)} \quad (3.26)$$

正準量子化の規則にしたがって、これらは交換関係

$$[\pi^a(x), \phi^b(y)] = i\delta_{ab}\delta^3(x-y) \quad (3.27)$$

を満足する。この運動量演算子を用いると、カレントの第0成分は

$$(J^m)^\mu = -i \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} T^m\phi \xrightarrow{\mu=0} -i\pi T^m\phi \quad (3.28)$$

と書ける。従って、この空間積分量である電荷は

$$Q^m \equiv \int d^3x J_0^m(x) = -i \int d^3x \pi T^m\phi \quad (3.29)$$

と書ける。

電荷と場の演算子の交換関係を計算してみよう：

$$i[Q^m, \phi(x)] = \int d^3y [\pi(y)T^m\phi(y), \phi(x)] = i T^m\phi(x) \quad (3.30)$$

すなわち、電荷は対称変換の生成演算子になっていることがわかる。有限変換の場合には、

$$e^{iQ^m\epsilon_m}\phi(x)e^{-iQ^m\epsilon_m} = D(g)\phi(x)$$

である。

以上の性質を使うと、

$$[Q_V^a, Q_V^b] = i\epsilon_{abc}Q_V^c, \quad [Q_V^a, Q_A^b] = i\epsilon_{abc}Q_A^c, \quad [Q_A^a, Q_A^b] = i\epsilon_{abc}Q_V^c \quad (3.31)$$

を確かめることができる。これは、カレントの変換則(3.20,21)に対応するものである。以前のようにこれらの式を足したり引いたりして、すなわち、

$$Q_R^a = \frac{1}{2}(Q_V^a + Q_A^a), \quad Q_L^a = \frac{1}{2}(Q_V^a - Q_A^a) \quad (3.32)$$

を定義して

$$[Q_R^a, Q_R^b] = i\epsilon_{abc}Q_R^c, \quad [Q_L^a, Q_L^b] = i\epsilon_{abc}Q_L^c, \quad [Q_R^a, Q_L^b] = 0 \quad (3.33)$$

に書き換えることができる。ここで再び、右巻・左巻成分が交換関係においても独立に

分離することが確かめられた。この対称性がカイラル対称性で、それを表す群をカイラル群と言う。ここでは特に2成分アイソスピンに関連したものから、

$$SU(2) \times SU(2)$$

とかく。3.2節の終わりで述べたことから、2つの $SU(2)$ が明確に区別されているかぎり、それぞれの $SU(2)$ に特別なラベルを付ける必要はない。

### 3.5 自発的対称性の破れ

自発的対称性の破れは、現代物理学の重要な考え方の一つである。ナীবには、真空は一つしかない考えることができる。実際相互作用がない場合にはそう考えて差し支えない場合が多い。このとき、対称変換によって真空はそれ自身に移る。すなわち、対称変換の自明な表現、1重項表現に属する。ところが系にある対称性が存在し、相互作用がスイッチオンされると、真空（最低エネルギーの配位）は系の持っていた対称性を失い、相互作用がない場合の唯一の真空とは異なった配位になることがある。同じ最低エネルギーを持った真空がいくつか存在することになる。これらは、失われた対称性の変換によって移り変わる同等な配位であり、縮対した真空と言うことができる。特に、連続対称性の場合、無限に縮対した真空が出現する。

系の対称性は励起状態スペクトルに特徴的な性質をもたらす。とりわけ、連続対称性が破れると、縮退した異なる真空の間を行き来する（それらは同一エネルギーの配位を移るのでエネルギーを要しない）ゼロエネルギーモードが可能になる。量子力学の場合、例えば棒状に変形した物が回転する運動がそれにあたる。回転の位相空間は有限なので、このゼロモードを量子化すると、離散的なスペクトル構造 $\sim J(J+1)$ が出現する。ここで $J$ は系の角運動量である。場の理論の場合、ゼロエネルギーモードは質量がゼロの粒子となって現れる。これが、南部 - ゴールドストーン粒子である。ゼロモードが出現すること以外に、当然のことながらスペクトルの対称性も失われ、系に複雑さが増す。相互作用の結果、自発的に対称性が破れ、多様な世界が生まれるのである。さらに、自発的な対称性の破れは、粒子の質量を生成する機構の一つとも考えられている。

この節ではカイラル対称性の自発的な破れと、そのことによる帰結のいくつかを議論する。とくに、中間子が南部 - ゴールドストーン粒子と見なされるとき、中間子を含む過程にいわゆる低エネルギー定理が導かれる例を見ることにする。

まず、系に対称性がある場合どのような帰結が得られるかを調べてみる。系の対称性は、ハミルトニアン（もしくはラグランジアン）の不変性を意味している：

$$H \rightarrow gHg^{-1} = H \tag{3.34}$$



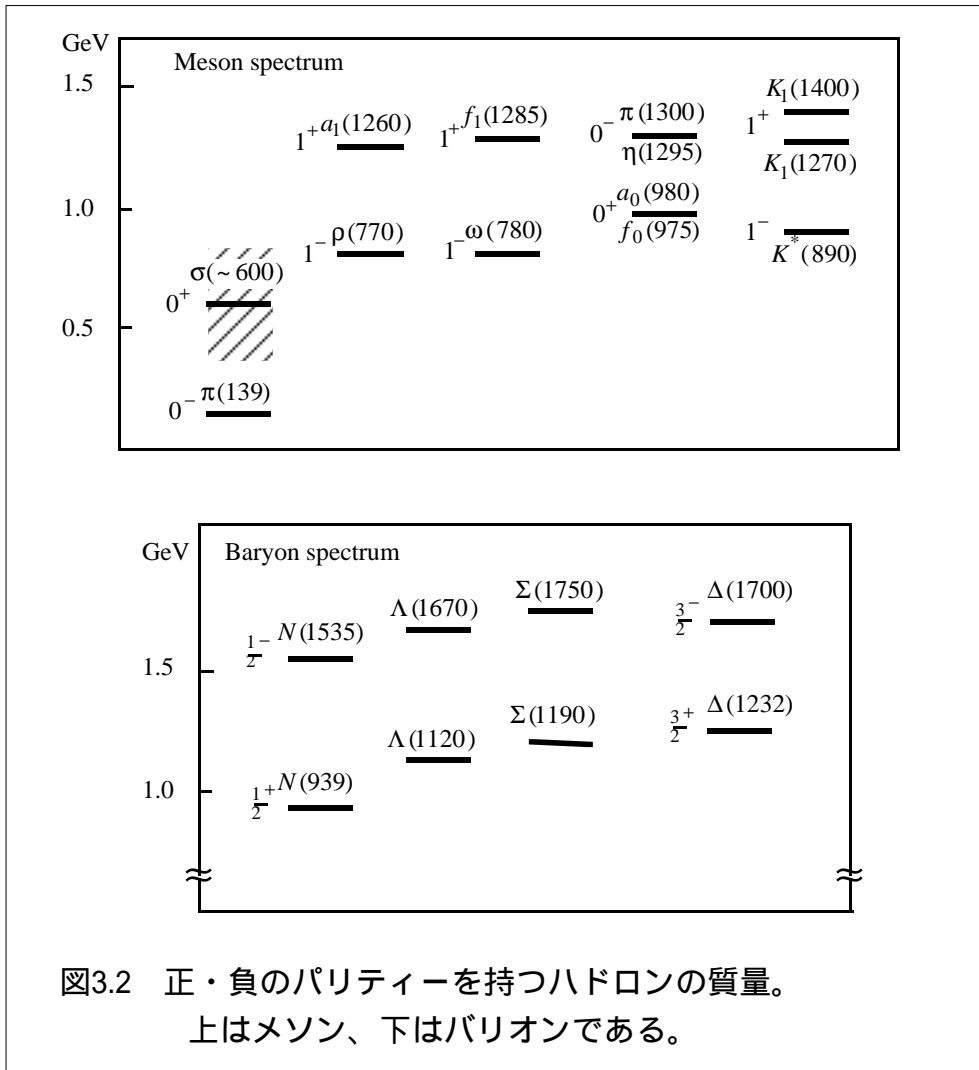
ここで、 $g$  は対称変換の要素である。変換  $g$  によって結びつけられる 2 つの状態を考える：

$$|A\rangle = a^\dagger|0\rangle, \quad |B\rangle = b^\dagger|0\rangle \quad |B\rangle \equiv g|A\rangle \quad (3.35)$$

ナীবには、2 つの状態のエネルギーは同じであることが期待される：

$$E_A = \langle A|H|A\rangle = \langle B|gHg^\dagger|B\rangle = \langle B|H|B\rangle = E_B \quad (3.36)$$

このルールをカイラル変換の場合にあてはめると、軸性変換は状態のパリティーを変えるので、スペクトルにはパリティー-doublet (対) が予言されることになるが、現実にはそのような縮対した正負のパリティー状態は観測されていない。図3.2に見るように、隣り合う正・負パリティー状態はおおむね、500 MeVの質量差がみられる。



実は、(3.36)の議論には重要な仮定がなされている。すなわち、変換則

$$|A\rangle \rightarrow g|A\rangle = ga^\dagger|0\rangle = ga^\dagger g^\dagger g|0\rangle = b^\dagger g|0\rangle \quad (3.37)$$

を導く際に、

$$g|0\rangle = |0\rangle \quad (3.38)$$

が仮定されていた。この関係が成り立つならば、(3.36)で見たように対称変換によって移り変わる状態の縮退が実現されていなければならない。現実にはそうになっていないということは、(3.38)が正しくない、すなわち真空は対称変換によって元に戻らない、すなわち、真空は対称性 $g$ を破っていることを示している。ハドロンのカイラル対称性の場合、軸性変換に対する対称性が破れ、アイソスピン変換に対する対称性が残る。このことを式で表現すると、

$$SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)_{Isospin} \quad (3.39)$$

すなわち、もともとの大きなカイラル対称性 $SU(2) \times SU(2)$ は良い対称性でなくなり、部分群（対角群）の対称性 $SU(2)_{Isospin}$ のみが良い対称性として残る。このとき、縮対した真空によって構成される空間、すなわちそれは商空間（coset space、これは群ではない）ことに注意しなければならない）

$$SU(2) \times SU(2) / SU(2)_{Isospin} \sim U = \exp(i\tau \cdot \pi / f_\pi) \quad (3.40)$$

であるが、それをparametrizeする変数が南部 - Goldstone粒子としてのパイオンである。

### 3.6 PCAC と低エネルギー定理

カイラル対称性が自発的に破れ、質量がゼロの中間子が出現すると（このことを保証する南部 - Goldstoneの定理は一般には証明しないが、次章で線形モデルを議論する際に、具体的な例を見ることにする）、中間子の関与するプロセスが、いわゆるPCACの仮定と電荷間の交換関係で規定される。この節ではこの例をいくつか見ていく。

#### (1) パイオンの弱崩壊

まず、中間子の弱崩壊を考える。荷電  $\pi^+$  は半減期  $1.8 \times 10^{-8}$  秒の寿命でミューオンとニュートリノに崩壊する（図3.3）。これは弱い相互作用によって引き起こされる。中性  $\pi^0$  は  $2\gamma$  を放出して崩壊するが、この2次の電磁相互作用で起こる崩壊寿命に比べ、荷電  $\pi^\pm$  はずっと長い寿命を持っている。

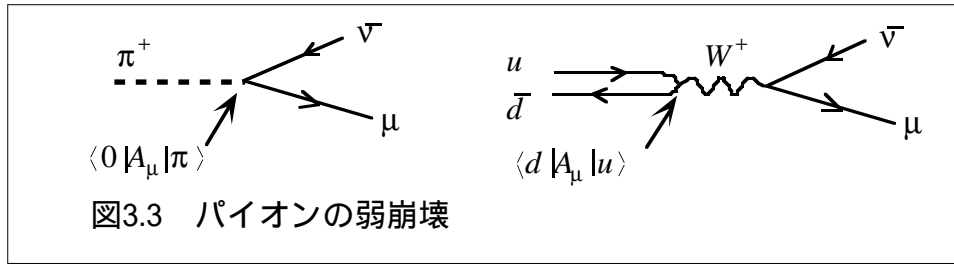


図3.3 パイオンの弱崩壊

弱い相互作用は、現象論的にはフェルミのカレント - カレント型の相互作用によって表される。もちろん、現在はweak bosonを介する相互作用であることがわかっているが（図3.3右）、ここではそれに立ち入る必要はない。カレント - カレント型の相互作用はそのラグランジアンが

$$L_{\text{int}} \sim J_{\mu} J^{\mu} \quad (3.41)$$

の形で書かれる場合を言う。弱い相互作用は、ハドロンとレプトンの両方で起こるので、カレントはハドロンとレプトンの項の和として書ける：

$$J_{\mu} \sim J_{\mu}^{(h)} + J_{\mu}^{(l)} \quad (3.42)$$

レプトンカレント  $J_{\mu}^{(l)}$  はその構造がよくわかっていて、レプトンの左巻き成分に対して有効である（V-A型）：

$$J_{\mu}^{(l)} = \bar{l} \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) l \equiv \nu_{\mu} - a_{\mu} \quad (3.43)$$

一方、ハドロンカレントはハドロンの種類に応じていろいろな形に書かれるのみばかりか、その結合定数、形状因子など理論的に計算できない部分がある。QCDからハドロンの波動関数を求める必要があるからである。にもかかわらず、低エネルギーという条件を課し、また対称性を仮定することでかなりの部分を定めることができる。

中間子の崩壊の場合、次の行列要素を計算する必要がある<sup>1)</sup>：

$$\langle \mu \bar{\nu}_{\mu} | L_{\text{int}}(x) | \pi(q) \rangle \sim \langle \mu \bar{\nu}_{\mu} | J^{\mu}(x) J_{\mu}(x) | \pi(q) \rangle \sim \langle \mu \bar{\nu}_{\mu} | J^{\mu(l)}(x) \rangle \langle 0 | A_{\mu}(x) | \pi(q) \rangle \quad (3.44)$$

ここで、パイオンは初め運動量  $q_{\mu}$  を持っていたとする。  $A^{\mu}$  はハドロニックカレントの

<sup>1)</sup> 次のような考察から、パイオンの崩壊自体、カイラル対称性の自発的な破れの結果起こると解釈できる。通常カレントといったら、例えば、光子に結合する電子のように、始状態と終状態ともに粒子が存在する。ハドロンの軸性カレントも後の（4章）線形 模型では  $A_{\mu}^a = \sigma \partial_{\mu} \pi^a - \pi^a \partial_{\mu} \sigma$  のように書け、たしかに、軸性カレントは粒子 から粒子 に遷移する成分を持っている。ところが、対称性が自発的に破れると、

が真空期待値  $f_{\pi}$  をもち軸性カレントの第1項  $f_{\pi} \partial_{\mu} \pi^a$  が、 の崩壊を表す。粒子 が真空  $f_{\pi}$  に遷移していくのである。

軸性項（軸性カレント）である。レプトン項  $\langle \mu \bar{\nu}_\mu | J_\mu^{(l)} | 0 \rangle$  は計算されるので、軸性カレントが  $\pi$  を消滅する行列要素  $\langle 0 | A_\mu^a | \pi \rangle$  が問題になる。より正確には、 $\pi$  は電荷を持つので、軸性カレントは電荷を変える荷電軸性カレント  $A_\mu^a(x)$  である。並進対称性、ローレンツ共変性と荷電対称性からこの行列要素は

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = i q_\mu \delta_{ab} f_\pi \exp(-iqx) \quad (3.45)$$

と表すことができる。ここで、 $f_\pi$  は  $\pi$  の運動量の 2 乗  $q^2$  の関数である。 $f_\pi$  は  $\pi$  の崩壊定数と呼ばれ、次章で見るように、カイラル対称性の自発的破れの強さを表すスケールパラメータになっている。最後に、指数関数  $\exp(-iqx)$  が右辺に現れるのは系に並進対称性があるからである。

さて、(3.45)の微分をとってみる：

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = \delta_{ab} m_\pi^2 f_\pi \exp(-iqx) \quad (3.46)$$

ここでは、 $\pi$  は厳密に質量ゼロの南部 - Goldstone 粒子ではなく、現実に観測される小さな質量をもつとした。この式と波動関数の規格化

$$\langle 0 | \pi^a(x) | \pi^b(q) \rangle = \delta_{ab} \exp(-iqx) \quad (3.47)$$

を比較すると、

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(x) | \pi^b(q) \rangle = m_\pi^2 f_\pi \langle 0 | \pi^a(x) | \pi^b(q) \rangle \quad (3.48)$$

を得る。これは真空と  $1$  状態の間の行列要素に対して成り立つ式であるが、拡張して、

$$\partial^\mu A_\mu^a(x) = m_\pi^2 f_\pi \pi^a(x) \quad (3.49)$$

が成り立つことを仮定する。この式はパイオンの質量  $m_\pi$  が小さい程度に、左辺の軸性カレントの発散が小さいことを表していて、従って近似的に軸性カレントが保存されるという考えに導かれる。これを PCAC 仮説 (Partially Conserved Axial-vector Current) という。

## (2) 中性子のベータ崩壊

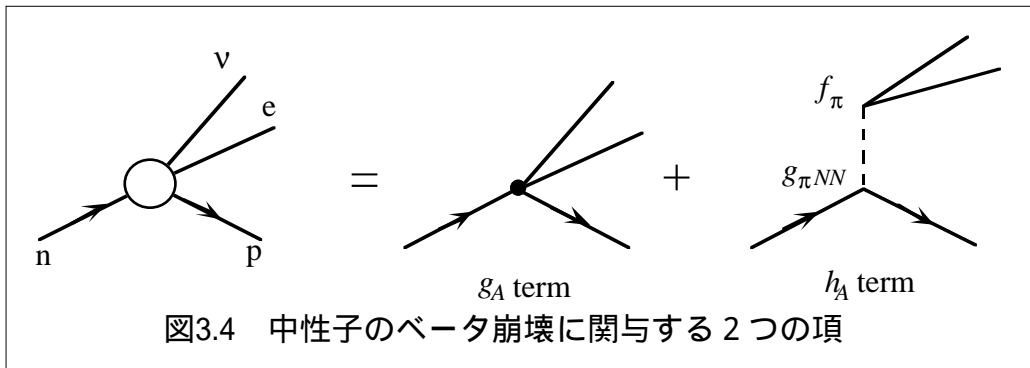
この例では、 $m_\pi = 0$  の極限（カイラル極限）で考えていく。ゼロ質量のパイオンポールの役割を見ながら Goldberger-Treiman の関係式を導くことができる。遷移行列は

$$\langle p(p_f) e \bar{v}_e | L_{\text{int}} | n(p_i) \rangle = \langle \mu \bar{v}_e | J_\mu^{(l)} | 0 \rangle \langle p(p_f) | (V^\mu - A^\mu) | n(p_i) \rangle \quad (3.50)$$

である。右辺のハドロニックカレントは電荷を1だけ変えることのできる、荷電カレントである。ここでも、特に軸性カレントの行列要素  $\langle p(p_f) | A_\mu^a | n(p_i) \rangle$  を考えることにする。ローレンツ共変性、並進対称性、パリティ保存などを考慮すると、この行列要素は陽子と中性子のスピノルを使って

$$\begin{aligned} \langle p(p_f) | A_\mu^a(x) | n(p_i) \rangle &= \bar{u}_p(p_f) \left[ \gamma_\mu g_A(q^2) + q_\mu h_A(q^2) \right] \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} u_n(p_i) \exp(iqx) \\ q &= p_f - p_i \end{aligned} \quad (3.51)$$

という形に書ける。ここでは、行列要素を表すのに、2つのスカラー関数が必要になることに注意する： $g_A(q^2)$ と $h_A(q^2)$ 。前者を軸性結合 (axial coupling) 定数 (もしくは形状因子)、後者をパイオン誘導項 (pion induced term) とよび、グラフでは図3.4の第1項と第2項に対応させることができる。以下でこれらの項の意味を調べていく。



(3.51)の両辺の微分をとると  $\partial^\mu A_\mu^a(x) = 0$  ( $m_\pi = 0$ のとき) を仮定して、

$$0 = \langle p(p_f) | \partial^\mu A_\mu^a | n(p_i) \rangle = i \bar{u}_p(p_f) \left[ q g_A(q^2) + q^2 h_A(q^2) \right] \gamma_5 \frac{\tau^a}{2} u_n(p_i) \quad (3.52)$$

従って、右辺より

$$h_A(q^2) = -2M_N \frac{g_A(q^2)}{q^2} \quad (3.53)$$

が導かれる。 $h_A(q^2)$ の $1/q^2$ のふるまいはパイオンの伝搬によるゼロ質量のポールと解釈することができる (図3.4第2項)。このことは軸性カレントに1項が含まれること:

$$A_\mu^a = f_\pi \partial^\mu \pi^a + \dots \quad (3.54)$$

を使って次のように示すことができる（この式は(3.45)と(3.47)から示唆される）。まず、(3.54)の行列要素をとる（ $x=0$ とする）：

$$\langle p(p_f) | A_\mu^a | n(p_i) \rangle_{1\pi} = i f_\pi q_\mu \langle p(p_f) | \pi^a | n(p_i) \rangle \quad (3.55)$$

次に の運動方程式(2.3)の行列要素をとると（ $m_\pi = 0$ ）、

$$\langle p(p_f) | \pi^a | n(p_i) \rangle \equiv \frac{i}{q^2} g_{\pi NN}(q^2) \bar{u}_p(p_f) \gamma_5 \tau^a u_n(p_i) \quad (3.56)$$

ここで、 NN結合を

$$\langle p(p_f) | \pi^a | n(p_i) \rangle = \frac{1}{q^2} \langle p(p_f) | J^a | n(p_i) \rangle \equiv \frac{i}{q^2} g_{\pi NN}(q^2) \bar{u}_p(p_f) \gamma_5 \tau^a u_n(p_i) \quad (3.57)$$

によって定義した。  $J^a$  は のソース項である。(3.56)を(3.55)に代入すれば、確かに  $A_\mu^a$  の 1 項に  $1/q^2$  の項が存在することがわかる：

$$\langle p(p_f) | A_\mu^a | n(p_i) \rangle_{1\pi} = -f_\pi \frac{q_\mu}{q^2} g_{\pi NN}(q^2) \bar{u}_p(p_f) \gamma_5 \tau^a u_n(p_i) \quad (3.58)$$

一方(3.51)に(3.53)を代入すると

$$\langle p(p_f) | A_\mu^a | n(p_i) \rangle_{1\pi} = -\bar{u}_p(p_f) q_\mu M_N \frac{g_A(q^2)}{q^2} \gamma_5 \tau^a u_n(p_i) \quad (3.59)$$

従って上の2つの式(3.58)と(3.59)を比較して、

$$\frac{g_{\pi NN}}{M_N} = \frac{g_A}{f_\pi} \quad (3.60)$$

を見いだす。これが有名なGolberger-Treimanの関係式である。実験値

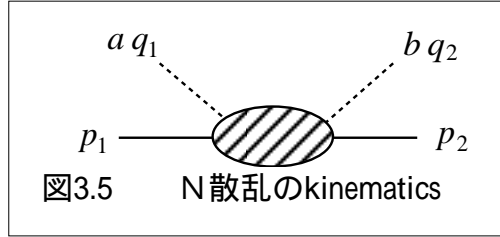
$$g_{\pi NN} = 13.7, \quad g_A = 1.25, \quad M_N = 938 \text{ MeV}, \quad f_\pi = 93 \text{ MeV} \quad (3.61)$$

をあてはめてみると、10%以下の精度で成り立っていることがわかる。この関係式は中間子と核子の理論（模型）を扱うときに、カイラル対称性を満足する結果になっているかどうかを確かめるのに非常に有用な関係式である。 $g_{\pi NN}$  が の結合定数、 $f_\pi$  が（場）の強さであると考え、ガウスの法則と対比しているとみると面白い。 がゼロ質

量の場合のaxial flux（電気力線に対応）の保存を表している。

### (3) ソフトパイオン定理

最後に、低エネルギー定理の中でももっとも重要なTomozwa-Weinberg定理を紹介し、N散乱を調べる。下の図のように運動量を定義する。



散乱振幅  $\langle \pi^b(q_2)N(p_2) | \pi^a(q_1)N(p_1) \rangle$  に関して簡約公式（reduction formula）を用いると、次のように書ける：

$$I = \langle \pi^b(q_2)N(p_2) | \pi^a(q_1)N(p_1) \rangle \sim \int d^4x d^4y e^{-iq_1x} e^{+iq_2x} \langle N(p_2) | T \pi^b(x) \pi^a(y) | N(p_1) \rangle \quad (3.62)$$

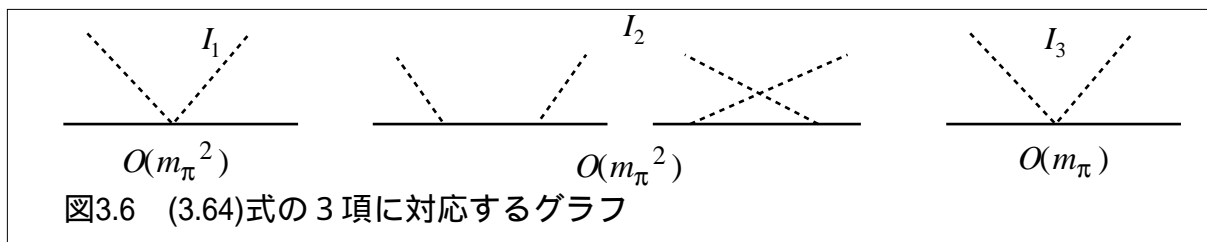
最後の項にPCACの関係式(3.49)を用いると、

$$I \sim \int d^4x d^4y e^{-iq_1x} e^{+iq_2x} \langle N(p_2) | T \partial^\mu A_\mu^b(x) \partial^\nu A_\nu^a(y) | N(p_1) \rangle \quad (3.63)$$

を得る。ここで、微分をT積の外に出し適当に部分積分を実行すると、3つの項の和に書ける：

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \\ I_1 = - \int d^4x d^4y e^{-iq_1x} e^{+iq_2y} \delta(x_0 - y_0) \langle N(p_2) | [A_0^b(x), \partial^\nu A_\nu^a(y)] | N(p_1) \rangle \\ I_2 = - \int d^4x d^4y e^{-iq_1x} e^{+iq_2y} \partial_x^\mu \partial_y^\nu \langle N(p_2) | [A_0^b(x), A_\nu^a(y)] | N(p_1) \rangle \\ I_3 = -i \int d^4x d^4y e^{-iq_1x} e^{+iq_2y} q^\mu \delta(x_0 - y_0) \langle N(p_2) | [A_0^b(x), A_\mu^a(y)] | N(p_1) \rangle \quad (3.64)$$

それぞれの項をグラフで表すと次のようになる



$I_1$ と $I_3$ には関数があるので、同一時刻で相互作用が起こる。 $I_2$ はボルン項である。図にはそれぞれの項の小さな $m_\pi$ に関する次数を記した。大ざっぱに言って、 $I_1$ はPCACの関係 $\partial^\nu A_\nu^a(y) \sim m_\pi^2$ より $O(m_\pi^2)$ であることがわかる。ボルン項はあからさまに計算することによって $O(m_\pi^2)$ を示すことができる。その際、直接項と交換項で主要項の相殺機構が働く。同じボルン項を計算しているにもかかわらず、この結論は2.4節の結果、例えば(2.27)と異なっていることに注意しなければならない。すなわち、(2.27)では散乱振幅の次数は $O(1)$ であった。この矛盾は4.6節で説明される。最後に、 $I_3$ の項が $O(m_\pi)$ の主要項として残る。これがTomozwa-Weinberg項である。2つの軸性カレントの交換によって、アイソスピン (vector) カレントの行列要素が残る。それは核子のアイソスピン行列であらわされる。核子アイソスピン行列は中間子のアイソスピン行列要素とまとめ最終的に次のような簡単な形にまとめることができる：

$$T = -i \frac{2}{f_\pi^2} I_\pi \cdot I_N, \quad I_N = \frac{\tau}{2}, \quad (I_\pi^a)_{bc} = i\varepsilon_{abc} \quad (3.65)$$

この公式は、アイソスピン1/2の核子を標的とする中間子の散乱の場合について成り立つが、一般のアイソスピンを持つ標的の場合に拡張することができる。

最後に、この公式から得られる散乱長を求めてみると、

$$\begin{aligned} a &= -\frac{m_\pi}{8\pi f_\pi^2} \left(1 + \frac{m_\pi}{M}\right)^{-1} 2I_\pi \cdot I_N \\ &= -\frac{m_\pi}{8\pi f_\pi^2} \left(1 + \frac{m_\pi}{M}\right)^{-1} [I(I+1) - I_N(I_N+1) - 2] \end{aligned} \quad (3.66)$$

となることが確かめられる。ここで $I_N = 1/2$ 、 $I = I_\pi + I_N = 1/2$  or  $3/2$ である。従って $a_1 = 0.2 m_\pi^{-1}$ 、 $a_3 = -0.1 m_\pi^{-1}$ 。これは実験値 $a_1 = 0.173 m_\pi^{-1}$ 、 $a_3 = -0.101 m_\pi^{-1}$ とよく合っている。



## 4 線形 模型

前章では、ラグランジアンを用いず、カイラル対称性の交換関係（カレント代数）を用いた方法を紹介した。この方法は一般的な議論が展開できるという利点を持つ一方、具体的なイメージに欠け、直感的に理解しにくい。この章と次の章ではこれに対し、そこで得られた結果を再現することのできる（有効）ラグランジアンを用いる方法を紹介する。有効ラグランジアンはハドロンの場で書かれ、物理量はそこからファインマン則を使って計算することができる。この章では線形 模型について解説する。具体的に Wigner相と南部 - Goldstone相がどのように実現されているかをみる。

### 4.1 場

まず線形 模型をどのように構成するのか、その方法について考える。基本的な考え方は次のようである：

- 1 . 適当な場 ( $\psi, \sigma, \pi \dots$ ) を用意する。それらは、カイラル群  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  の線形表現に属するものとする。表現の次元は可能な低いものから考えていく。
- 2 . ラグランジアンはこれらの場の変数によって、カイラル変換に対して不変な組み合わせで書けるとする。

1 の条件に従って、次元の低い以下の3つのカイラル表現を考えてみる：

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}, 0) : \text{right fermion, } (0, \frac{1}{2}) : \text{left fermions} \dots \text{基本表現} \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : \text{chiral four-vector mesons} \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで、3.2節の最後で注意した点をふたたび指摘しておく。表現  $(\frac{1}{2}, 0)$  はカイラル変換  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  のもとで、 $SU(2)_R \sim \text{Isospin } 1/2$ ,  $SU(2)_L \sim \text{Isospin } 0$  の様にふるまう場、表現  $(0, \frac{1}{2})$  は、 $SU(2)_R \sim \text{Isospin } 0$ ,  $SU(2)_L \sim \text{Isospin } 1/2$  の様にふるまう場である。すなわち、カイラル群の右(R)、左(L)という命名は、ローレンツ群の右巻き（正のカイラリティ）、左巻き（負のカイラリティ）という概念とは独立だということである。

(4.1)のカイラル4ベクトルメソン  $B_\alpha$  は、基本表現  $(\frac{1}{2}, 0) \sim \psi_R$ ,  $(0, \frac{1}{2}) \sim \psi_L$  を用いて、以下の規則によって関係づけられている

$$B_\alpha \equiv \bar{\psi}_R \tau_\alpha \psi_L \quad (4.2)$$

すると、基本表現の変換性(3.13)から

$$\text{ベクトル変換に対して} \quad \begin{cases} B_0 & \longrightarrow & B_0 \\ \vec{B} & \longrightarrow & \vec{B} + \vec{v} \times \vec{B} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{軸性ベクトル変換に対して} \quad \begin{cases} B_0 & \longrightarrow & B_0 + i \vec{a} \cdot \vec{B} \\ \vec{B} & \longrightarrow & \vec{B} + i \vec{a} B_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

を示すことができる。(4.3)はアイソスピン回転、(4.4)はカイラルブーストである。関係式(4.2)を行列で表すと便利なおことがある：

$$B = \sum \frac{\tau^\alpha}{2} (\bar{\Psi}_R \tau^\alpha \Psi_L) = \Psi_L \bar{\Psi}_R \longrightarrow U \quad (4.5)$$

ここで  $B$  は  $2 \times 2$  の行列で、対応する量はしばしば記号  $U$  を使うことがある。

(4.3)で定義されたフェルミオンの双一次形式(メソン)は、固有のパリティをもっていない。 $\bar{\Psi}_R \tau_\alpha \Psi_L$  はパリティ変換  $\Psi_L \longleftrightarrow \Psi_R$  に対して、

$$\bar{\Psi}_R \tau_\alpha \Psi_L \xrightarrow{\text{Parity}} \bar{\Psi}_L \tau_\alpha \Psi_R \quad (4.6)$$

と変換してもとには戻らないからである。そこで、線形結合を作ることによってパリティの良い量を作ることにする：

$$S_\alpha = \bar{\Psi}_R \tau_\alpha \Psi_L + \bar{\Psi}_L \tau_\alpha \Psi_R = \bar{\Psi} \tau_\alpha \Psi : \quad \text{正のパリティ} \quad (4.7a)$$

$$P_\alpha = -i(\bar{\Psi}_R \tau_\alpha \Psi_L - \bar{\Psi}_L \tau_\alpha \Psi_R) = i\bar{\Psi} \tau_\alpha \gamma_5 \Psi : \quad \text{負のパリティ} \quad (4.7b)$$

ここで2番目の組み合わせに虚数単位  $i$  を付したのは、実の量にするためである。カイラル変換に対するこれらの変化は以下ようになる：

$$\text{アイソスピン:} \quad \begin{cases} S_0 & \longrightarrow & S_0 \\ \vec{S} & \longrightarrow & \vec{S} + \vec{v} \times \vec{S} \end{cases}, \quad \begin{cases} P_0 & \longrightarrow & P_0 \\ \vec{P} & \longrightarrow & \vec{P} + \vec{v} \times \vec{P} \end{cases} \quad (4.8a)$$

$$\text{軸性:} \quad \begin{cases} S_0 & \longrightarrow & S_0 + \vec{a} \cdot \vec{P} \\ \vec{S} & \longrightarrow & \vec{S} + \vec{a} P_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} P_0 & \longrightarrow & P_0 - \vec{a} \cdot \vec{S} \\ \vec{P} & \longrightarrow & \vec{P} - \vec{a} S_0 \end{cases} \quad (4.8b)$$

このことから、 $S_0^2 + \vec{P}^2$  と  $P_0^2 + \vec{S}^2$  はカイラル変換のもとで不変なカイラルスカラーであることがわかる：

$$S_0^2 + \vec{P}^2, \quad P_0^2 + \vec{S}^2 : \text{Invariant} \quad (4.9)$$

これまでに、カイラル 4 ベクトルとローレンツ 4 ベクトルの類似性に気付いていたはずである。実際にローレンツ群  $SL(2, C)$ 、カイラル群  $SU(2) \times SU(2)$  はともに  $O(4)$  に同型である<sup>1)</sup>。

## 4.2 ラグランジアンと真空の構造

はじめに、メソンのみの線形 模型を考える。要請はカイラル、ローレンツ、パリティ不変のほかに、微分項は 2 次まで、各々項は質量の次元で 4 次までを考えることにする。カイラル不変の組み合わせは(4.9)の 2 つの可能性が考えられるが、(擬スカラー) がアイソベクトルであることを考え、 $S_0^2 + \vec{P}^2$  の組み合わせを採用する。通常  $(S_0, \vec{P})$  を  $(\sigma, \vec{\pi})$  と書く。これが 模型と呼ばれるゆえんである。以上のことから、次のラグランジアンをユニークに書き下すことができる

$$L_\sigma = \frac{1}{2} \left( (\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\pi})^2 \right) - V(\phi^2) . \quad (4.10)$$

ここでポテンシャル  $V(\phi^2)$  はカイラル不変量  $\phi^2 = \sigma^2 + \vec{\pi}^2$  の関数で、

$$V(\phi^2) = \frac{\mu^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (4.11)$$

である。パラメータ  $\lambda$  は理論の安定性から正でなければならない。一方、質量パラメータ  $\mu^2$  は正にも負にもなり得る。

### 真空の構造

系の真空は、適当な仮定のもとでポテンシャルの最低点であることがわかる。一見当たり前のようであるが、若干この点を説明しておく。系の古典的な(ツリーレベルの)真空(エネルギー最低点)は、ハミルトニアン

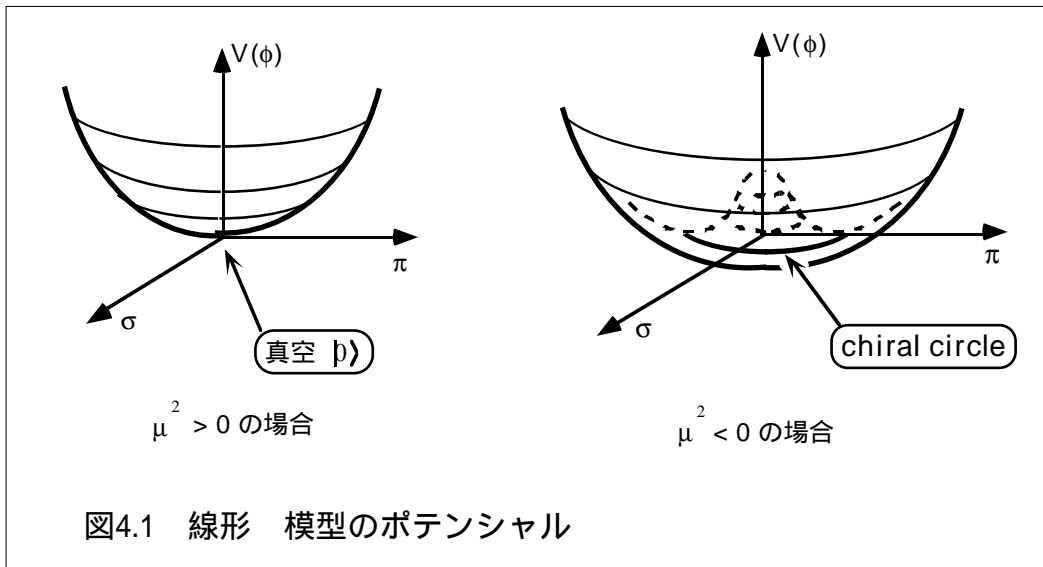
$$H = \frac{1}{2} p_\alpha^2 + \frac{1}{2} (\partial_i \phi_\alpha)^2 + V(\phi) , \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_\alpha} = \dot{\phi}_\alpha \quad (4.12)$$

を最小にする場の配位によって決められる。ハミルトニアンの最低値とポテンシャルの最低値を与える配位は、時間依存性のない(静的)、また空間依存性のない(一様)場合に一致する。もし一様でない配位が許されたとすると、ここで考えるものとは異なった真空を考えることができる。

さて、ポテンシャルは  $\mu^2$  の符号によって特徴的な形をとる。 $\mu^2 \leq 0$  の場合のポテン

<sup>1)</sup>  $0.1 m_\pi^{-1}$  や  $10 m_\pi^{-1}$  は  $O(4)$  空間のベクトルの長さの 2 乗である。

シャルの形を次の図に示す。これらの形に応じて、真空の、またそれに伴う粒子スペクトルの構造が変わる。



$\mu^2 > 0$  の場合

真空（ポテンシャルの最も低い点） $|0\rangle$ は原点である：

$$|0\rangle \rightarrow (\sigma, \vec{\pi}) = (0, \vec{0}) \quad (4.13)$$

カイラル変換(4.8)に対してこの配位が不変であることは自明である。カイラル対称性を持つ真空（相）であり、これをWigner相と言う。次に説明する揺らぎの計算法を使えば、このとき出現する粒子、 $\rho$  と  $\pi$  は縮対していることを直ちに確かめることができる。

$\mu^2 < 0$  の場合

ポテンシャルの最小点は

$$\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (4.14)$$

を満たすカイラルサークル（図4.1右）上で無限に縮退し、これらのどの点もが真空になり得る。そこで、ひとまずカイラルサークル上の任意の1点を選び、それを真空と定義する。ところが、真空のパリティは正で、擬スカラーの  $\pi$  が凝縮することはないので、いま真空に選んだ点と原点を結ぶ方向を  $\sigma$  軸と再定義する（スカラー量  $\sigma$  は凝縮しても構わない）。このとき、 $\pi$  軸はそれに直交する方向にとられる。こうして、

$$|0\rangle \rightarrow \left( \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}, \vec{0} \right) \equiv (f_\pi, \vec{0}) \quad (4.15)$$

を真空と決める。この点はカイラル変換によってカイラルサークル上の別の点に移ってしまい、もはや不変ではない。もう少し詳しく述べると、アイソスピン変換(4.8a)に対しては不変であるのに対して、軸性変換(4.8b)に対して不変でない。カイラル対称性はその部分群であるアイソスピン対称性を残して、軸性対称性が自発的に破れるのである。これを表記的に  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SU(2)$ 、もしくは変換の種類をあらわに書いて

$$SU(2)_R \times SU(2)_L \rightarrow SU(2)_V \quad (4.16)$$

と記す。このとき、真空は南部 - Goldstone相にあるという。

この真空の周りの微小振動モードは、動径方向（ 方向）とカイラルサークル内を移動するモード（ 方向）とに分かれる。 のモードはポテンシャル壁を登っていくので、有限質量の 粒子が励起されることになる。一方、それに直交する のモードはエネルギーを必要としないモードであり、すなわち質量ゼロの粒子が励起される。これが南部 - Goldstone粒子である。

### 揺らぎの計算

真空の周りの揺らぎを  $\chi = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3)$  と表し、場の量を

$$\phi = \phi_{\text{vac}} + \chi \quad (4.17)$$

と書くことにする。これをラグランジアンに代入し  $\chi$  の 2 次のオーダーまでとると

$$V(\phi_{\text{vac}} + \chi) = V(\phi_{\text{vac}}) + \chi_\alpha \partial^\alpha V(\phi_{\text{vac}}) + \frac{1}{2} \chi_\alpha \chi_\beta \partial^\alpha \partial^\beta V(\phi_{\text{vac}}) + \dots \quad (4.18)$$

を得る。一般の計算では、次のような技巧を使うと便利なおことがある。すなわち、

$$V(\phi), \quad \phi = \sqrt{\phi_0^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2} \quad (4.19)$$

に対して、

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha V(\phi) &= \frac{\partial \phi}{\partial \hat{\phi}_\alpha} V'(\phi) = \frac{\hat{\phi}_\alpha}{\phi} V'(\phi) \equiv \hat{\phi}_\alpha V'(\phi) \\
\partial_\alpha \partial_\beta V(\phi) &= \partial_\beta (\hat{\phi}_\alpha V'(\phi)) = \frac{P_{\alpha\beta}}{\phi} V'(\phi) + \hat{\phi}_\alpha \hat{\phi}_\beta V''(\phi) \\
P_{\alpha\beta} &\equiv \delta_{\alpha\beta} - \hat{\phi}_\alpha \hat{\phi}_\beta, \quad P_{\alpha\beta} \hat{\phi}_\alpha = P_{\alpha\beta} \hat{\phi}_\beta = 0
\end{aligned} \tag{4.20}$$

の関係を用いる。(4.10)のラグランジアンに  $\phi_{\text{vac}} = (f_\pi, 0, 0, 0)$  を代入して、対称性が破れた場合に計算を進めると

$$L_\sigma \sim \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} V''(\phi_{\text{vac}}) \chi_0^2 \tag{4.21}$$

すなわち、 $\chi_0$  のみが質量をもち  $\chi$  は質量を持たないことを確かめることができる。

### 4.3 フェルミオン場

次にフェルミオン（核子やクォークなど）を含む 模型を考えよう。基本的な考え方はこれまでと同様で、適当なカイラル表現に属している場の量から、スカラー量を構成するのである。フェルミオンの場として、基本表現(4.1)を仮定すれば、それからカイラル 4 ベクトル( $\bar{\psi}\psi$ ,  $i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi$ )を作ることができる。中間子との相互作用としては同じカイラル 4 ベクトルに属する( $\sigma, \vec{\pi}$ )とのスカラー積を作ればよい：

$$\sigma\bar{\psi}\psi + \vec{\pi} \cdot i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi = \bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)\psi \tag{4.22}$$

従って、フェルミオンとボソンの線形 模型として

$$L = i\bar{\psi}\partial\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\vec{\pi})^2] - V(\phi) \tag{4.23}$$

がユニークに求まる（質量次数は 4 次まで）。フェルミオン  $\psi$  を含む項が

$$i\bar{\psi}_L\partial\psi_L + i\bar{\psi}_R\partial\psi_R - g\bar{\psi}_L(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\psi_R - g\bar{\psi}_R(\sigma - i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\psi_L \tag{4.24}$$

と書かれることに注意すれば、R, Lの変換について不変であることも直ちにわかる。

Wigner相においては、フェルミオンの質量はゼロである。一方南部 - Goldstone相では

$$g\sigma\bar{\psi}\psi \rightarrow gf_\pi\bar{\psi}\psi \tag{4.25}$$

なので、フェルミオンは質量

$$M = gf_\pi \quad (4.26)$$

を獲得することになる。これは一般に質量を生成する機構の一つである。(4.24), (4.25)の形から、これはDirac質量項である。さらにこれはGolberger-Treimanの関係式で軸性結合定数 $g_A$ が1の場合の関係式にもなっている。一般に対称性の破れた世界では $g_A$ は任意の値をとりえるが、フェルミオンの属するカイラル表現を決めることによって $g_A$ の値が決まってくる。今の場合、フェルミオンは基本表現に属していると仮定していた。

$\sigma$ が真空でゼロでない期待値をとるということは、ミクロにはフェルミオン - 反フェルミオン対 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \langle\psi_R^\dagger\psi_L + \psi_L^\dagger\psi_R\rangle$ が凝縮し有限の期待値を持っていると考えることができる。右辺の表式からカイラリティ-RL対称性の破れをみることができる。また、このRL対称性を破った凝縮がDirac質量を生成する。1粒子のDirac質量項は必然的にカイラル対称性を破るのである<sup>1)</sup>。同様なフェルミオン凝縮は $\psi\psi$ の形で実現する場合がある。このときにもダイナミカルに質量が生成される。これをMajorana質量(通常ギャップ)とよぶ。Majorana質量項は $\langle\psi\psi\rangle = \langle\psi_R\psi_R + \psi_L\psi_L\rangle$ なので、この項が存在すると、カイラル対称性を破るだけでなく、そもそもフェルミオン数とアイソスピン自体が保存されなくなる。

#### 4.4 N散乱の相殺機構

この節では、線形 模型のラグランジアンを用いて N散乱を調べてみよう：

$$L = i\bar{\psi}\partial\psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\tau\cdot\pi\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2] - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2 - f_\pi^2)^2 \quad (4.27)$$

まず、以下の点に着目しておく。

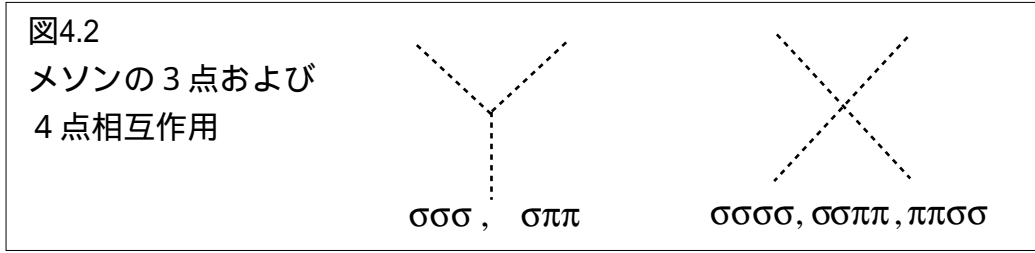
(1) 質量生成の機構が、 と核子の両方に機能している：

$$m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2 \quad M = gf_\pi \quad (4.28)$$

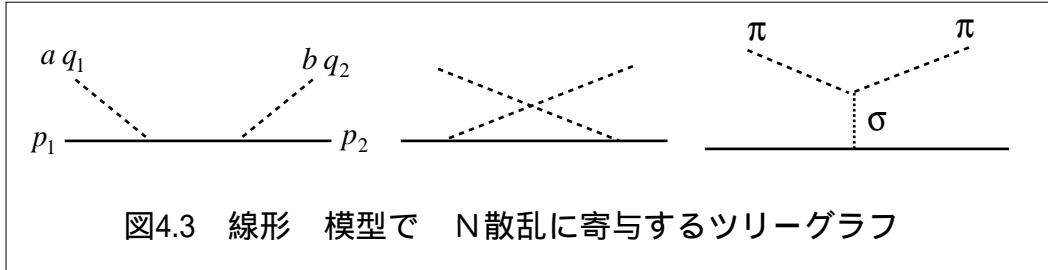
(2) ポテンシャル項を展開し、メソン3点及び4点項を見いだす：

---

<sup>1)</sup> もし粒子が2つあり、それぞれのカイラリティ成分に対して、逆のカイラル変換を課すことができれば、カイラル対称な質量項を粒子1, 2の結合として導入することができる。



このことから、N散乱にはツリーレベルで図4.3に示す3つの項が寄与することがわかる：



特に最後の項は、以前の2.4節の計算では出てこなかったものであり、カイラル対称性を満足する理論ではじめて出てくる項である。その寄与は

$$(3rd\ term) = 2g\bar{u}u \frac{i}{q^2 - m_\sigma^2} \lambda f_\pi \rightarrow -g^2 \frac{i}{M} \tag{4.29}$$

となる。ここで  $k \rightarrow 0$ 、そして(4.28)の初めの関係式を使った。ところが、これは(2.27)で計算したボルン項の主要項を正確に打ち消す。結果として、2章で得た非現実的な大きな散乱断面積は、このカイラル対称性に基づいた相殺機構によって現実的な小さな値になるのである。

以上の計算で、カイラル対称性と関連した注意点をいくつか説明する。

(1) 2.4節ではボルン項を計算する際に、相互作用項として擬スカラー結合

$$L_{PS} = i\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\psi \tag{4.30}$$

を使った。場 $\psi$ をエネルギー固有値で展開すると

$$\psi(x) = \sum_{E_n>0} u_n(\vec{x})\exp(-iE_n t)b_n + \sum_{E_m<0} v_m(\vec{x})\exp(+iE_m t)d_m \tag{4.31}$$

となるが、相互作用  $L_{PS}$  ではエネルギーの符号を変える行列要素  $\langle m|L_{PS}|n\rangle$  が主要項で、同じエネルギー間の行列要素  $\langle n|L_{PS}|n\rangle$  等は速度  $v \sim p/E$  のオーダーで抑制される。ボルン項をこれらのエネルギー状態で展開し詳しく書いてみると、



$$\begin{aligned}
\langle n | \text{Born term} | n \rangle &\sim \langle n | i\bar{\psi}\gamma_5\bar{\tau} \cdot \bar{\pi}\psi \cdot i\bar{\psi}\gamma_5\bar{\tau} \cdot \bar{\pi}\psi | n \rangle \sim \bar{u}_n\gamma_5 \langle 0 | T(\psi\bar{\psi}) | 0 \rangle \gamma_5 u_n \\
&\sim \bar{u}_n(x)\gamma_5 \int \frac{d\omega}{2\pi} \left( \frac{u_n(x)\bar{u}_n(y)}{\omega - E_n + i\epsilon} + \frac{v_m(x)\bar{v}_m(y)}{\omega + E_m - i\epsilon} \right) \gamma_5 u_n(y) \\
&\sim \int \frac{d\omega}{2\pi} \left( \frac{\bar{u}_n(x)\gamma_5 u_n(x)\bar{u}_n(y)\gamma_5 u_n(y)}{\omega - E_n + i\epsilon} + \frac{\bar{u}_n(x)\gamma_5 v_m(x)\bar{v}_m(y)\gamma_5 u_n(y)}{\omega + E_m - i\epsilon} \right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

ここで、プロパゲータのエネルギー展開の表式を使った。 $\gamma_5$ がDiracスピノルの上、下成分を結ぶ行列なので、最後の式の主要項は負エネルギーが寄与する第2項であることがわかる。結果として振幅の次数は $O(1)$ となってしまう。

(2) 3.6節では相互作用項として軸性結合

$$L_{PV} = \frac{1}{2f_\pi} \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\bar{\tau} \cdot \partial^\mu\pi\psi \tag{4.33}$$

を使った。ここではこのことはあからさまに示されなかったが、低エネルギー定理から導かれる結合の型である。詳しくは次の章で議論する。非相対論的極限のとき、この相互作用の主要項は空間 ( $\mu = 1, 2, 3$ ) 部分で、行列要素の主要な項は同じエネルギー間の要素  $\langle n | L_{PV} | n \rangle$  である。ところが、この行列要素  $\langle n | L_{PV} | n \rangle$  はの運動量をあからさまに含むので、 $\langle n | L_{PV} | n \rangle \sim O(q)$ 、エネルギー分母もやはり  $O(q)$ 。従ってボルン項の各々は  $(\langle n | L_{PV} | n \rangle)^2 / (\text{Energy denominator})$  より、 $O(q)$  のオーダー。ところが、直接項と交換項の間で相殺が起こり、結果としてボルン項の次数は  $O(q^2)$  となる。

(3) NN結合としてPS型とPV型を用いる場合、核子の正エネルギー状態の行列要素は、どちらのスキームも非相対論の極限でいわゆる  $\bar{\sigma} \cdot \vec{q}$  型の相互作用になる(2.4節)。

以上のことから、PS型の結合を用いると、フェルミオン(核子など)の中間状態が関与する過程には負エネルギー状態がきいてきて、低エネルギー定理に抵触する結果に導かれることがある。PS型の結合は線形モデルの結合のため、そこには、を経由するグラフが同じ過程に寄与することで、問題となる項を相殺してくれる。これに対してPV型の結合では中間状態に負エネルギー状態が関与するグラフはもとより高次項のためこのような相殺機構を必要とせず、低エネルギー定理の結果を再現する。いずれにしても、正しい結果はカイラル対称性によって保証されている。計算過程が違うだけである。

## 5 非線形 模型

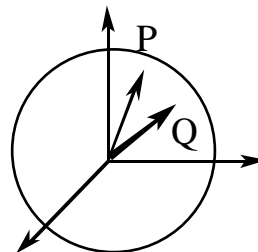
### 5.1 座標変換

線形 模型では、カイラル群の線形表現を構成するために、もっとも簡単な可能性の一つとしてカイラル $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 表現と対応する粒子として  $\rho$  を考えてきた。ところが、実験的には  $\rho$  の存在は今なお議論が続いているため、しばしばその存在を仮定せずにカイラル理論を構成する手法がとられる。これが非線形 模型である。粒子は 散乱における  $l = S = 0$  チャンネルの非常に幅の広い共鳴状態として現れる。2002年度版の Review of Particle Physics には  $f_0(600)$  or  $\sigma$  として数ページのコメントともに掲載されている [15]。

非線形 模型の構成の仕方はいくつか方法があるが、ここでは、直感的にもっとも分かりやすいと思われる、幾何学的方法を採用することにする。線形 模型で必要となる4つの変数 $(\sigma, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ は、4次元ユークリッド空間内の点に対応させることができる。カイラル変換はこの点を、この点を含む半径  $f = \sqrt{\sigma^2 + \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}$  の球面上の別の点に移す変換になっている： $O(4)$ 回転。そこで、この回転を表現するには4つの直交座標成分全てが必要ではなく、点の位置を表す角度（この場合には3つ）で十分である。この3つの角度に対応するのがパイオンである。

以上の考察をより簡単な場合について見てみる。すなわち、3次元空間内に半径1の球を考える（図5.1）。

図 5.1  
半径1の球面とその上の2点



回転に対して点  $P(x, y, z)$  が別の点  $Q(x', y', z')$  に移るとき、微小変換は

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 & 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

で表される。ここで $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ は無小回転のパラメータである。当然のことながら変化分はもとの量 $(x, y, z)$ の線形関数で表されていて、これは線形変換になっている。次にこの回転を表現するのに、角度を用いてみよう。そのために極座標

$$x = \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \cos\theta \quad (5.2)$$

を用いて、この変化を表すと、簡単な計算の後に、

$$\begin{pmatrix} \delta\theta \\ \delta\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \varepsilon_1 - \cos\varphi \varepsilon_2 \\ \cot\theta \cos\varphi \varepsilon_1 + \cot\theta \sin\varphi \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

となることを確かめることができる。右辺はもとの量 $(\theta, \varphi)$ の非線形な関数（ $\sin\varphi$ 等）で表されていて、このゆえに回転の非線形表示になっている。

同様の考察を4次元空間に拡張する。デカルト座標の4成分 $\phi^\mu \sim (\sigma, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ に対して、例えば、次の極座標表示を導入することができる：

$$\begin{aligned} \sigma &= f \cos\theta_1, \\ \pi_1 &= f \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3, \\ \pi_2 &= f \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3, \\ \pi_3 &= f \sin\theta_1 \cos\theta_2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

次の問題は、ラグランジアンを $(\sigma, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ の関数から、 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の関数に書き換えることである。そのために球面上のメトリックを用いることができる。運動項は

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^\alpha)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_m \frac{\partial \theta_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial \theta_m} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{m,n} g_{mn}(\theta) \frac{\partial \theta_m}{\partial x_\mu} \frac{\partial \theta_n}{\partial x_\mu} \end{aligned} \quad (5.5)$$

のようにかくことができる。この式は一般的で(5.4)以外の角度の取り方にも適用できる。ここで導入したメトリック $g_{mn}(\theta)$ は、角度変数 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の選び方によって色々な表現が可能で、例えば、

$$g_{mn}(\theta) = \delta_{mn} + \frac{\theta_m \theta_n}{f_\pi^2 - \theta^2} \quad (5.6)$$

とすれば、

$$L = \frac{f_\pi^2}{2} \left[ (\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\theta})^2 \right], \quad \sigma = \sqrt{1 - \theta^2} \quad (5.7)$$

となる。他にしばしば用いられるメトリックは

$$g_{mn}(\theta) = \frac{\theta_m \theta_n}{\theta^2} + \left( \frac{\delta_{mn}}{\theta^2} - \frac{\theta_m \theta_n}{\theta^4} \right) \sin^2 \theta \quad (5.8)$$

で、このときにはラグランジアンは SU(2) の行列  $U = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\theta})$  を用いて、

$$L = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U U^\dagger \partial^\mu U U^\dagger = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \quad (5.9)$$

のように簡潔に表わされる。(5.7), (5.9) や他の表現は皆同等であるが、とりわけ (5.9) の形がしばしば用いられる。

後のため、 $U$ -field で表したカイラル変換、カレントを書いておく：

カイラル変換

$$\begin{aligned} \text{R or L: } U &\longrightarrow g_L U g_R^\dagger \\ \text{V: } U &\longrightarrow g_V U g_V^\dagger \\ \text{A: } U &\longrightarrow g_A U g_A \end{aligned} \quad (5.10)$$

カレント

$$\begin{aligned} V_\mu^a &= -\frac{if^2}{4} \text{tr} \tau^a [U^\dagger, \partial_\mu U] \sim \epsilon_{abc} \phi^b \partial_\mu \phi^c \\ A_\mu^a &= -\frac{if^2}{4} \text{tr} \tau^a \{U^\dagger, \partial_\mu U\} \sim f \partial_\mu \phi^a \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 5.2 フェルミオン場

すでに何度か見てきた次のラグランジアンから出発する：

$$\begin{aligned} L &= i\bar{\psi} \partial \psi - g\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5)\psi \\ &+ \frac{1}{2} \left[ (\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \vec{\pi})^2 \right] - V(\phi) \end{aligned} \quad (5.12)$$

前節 (5.9) の表示に基づいた変数

$$\begin{aligned} \sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} &\equiv f U, \quad U = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} / f_\pi) \\ \sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5 &\equiv f U_5, \quad U_5 = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} \gamma_5 / f_\pi), \end{aligned} \quad (5.13)$$

を導入する。すると、ラグランジアン (5.12) の相互作用項は次のように書くことができる：

$$\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5)\psi = f\bar{\psi}U_5\psi = f\bar{\psi}\sqrt{U_5}\sqrt{U_5}\psi \equiv f\bar{N}N \quad (5.14)$$

ここで、新しい変数

$$\begin{aligned}\xi_5 \psi &= N, \quad \psi = \xi_5^{-1} N \\ \sqrt{U_5} &= \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} \gamma_5 / 2f_\pi) \equiv \xi_5 \quad \left( \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} / 2f_\pi) \equiv \xi \right)\end{aligned}\quad (5.15)$$

を導入した。裸の場  $\psi$  に対して、 $N$  は衣を着た場ということができる。この  $N$  を使ってラグランジアン (5.12) を書き直すと、次のようになる：

$$L = i \bar{N} \xi_5^{-1} \partial (\xi_5^{-1} N) - gf \bar{N} N + \frac{f^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + V(f) \quad (5.16)$$

運動項の微分は  $N$  と  $\xi_5^{-1}$  の両方に作用することに注意して、計算を進めると

$$L_K = i \bar{N} \xi_5^{-1} \partial (\xi_5^{-1} N) = i \bar{N} \partial N + i \bar{N} \xi_5^{-1} (\partial \xi_5^{-1}) N \quad (5.17)$$

となる。右辺の第2項を、偶奇に分解する<sup>1)</sup>：

$$\begin{aligned}i \bar{N} \xi_5^{-1} (\partial_\mu \xi_5) \gamma^\mu N &= i \bar{N} \frac{1}{2} (\xi_5^{-1} (\partial_\mu \xi_5) + \xi_5 (\partial_\mu \xi_5^{-1})) \gamma^\mu N \\ &+ i \bar{N} \frac{1}{2} (\xi_5^{-1} (\partial_\mu \xi_5) - \xi_5 (\partial_\mu \xi_5^{-1})) \gamma^\mu N\end{aligned}\quad (5.18)$$

すなわち、第1項は  $\phi \gamma_5$  の偶数次（従って  $\gamma_5$  は消えてしまう）、第2項は  $\phi \gamma_5$  の奇数次の項から成り立っている。ここで、 から構成されるベクトル、軸性ベクトル場

$$\begin{aligned}v_\mu &= \frac{1}{2} (\xi_5^{-1} (\partial_\mu \xi_5) + \xi_5 (\partial_\mu \xi_5^{-1})) \\ a_\mu &= \frac{1}{2} (\xi_5^{-1} (\partial_\mu \xi_5) - \xi_5 (\partial_\mu \xi_5^{-1})) \gamma_5\end{aligned}\quad (5.19)$$

を導入する。これらは  $2 \times 2$  のトレースレスの行列である（従って3つのパウリ行列  $\tau^a$  で展開できる）。最終的にフェルミオン場を含んだ非線形表示のラグランジアンとして

$$L = i \bar{N} \partial N + i \bar{N} a \gamma_5 N - gf \bar{N} N + \frac{f^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + V(f) \quad (5.20)$$

を得る。ここで、共変微分

---

<sup>1)</sup> ここで  $\xi_5^{-1} (\partial \xi_5^{-1}) = \xi_5^{-1} \gamma_\mu \partial^\mu \xi_5^{-1} = \xi_5^{-1} \partial^\mu \xi_5 \gamma_\mu$  に注意する。最後の式に移るとき、 $\gamma_\mu$  と  $\xi_5^{-1}$  を交換することで、 $\xi_5^{-1}$  は  $\xi_5$  に変わる。

$$D_\mu = \partial_\mu - iv_\mu \quad (5.21)$$

を導入した。

### 5.3 変換則

ここで、変数 $\xi$ のカイラル変換則を見てもう一度確認することにする。この変数はもとのカイラル場 $U$ の平方根 (5.15) で定義された。そこで、再び $U$ の変換則を書いてみることにする：

$$U = \xi^2 \rightarrow g_L U g_R^\dagger = (g_L \xi) (\xi g_R^\dagger) \quad (5.22)$$

変換後の場 $U'$ がもとのように同じ要素の2乗

$$U' = (\xi')^2 \quad (5.23)$$

と書かれるためには、 $2 \times 2$ の行列 $h$ を導入して

$$\xi' = g_L \xi h^\dagger = h \xi g_R^\dagger \quad (5.24)$$

であれば良いことがわかる。ここで、 $h$ は $\xi$ と同じ次元のユニタリ行列で、この式 (5.24) によって、カイラル変換 $(g_R, g_L)$ ともとのパイオン場 $\xi$ の関数として書くことができる。アイソスピン変換 ( $g_R = g_L = g_V$ ) の場合に $h$ は特に簡単になり

$$h = g_V \quad (5.25)$$

である。アイソスピンベクトルのパイオン場そのもので表せば、パラメータを $\vec{\varepsilon}$ とする微小変換は

$$\delta \vec{\phi} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\phi} \quad (5.26)$$

となる。一方、軸性変換則は複雑で $h$ のカイラル無限小変換に対する形は

$$h \sim 1 + i \vec{\varepsilon} \times \vec{\phi} \cdot \vec{\tau} + \dots \quad (5.27)$$

とかけることが確かめられる。

## 5.4 群論的な考察、Callan-Coleman-Wess-Zumino (CCWZ) の方法<sup>[17]</sup>

前節の状況を群論の観点から考察してみると、非線形表示の数学的な意味と基礎付けを見ることができる。問題設定は、

「カイラル群  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  が自発的に破れアイソスピン対称性のみが残る。そのとき、破れた空間を parametrize するパイオンのダイナミクスを調べる。」

ということである。アイソスピン対称群はカイラル群  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  の対角部分群で

$$SU(2)_R \times SU(2)_L \rightarrow SU(2)_V \quad (5.28)$$

であり、パイオンは商空間

$$\pi \sim SU(2)_R \times SU(2)_L / SU(2)_V \quad (5.29)$$

をはるパラメータということができる。注意しないといけないのは、 $SU(2)_V$  はもとの対称群  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  の部分群であるが、一見  $SU(2)$  群の要素のように見えるパイオン場  $U$  は群の要素ではなく、商空間を表す変数だということである。

形式的な議論を進めていこう。カイラル群  $SU(2)_R \times SU(2)_L$  の生成子を

$$\tau_R^a \sim SU(2)_R, \quad \tau_L^a \sim SU(2)_L \quad (5.30)$$

と書いて、 $\tau_R^a$  と  $\tau_L^a$  の役割をうまく区別しながら計算しく必要がある。形式的には

$$\tau_a(R) \rightarrow \frac{1+\gamma_5}{2} \tau_a = P_R \tau_a, \quad \tau_a(L) \rightarrow \frac{1-\gamma_5}{2} \tau_a = P_L \tau_a \quad (5.31)$$

と書いて、通常の  $\tau_a$ 、 $\gamma_5$  行列の計算則に従えばよい。 $P_{R,L}$  が射影演算子になっていることを考えれば、直積群の代数をうまく行っていくことができる。すると、

$$\begin{aligned} \tau_V^a &= \tau_R^a + \tau_L^a = \tau^a \\ \tau_A^a &= \tau_R^a - \tau_L^a = \gamma_5 \tau^a \end{aligned} \quad (5.32)$$

となり、 $\tau_V^a = \tau^a$  は確かに  $SU(2)$  群の生成子であるが、 $\tau_A^a = \gamma_5 \tau^a$  の方は偶数、奇数乗の積によって  $\gamma_5$  が消えたり残ったりして、それ自体生成子になりえないことを意味している。

さて、群の一般的な性質を使いながら議論を進めていこう。一般的に群  $G$  を考え、そこには部分群  $H \in G$  があるとすると。このとき、剰余類の分類定理によれば、群  $G$  の任意

の要素  $g$  は、商空間  $\Pi = G / H$  の要素（代表元）  $a$  と部分群  $H$  の要素  $h$  を用いて

$$g = ha \quad (5.33)$$

のように一意に表すことができる。逆に、次のような言い方ができる。すなわち、商空間の元  $a_i$ （ $i$  は異なる  $a$  をラベルする添字）と  $h$  の積  $ha_i$  は、 $i$  が異なれば同じ要素ではあることはなく、また、それらの和集合

$$\{ha_1, ha_2, ha_3, \dots\} \quad (5.34)$$

によって  $G$  の全ての要素を表すことができる。

さて、 $\Pi = G / H \rightarrow SU(2) \times SU(2) / SU(2)$  を parametrize する

$$\xi_5(\phi) = \exp(i\vec{\phi} \cdot \vec{\tau}\gamma_5 / 2) \quad (5.35)$$

これは (5.34) の  $a_i$  に対応しているが、 $\xi_5(\phi)$  は連続変数  $\phi$  でラベルされている（従って元の個数は連続無限個ある）。ここで

$$\gamma_5 \tau_a = \tau_R^a - \tau_L^a = \tau_A^a \sim SU(2) \times SU(2) / SU(2) \quad (5.36)$$

であることから、確かに  $\xi_5$  が破れた商空間の量であることがわかる。しばしば、このことを前提にして  $\gamma_5$  を書かない、従って  $\xi_5$  の代わりに単に  $\xi = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\phi} / 2)$  と書くことが多い。しかしここではしばらく  $\gamma_5$  を含めていくことにする。

この  $\xi_5(\phi)$  に群  $G$  の変換を施した要素  $\xi_5(\phi) g^\dagger$  は再び群  $G$  の要素なので、上の剰余類の性質を使えば、ある代表元  $\xi_5(\phi')$  と  $h$  によって

$$\xi_5(\phi) g^\dagger = h(g, \phi)^\dagger \xi_5(\phi') \quad (5.37)$$

と表すことができる。ここで、右辺は (5.34) の  $ha_i$  に対応している（便宜上  $h$  ではなく  $h^\dagger$  と書いた）。さらに引数  $(g, \phi)$  によって、 $h^\dagger$  がもとの元  $\xi_5(\phi)$ 、すなわち  $\phi$  と、変換  $g$  の関数であることを示した。(5.37) は

$$\xi_5(\phi') = h(g, \phi) \xi_5(\phi) g^\dagger \quad (5.38)$$

と書けるが、これはパイオンの非線形変換  $\phi \rightarrow \phi'$  と見なすことができる。非線形表示によるカイラル変換をこのように表し、理論を構成していく方法は CCWZ (Callan-Coleman-Wess-Zumino) の方法として知られ、今日非線形 模型を表現するときに標準的に用いられる方法である。



次にフェルミオン場がある場合を考える。このとき、(5.15)によって非線形変換を受ける場  $N$  が定義できるが、それは  $h$  による非線形変換を受ける：

$$N = h(g, \phi)N \quad (5.39)$$

このとき、運動項とベクトル場は

$$\begin{aligned} i \bar{N} \partial N &\rightarrow i \bar{N} h^\dagger \partial (hN) = i \bar{N} h^\dagger (\partial h) N + i \bar{N} \partial N \\ v_\mu &\rightarrow h^\dagger v_\mu h - h^\dagger (\partial h) \\ a_\mu &\rightarrow h^\dagger a_\mu h \end{aligned} \quad (5.40)$$

の変換を受けることがわかる。従って、共変微分項と軸性結合項は各々が独立にカイラル不変であることがわかる：

$$i \bar{N} \mathcal{D} N \equiv i \bar{N} (\partial + \not{v}) N \rightarrow i \bar{N} \mathcal{D} N, \quad \bar{N} \not{a} \gamma_5 N \rightarrow \bar{N} \not{a} \gamma_5 N \quad (5.41)$$

従って、一般に非線形表示による 模型のラグランジアンは

$$\begin{aligned} L = & i \bar{N} \mathcal{D} N + i g_A \bar{N} \not{a} \gamma_5 N - g f \bar{N} N \\ & + \frac{f^2}{4} \text{tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \frac{1}{2} (\partial_\mu f)^2 + V(f) \end{aligned} \quad (5.42)$$

のように書けることになる。(5.20) との違いは軸性結合のパラメータ  $g_A$  が導入されている点である。線形 模型のラグランジアン (5.12) からスタートして変換  $N = \xi_5 \psi$  を行うと (5.20) が得られるが、そのとき  $g_A = 1$  という制限がついた。ところが、一般には共変微分項と擬ベクトル結合項は各々が独立にカイラル不変であるために、 $g_A$  の値は任意に選べるのである。カイラル対称性だけからは  $g_A$  の値は決まらない。

## 5.5 SU(3)

この節では SU(3) への拡張を考える。SU(2) から SU(3) になると、群の構造が複雑になる分取り扱いが面倒になるが、基本的な考え方は SU(2) の場合と同じである。すなわち、粒子の場は SU(3) の適当な表現に属するとして、それから、SU(3) 1 重項としてラグランジアンを構成していく。ここでは、非線形理論の場合を考察する。線形理論の場合については文献 [7] を参照されたい。

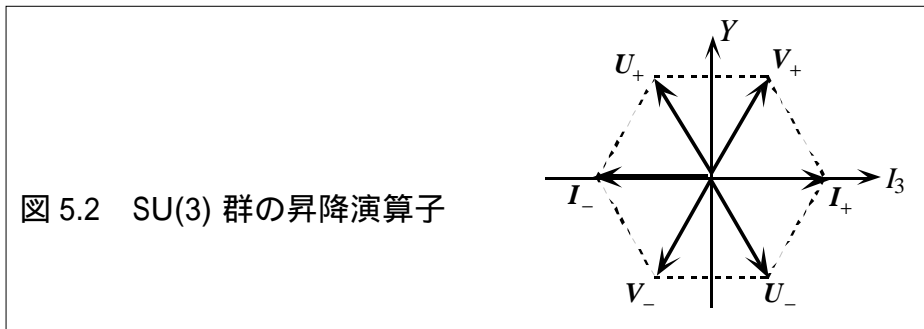
簡単に SU(3) の性質と関連したハドロオン場との関係を説明する。まず、SU(3) の要素は Gell-Mann 行列

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

を使って

$$U = \exp(i\theta_a \lambda_a), \quad \theta_a = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_8 \tag{5.44}$$

と表すことができる。フレーバーSU(3)の状態は量子数アイソスピンとストレンジネスによって分類され、2次元平面のいわゆるウエイトダイアグラムによって表現することができる。それは、アイソスピン（の第3成分） $I_3$ とハイパー電荷 $Y$ によってラベルすることができる。



状態はこの平面上の格子点に対応させることができ、これらの点の間を移動する昇降演算子を定義することができる（図 5.2）

$$I_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5), \quad U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \tag{5.44}$$

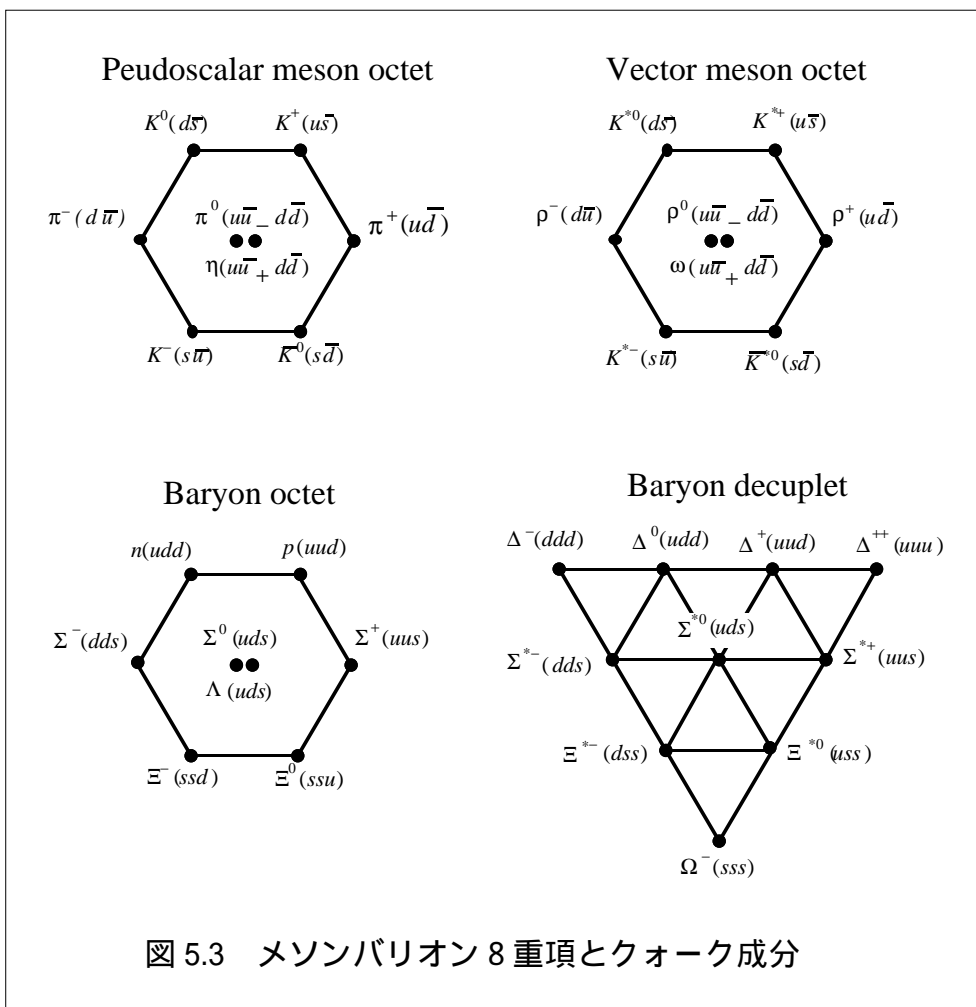
さて、メソン、バリオンともいわゆる 8 重項に属すると考えることができる（Gell-Mann の八道説）。QCD ではメソン 8 重項はクォーク - 反クォーク対の、バリオン 8 重項は 3 - クォークの表現の中に含まれる（図 5.3）：

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8, \quad 3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10 \tag{5.45}$$

まず、メソン場は次のように表される：

$$\begin{aligned}
& \pi^+ I_+ + \pi^- I_- + \pi^0 I_0 + K^+ V_+ + K^- V_- + K^0 U_+ + \bar{K}^0 U_- + \eta \frac{\lambda_8}{2} \\
& = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} & K^0 \\ K^- & K^0 & -\frac{\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \lambda_a \phi^a \equiv \phi \longrightarrow \exp(i\phi / f_\pi) \equiv U \quad (5.46)
\end{aligned}$$

メソン場は非線形表現のもとで指数関数の肩に乗り、フレーバーSU(3)の行列  $U$  を表現する。一方、バリオン場は



$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

である。ここで、 $p$ 、 $n$ 等はバリオンの4成分 Dirac spinor を表している。  
ラグランジアンはフレーバー 1 重項なので、既約分解の公式

$$\begin{aligned} 8 \times 8 &= 1 + 8 + 8 + 10 + 1\bar{0} + 27 \rightarrow 1 \\ (8 \times 8) \times 8 &= (1 + 8 + 8 + 10 + 1\bar{0} + 27) \times 8 \\ &\rightarrow 8 \times 8 + 8 \times 8 \rightarrow 1 + 1 \end{aligned} \quad (5.48)$$

を使う。2番目の式では、最終的に1重項ができる項のみ、すなわち初めの $8 \times 8$ の既約分解のうち $8+8$ の項のみをとってきた。すなわち、3つの8重項の積からは2通りの1重項が可能である。これらのことを考慮に入れば、メソンとバリオンのラグランジアンは、以下ようになる：

$$L = \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \text{tr}(\bar{B} i D B) + m_0 \text{tr} \bar{B} B + \frac{F}{2} \text{tr} \bar{B} \gamma_5 [\not{a}, B] + \frac{D}{2} \text{tr} \gamma_5 \{ \not{a}, B \} \quad (5.49)$$

第1項目はメソンのラグランジアン、第2項目は(5.21)で定義された共変微分による運動項、第3項目は質量項である。非線形表示のため、この質量項はカイラル不変である。第4、5項目はメソンとバリオンの湯川型相互作用を含む項で、2つの項が可能なのは(5.48)で1重項を作るのに2つの可能性があったことに対応している。交換、反交換の項はそれぞれ、F-項、D-項と呼ばれている。

## 6 スキルム 模型

講義ではカイラル対称性の関係したトピックスとして、スキルム模型を解説した。すでに40年以上も前にスキルムが提案した模型である。今日、ハドロンの構成要素はクォーク（フェルミオン）であることが知られている。クォークから全てのハドロンの構成される。当時このことが知られていなかった時に、スキルムは逆の発想に基づいて、メソン（ボソン）がバリオン（フェルミオン）を作り出す方法を提案したのである [18]。場の理論のソリトン解がその核をなす。このアイデアが、今後のハドロン物理の中でどのように位置づけられていくのかは必ずしも明確ではないが、自発的対称性の破れによって生じるパイオンが核子を作るというのは、非常に面白い視点であるとともに、今日なお新鮮な見方を与えてくれるのではないかと思う。特に、対称性の回復にともないパイオンの性質が変わるときに、核子の性質がどのように変わるかを教えてくれるかもしれない。80年代の半ばを中心に、非常に多くの事柄が研究された。ここでは、基本的なアイデアを紹介する。

### 6.1 トポロジカルな考察

スキルムは、QCDが定式化される以前に、メソン（ボソン）とバリオン（フェルミオン）を統一的に記述しようと試みた [18]。常識的には、ボソンは整数スピン、フェルミオンは半整数スピンの持つので、フェルミオンを基本粒子とし、ボソンはそれらの複合体と考えるのが自然である。しかしスキルムは、古典的な対応を自然に考えることのできるボソンを、基本的なものと考えた。その理由として、フェルミオンは、古典的にはGrassmann数という奇妙なものと考えられたからである。それではメソンを基本粒子とした場合、どのようにバリオンが構築できるのだろうか。有限個のパイオンの重ね合わせでは不可能である。なぜなら、バリオンの半整数スピンを有限個の整数スピンから生成することはできないからである。しかし無限級数のような非摂動的効果によって生成できるかもしれない。スキルムは、空間1次元の研究から、ソリトンとよばれる場の理論における非自明な古典解が、粒子（すなわちバリオン）に似た性質を持つことを知っていた。そこで、空間3次元の場合に、ソリトン解を持つような場の理論を考えるに至った。

核子のように、絶対的に安定な解が存在するためには、いくつか条件が必要になる。まず、トポロジカルな条件を考える。時間に依存しない静的な解を考えることにすると、3つの電荷を持つパイオンの場合は、空間の点  $x$  の関数、すなわち、3次元空間  $R^3$  から荷電（アイソスピン）空間  $SU(2) \sim S^3$  への写像とみなせる。このときの、写像の巻数（winding number）を考えよう。すなわち、変数  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$  が  $R^3$  の中を1回ぐるりと動くときに、像  $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in S^3$  が  $S^3$  を被う回数である。この量は、特異性を持たない局所的な連続変換に対して、不変であることが知られている。巻数  $N$  は次のように計算される：

$$N = \frac{1}{V} \int d\pi = \frac{1}{V} \int \frac{\partial(\pi)}{\partial(x)} dx \quad (6.1)$$

ここに  $V$  は像空間  $S^3$  の体積である。体積要素  $d\pi$  は  $x$  の関数なので、ヤコビアン  $\partial(\pi)/\partial(x)$  が第2式に現れる。 $V$  で割ることで、巻数  $N$  は規格化され整数値になる。巻数 (6.1) が不連続な整数値をとることは、 $\pi_3(S^3) = Z$  (integer) として数学的に保証される。

関数  $\bar{x} \rightarrow \bar{\pi}(\bar{x})$  を表わすのに、前章で導入した行列表現を採用すると便利である：

$$U(\bar{x}) = \exp(i\bar{\pi} \cdot \bar{\pi}(\bar{x}) / f_\pi) \quad (6.2)$$

定数  $f_\pi$  はパイオンの崩壊定数であるが、この式では、物理的なボソン場  $\bar{\pi}$  の次元を打ち消すために必要となる。ここで右巻カレント (Maurer-Cartan 形式)  $r_\mu = (\partial_\mu U)U^\dagger$  を導入する。これを用いると、巻数 (6.1) は

$$N = \frac{\varepsilon^{ijk}}{24\pi^2} \text{tr} \int d^3x r_i r_j r_k \quad (6.3)$$

と書ける。

関数  $U = \exp(i\bar{\pi} \cdot \bar{\pi} / f_\pi)$  は巻数によって分類され、異なる巻数の解は、お互いに他の解に連続的な変換によって移り変わることはできない。特に、巻数1の解は、巻数0の真空に移る (崩壊する) ことはない。そこで、巻数をバリオン数と解釈すると、バリオンの安定性が理解できる。このように、トポロジカルな理由によって、バリオンの安定性が説明されることは興味深い。

## 6.2 ラグランジアン

有限なエネルギーと大きさを持ったバリオンが、安定に存在できるためには、トポロジカルな条件だけでは十分ではない。このことを見るために、具体的に系のラグランジアン (5.9)

$$L_2 = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} r_\mu r^\mu \quad (6.4)$$

を再度考える。添字の2はこの式が微分の2次の微分を含むことを表している。これより、時間に依存しないエネルギーは

$$E_2 = -\frac{f_\pi^2}{4} \int d^3x \text{tr} r_i r^i \quad (6.5)$$

となる。いま、有限な広がりを持った場の配位  $U(\bar{x})$  を考え、その大きさを変えるスケール変換を考える。変換  $x \rightarrow ax$  によって、配位は  $a$  倍大きくなる。このとき、エネルギー

$E_2$ は

$$E_2 \rightarrow aE_2 \quad (6.6)$$

と変化するので、 $a$ を小さくするほど、すなわち配位を小さくするほどエネルギーは減少し、最終的にこの配位はつぶれてしまう ( $U(\bar{x}) \rightarrow 1$ となる)。この状況を食い止めるためには、配位が小さくなるに連れて、エネルギーが増加する項を加えればよい。

スキーム模型では、高次微分の項にこのような役割を持たせることができる。そこで、4次微分の項を考えると、スケール変換 (6.16) に対して、

$$E_4 \rightarrow E_4 / a \quad (6.7)$$

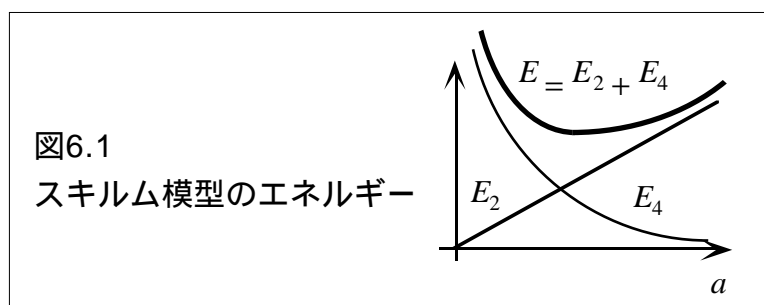
となり、和  $E = E_2 + E_4$  は確かに、有限な  $a$  の値のところに最小値を持つようになる (図 6.1)。スキームはこのような項として、

$$L_4 = \frac{1}{32e^2} \text{tr} [r_\mu, r^\nu]^2 \quad (6.8)$$

を採用した。SU(2) の場合独立な項は、交換関係の他に、反交換関係のものが許されるが、スキームが交換関係を採用した理由の一つは、そこには時間の4次微分の項がなく、量子化が容易にできるからである。物理的には、交換関係の項は、質量を無限大とみなしたときのメソンの運動項になっていて、定数  $e$  は  $p \rightarrow 2\pi$  の崩壊定数に対応する。以上、(6.15) と (6.19) をあわせて、スキーム模型のラグランジアンとして、

$$L_{Skyme} = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} r_\mu r^\mu + \frac{1}{32e^2} \text{tr} [r_\mu, r^\nu]^2 \quad (6.9)$$

を得る。



### 6.3 バリオン数 1 の hedgehog ( はりねずみ ) 解

バリオン数 1 の解を考えよう。(6.9) から得られる複雑な運動方程式の解を見つけるために、hedgehog 配位という、最も対称性の高い配位を考える。バリオン数 1 の解の中では、その対称性から、エネルギーが最も低くなることが予想されるが、このことは数値的にも確認されている [19]。現実のバリオンとの対応では、基底状態に属するバリオン族 (SU(2) なら N と、SU(3) ならバリオン 8 重項と 10 重項) に対応する。

Hedgehog 配位は、パイオンのアイソスピンベクトルと、動径ベクトルが平行なものとして定義される：

$$U = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} / f_\pi) \rightarrow U_H \equiv \exp(i\vec{\tau} \cdot \hat{r}F(r)) . \quad (6.10)$$

ここで  $F(r)$  はカイラル角とよばれ、動径距離  $r$  のみの関数である。この配位は、「全角運動量」 $\vec{K} = \vec{I} + \vec{J}$  がゼロになっている。このことは、 $K$  による回転のもとで (すなわち、アイソスピン空間と通常の空間で、同時に同じ角度だけ回すとき)、hedgehog  $U_H$  が不変に留まることによって理解できる。アイソスピン回転 (生成子  $\vec{I} = \vec{\tau} / 2$ ) のもとで  $U_H$  は

$$\text{Isospin: } U_H \rightarrow AU_H A^\dagger \quad A \in SU(2) \quad (6.11)$$

と変換する。一方、空間回転 (生成子  $\vec{J} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla}$ ) のもとでは

$$\text{Spin: } U_H \rightarrow \exp(i\vec{\tau} \cdot R\hat{r}F(r)) \quad R \in O(3) \quad (6.12)$$

の様に変換する。ここで  $R$  は  $3 \times 3$  の実直交行列で、SU(2) の adjoint 表現、すなわち  $2 \times 2$  の行列  $B$  を用いて、

$$R_{ab} = \frac{i}{2} \text{tr} [\tau^a B^\dagger \tau^b B] \quad (6.13)$$

とかけることに注意すると、 $A = B$  のとき、すなわち  $K$  回転のもとで、確かに  $U_H$  は不変に留まることがわかる。

実は、hedgehog 配位は点電荷が作るクーロン場で、すでになじみの深いものである。そこでは、電場  $\vec{E}$  は

$$\vec{E} = kQ \frac{\hat{r}}{r^2} \quad (6.14)$$

と書けるが、これは、光子のスピン 1 と軌道角運動量 1 が、全角運動量 0 に合成された



ものになっている。すなわち、

$$\vec{E} \sim [Y_1, \vec{e}]_0^0 \quad (6.15)$$

である。ここに、 $Y_1$ はランク1の球関数、 $\vec{e}$ はスピン1の単位ベクトルである。

さて、hedgehog 配位 (6.10) をラグランジアン (6.9) に代入すると、エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left( -\frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} r_i r^i + \frac{1}{32e^2} \text{tr} [r_i, r_j]^2 \right) \\ &= 4\pi \int dr \left[ \frac{f_\pi^2}{2} \left( F'^2 + \frac{2}{r^2} \sin^2 F \right) + \frac{\sin^2 F}{2e^2 r^2} \left( 2F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.16)$$

となり、そして、このエネルギーを最小にする条件から、運動方程式

$$F'' + \frac{2}{r} F' - \frac{\sin 2F}{r^2} + \frac{2}{e^2 f_\pi^2 r^2} \left( \sin^2 F F'' + \frac{\sin 2F}{2} F'^2 - \frac{\sin^2 F \sin 2F}{2r^2} \right) = 0 \quad (6.17)$$

を得る。さらに、hedgehog 配位で、巻数、すなわちバリオン数は

$$B = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3x \frac{\sin^2 F}{r^2} F' = \frac{1}{\pi} (F(0) - F(\infty)) \quad (6.18)$$

となる。エネルギーの有限性、解の正則性、もしくは、バリオン数の整数値性、いずれからでも、カイラル角  $F(r)$  は、境界条件  $F(0) = \pi$ 、 $F(\infty) = 0$  を満たさなければならないことがわかる（実際には、の整数倍の加算不定性がある）。この境界条件のもとで、運動方程式 (6.28) は数値的に解くことができる。得られた解の様子を図 6.2 に示す。 $r$  の大きなところでは、 $F(r \rightarrow \infty) = 1/r^2$  のように振る舞うことが示されるが、これは、1パイオン雲の裾を表している。一方、 $r$  の小さなところでは、非線形の効果が支配的になり、解は  $1/r^2$  からずれて近づいていく。こうして、核子のまわりにパイオンの雲が存在するという描像が得られる。このような  $B=1$  の解は、しばしばスキルミオンと呼ばれる。

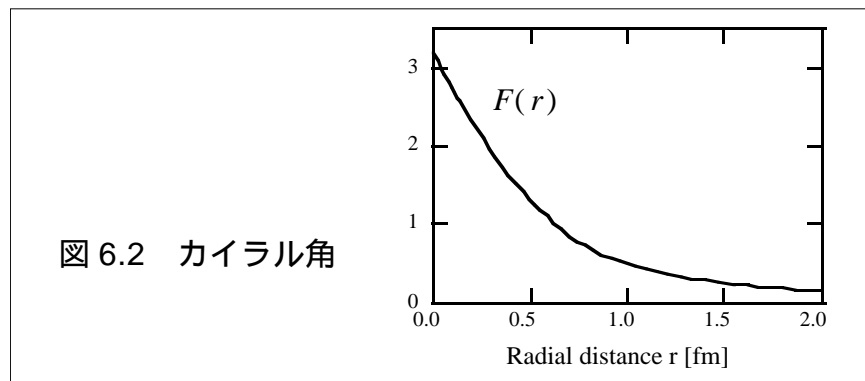


図 6.2 カイラル角

パラメータとして  $f_\pi = 93 \text{ MeV}$  (実験値)、 $e \sim 5$  を用いると、エネルギー  $E \sim 1.4 \text{ GeV}$  を得る。 $e$  は現象論的には、 $\rho \rightarrow 2\pi$  の崩壊定数 ( $\sim 6$ ) と関係付けることができる。また、カイラルバッグ模型では、 $R \rightarrow 0$  のときスキルム模型に移行する条件より  $e \sim 4.5$  を得る。エネルギー  $E \sim 1.4 \text{ GeV}$  は、核子の質量と比較すると大きすぎる。しかし、次の節で説明するように、hedgehog は  $I = J$  を満足する色々なバリオンの重ね合わせと解釈でき、このような大きな値を理解することができる。

## 6.4 物理的状態

前節で得た hedgehog スキルミオンは、物理的な状態ではない。 $K=0$  であり、スピンとアイソスピンについては、 $(I, I_z) = (J, -J_z)$  という条件があるのみで、それらの値は決まっていない。換言すれば、hedgehog 状態は、 $I = J$  の状態の重ね合わせになっていると考えられる。実際には、今、手元にあるのは、hedgehog 「状態」ではなく、「古典的な配位」 $U_H$  であり、これをもとに、いかに量子力学的にバリオンの「状態」を作るかが問題になる。

ここでは、半古典的量子化の方法を採用する。即ち、古典解のまわりの微小揺らぎを量子化していく。まず、やや一般的にこの方法を解説する。

まず、与えられた系の古典解を  $\phi_c$ 、その周りの揺らぎを  $\varphi$  とかくことにする。全体の場、 $\phi = \phi_c + \varphi$  をラグランジアンに代入し、 $\phi_c$  の周りでテーラー展開すると、

$$L(\phi_c + \varphi) = L(\phi_c) + \frac{\partial L}{\partial \phi}(\phi_c) \cdot \varphi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2}(\phi_c) \cdot \varphi^2 + \dots \quad (6.19)$$

とかける。ここに、微分  $\partial L / \partial \phi$  などは、微分演算子なども含む。半古典近似法では、揺らぎ  $\varphi$  は小さな量で、各次数ごとに  $\varphi$  について変分をとっていく。そこで、 $\varphi$  の 1 次の項の変分をとると

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}(\phi_c) = 0 \quad (6.20)$$

を得るが、これは運動方程式にほかならず、古典解  $\phi_c$  がその解になっていることを、示しているにほかならない。次に  $\varphi$  の 2 次の項の変分によって得られる式

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2}(\phi_c) \cdot \varphi = 0 \quad (6.21)$$

は、揺らぎ  $\varphi$  を決める方程式で、一般に

$$-\partial_t^2 \varphi = H \varphi \quad (6.22)$$

という構造をしている。ここに、 $H$ は、空間座標（微分も含む）のみを含む線形演算子である。一般解は $H$ の（調和振動子）固有モードで展開でき、

$$\varphi(t, \bar{x}) = \sum_n a_n e^{-i\omega_n t} \varphi_n(\bar{x}) \quad (6.23)$$

となる。

さて、ここで問題にしたいのは、系に対称性が存在する場合である。ある対称変換 $G$ のもとで場 $\phi$ が $G\phi$ に変換されるとしよう。古典解もこの変換規則にしたがって変換する。系に対称性があるとき、 $\phi$ が運動方程式の解ならば $G\phi$ も解になる。したがって、

$$\frac{\partial L}{\partial \phi}(G\phi_c) = \frac{\partial L}{\partial \phi}(\phi_c) = 0 \quad (6.24)$$

という関係式を得る。ここで、変換の生成子を $T$ とかき、微小変換 $G \sim 1 + i\varepsilon T$ を考える（ $\varepsilon$ は微小変換のパラメータ）。独立な生成子がいくつかある場合には、それらを区別する添え字が必要になるが、ここでは煩雑なので省略する。すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial \phi}(G\phi_c) \sim \frac{\partial L}{\partial \phi}((1 + i\varepsilon T)\phi_c) \\ &\sim \frac{\partial L}{\partial \phi}(\phi_c) + i \frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2}(\phi_c) \cdot \varepsilon T\phi_c \end{aligned} \quad (6.25)$$

となり、したがって(6.31)を使うと、

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \phi^2}(\phi_c) \cdot T\phi_c = 0 \quad (6.26)$$

を得る。ここで $T\phi_c \neq 0$ の場合を考える（ $T\phi_c = 0$ のとき、この式は自明になってしまう）。この式は、 $T\phi_c$ が揺らぎの式(6.32)、または(6.33)の解になっていることを示している。 $T\phi_c$ には時間依存性がないので、その固有値はゼロ $\omega = 0$ である。このような解をゼロモードと呼ぶ。

これまでの説明でわかったことは、ある対称性を持つ系に古典解 $\phi_c$ が存在する場合、 $T\phi_c$ （ $\neq 0$ であれば）なるゼロモードが存在するということである。このような解は、古典解 $\phi_c$ 全体を変換したもので、集団励起である。2章の初め、図1.1のところでふれたことを、少し形式的に示したことになる。低エネルギー領域では、このゼロモードの励起が主要な役割をはたす。そこで、半古典近似の第一歩は、このゼロモードを量子化することから始まる。一般にゼロモードがある場合、ゼロモードとそれ以外のモードとの間に相互作用が存在することになるが（コリオリ相互作用）、これは、摂動によって取り

扱われる。

さて、スキルム模型の場合に戻ろう。系には、並進、空間回転、アイソスピン回転、の対称性がある。ここでは、後の二つの対称性について考える。一般には、これら二つとも、ゼロモード励起となりそうであるが、実は、hedgehog の対称性、 $K = I + J = 0$  のために、2 つの励起のうち1 つは無関係になる。すでにみたように、 $I$  と  $J$  同時に回す  $K$  回転に対しては hedgehog 配位は不変に保たれるので、この変換に対するモードは励起されないことになる。そこで、hedgehog のゼロモード励起としては、 $I$  または  $J$  回転のみで十分である：

$$U_H \rightarrow AU_H A^\dagger \quad A \in SU(2) \quad (6.27)$$

ここで、 $A$  を時間に依存する力学変数と見なす： $A \rightarrow A(t)$ 。  $A$ -変換は対称変換なのでエネルギーを必要としない、すなわち、 $A$ -空間内の運動は自由である。そこで、自由運動の量子化を考えればよい。座標変数として、 $SU(2) \sim S^3$  をパラメトライズする3 つの Euler 角  $(\alpha, \beta, \gamma)$  をとることにすると、それらに共役な角運動量を用いて、波動関数は、 $\psi \sim \exp(ip_\alpha \alpha) \exp(ip_\beta \beta) \exp(ip_\gamma \gamma)$  と表記的にかくことができる。より正確には、これは、 $SU(2)$  の D-関数である：

$$\psi \sim D_{t,-s}^J(\alpha, \beta, \gamma) \quad (6.28)$$

ここで、 $J$  はバリオンのスピン又はアイソスピンの大きさ（拘束  $\vec{K} = \vec{I} + \vec{J} = 0$  があるため、 $I = J$  である）、 $t, s$  はアイソスピン、スピンの  $z$ -成分である。

D-関数のランク  $J$  は半奇数または整数値を取り得て、半奇数の場合はフェルミオン、整数の場合はボソンとして量子化される。 $SU(2)$  スキルム模型の場合、バリオンはフェルミオンであるという、物理的な理由によって  $J = (\text{半奇数})$  を採用しなければならない。一方  $SU(N_f > 2)$  スキルム模型の場合、いわゆる Wess-Zumino-Witten 項が存在し、カラー数  $N_c$  と統計との間に関係が付き、 $N_c$  が奇数ならばスキルミオンはフェルミオン、 $N_c$  が偶数ならばボソンとして量子化されることが、説明される [20]。こうして、いずれの場合でも、ボソンの理論から、ソリトンというフェルミオンが生成されたことになる。

波動関数の例として、陽子スピナップ状態を示すと、

$$|p \uparrow\rangle \sim D_{1/2, -1/2}^{1/2}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{i\alpha} \cos \frac{\beta}{2} e^{-i\gamma} \quad (6.29)$$

である。

物理量は、座標  $A$  と運動量  $\partial / \partial A$  の関数である。場  $U(x)$  で書かれた演算子に  $U(x) \rightarrow AU_H A^\dagger$  を代入し、空間積分  $\int d^3x$  を行くと、 $A$  と  $\dot{A}$  の関数を得る。量子化の後、時間微分  $\dot{A}$  は微分  $\partial / \partial A$  におきかえられ、波動関数 (6.29) に作用する演算子を得る。例えば、エネルギーを考えてみると、

$$H = -\int d^3x L = M_H + \frac{\Lambda_\pi}{2} \Omega^2 \quad (6.30)$$

となる。ここで  $\vec{\Omega} = -(i/2)\text{tr}[\vec{\tau} \dot{A} A^\dagger]$  ( $\sim \dot{A}$ ) は  $A$ -空間で回転する hedgehog の角速度である。  $\Lambda_\pi$  は回転するスキルミオンの慣性能率で、カイラル角  $F(r)$  の汎関数である：

$$\Lambda_\pi = \frac{8\pi}{3} f_\pi^2 \int_R^\infty r^2 dr \sin^2 F \left( 1 + \frac{1}{e^2 f_\pi^2} \left( F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2} \right) \right)$$

$A$  を量子化し ( $\dot{A} \rightarrow \partial / \partial A$ )、波動関数 (6.29) で期待値をとると、

$$H = M_H + \frac{1}{2\Lambda_\pi} J(J+1) \quad (6.31)$$

を得る。こうして、Hedgehog の回転によって  $I=J$  バリオン励起と、その  $J(J+1)$  型のスペクトラムをみいだす。他の物理量も同じように計算される。

スキルム模型の予言と実験値との比較の表を以下にまとめる [21]。おおかた 30% 程度の一致であるとよく言われる。

Quantity	Prediction	Experiment
$M_N$	input	939 MeV
$M_\Delta$	input	1232 MeV
$f_\pi$	64.5 MeV	93 MeV
$\langle r^2 \rangle_{I=0}^{1/2}$	0.59 fm	0.72 MeV
$\langle r^2 \rangle_{M,I=1}^{1/2}$	0.92 fm	0.81 MeV
$\mu_p$	1.87	2.79
$\mu_n$	-1.31	-1.91
$ \mu_p / \mu_n $	1.43	1.46
$g_A$	0.61	1.25
$g_{\pi NN}$	8.9	13.5
$g_{\pi N\Delta}$	13.2	20.3
$\mu_{N\Delta}$	2.3	3.3

## 7. 終わりに

この講義では、カイラル対称性の基本事項について解説した。強い相互作用の物理では湯川によるパイオンの予言以来、多くの場合にパイオンがその主役を果たしてきたといえる。QCDのカイラル対称性はその強い相互作用の結果、自発的に破れアイソスピン対称性のみが残っている。現在の興味の一つは、破れた軸性対称性を実験室で部分的にでも回復させ、その破れの機構を探ろうというものである。

カイラル対称性は、フェルミオンのカイラリティー（それはローレンツ群の概念）としばしば混乱されるため、この点を区別し考えて行かなければならないことを強調したつもりである。

一般にクォークがその基本表現をとるとき、ハドロンにはその複合系としていろいろな表現が可能になる。そして対称性が破れると物理状態はもはや既約表現ではなく、いろいろな表現の重ね合わせとなってしまう。この点は特に重要なことである。この重ね合わせの仕方がわかれば、破れを引き起こすメカニズムがわかるはずである。ところが、パイオンは通常4章で見たように とともにカイラル群の $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 既約表現であると仮定される。また、核子は $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ と仮定される。本当にハドロンはカイラル対称性の破れた世界でもこのような単純な既約表現で表せるのだろうか？実際に、核子を $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ とすると、そこからかなり一般的な仮定のもとで $g_A = 1$ を導くことができる。このことは、核子はより複雑な表現であることを示唆していないのだろうか。同様に、 $\rho$ についても、他の表現は可能なのではないか？実はそのような候補の一つがGeorgiのベクトル極限である。

このような観点でハドロンをとらえる研究は、すでに60年代のころカレント代数と和則の研究と関連して盛んに行われていた。現在はそれらをQCDから説明し、また、環境を変えたハドロン多体系物理の中で見ていくことが可能になりつつある。これら一つずつ解明し、ハドロン物理全体を解明していくことが今後の課題であろう。

## 参考書と文献

以下の教科書、参考書、文献ともに網羅的ではなく、ごくわずかのものに限った。この講義の内容の多くはいずれかを参考にしている。

### 教科書・参考書

1. T. Ericson and W. Weise, "Pions and Nuclei", Oxford Science Publications (1988)
2. S. Weinberg, "The quantum theory of fields", Cambridge Univ. press (1995)
3. S. Coleman, "Aspects of symmetry", Cambridge Univ. press (1985)
4. J.F. Donoghue, E. Golowich and B.R. Holstine, "Dynamics of the Standard Model" Cambridge monographs on particle physics (1992)
5. 九後汰一郎「ゲージ場の量子論」 共立 (1991)
6. T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rept. 247 (1994) 221-367
7. A. Hosaka and H. Toki, "Quarks, baryons and chiral symmetry" World Scientific (2001); Physics reports 277 (1996) 65-188

### 一般

8. S. L. Adler and R. Dashen, "Current Algebra and Applications to Particle Physics" (Benjamin) (1968)
9. Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345; 124 (1961) 246; J. Goldstone, Nuovo Cim. 19 (1961) 154.
10. J.B. Kogut and D.K. Sinclair, Phys. Rev. D66 (2002) 034505.
11. J. Kokkedee, "The Quark Model", Benjamin, New York (1969).  
N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D18 (1978) 4187; D19 (1979) 2653 and references therein.
12. S. Weinberg, Phys. Rev. 177 (1969) 2604; Phys. Rev.Lett. 65 (1990) 1177; 1181; Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 3473.
13. R. Van Royan and V.F. Weisskopf", Nuovo Cim. 50 (1967) 617; 51, 583.
14. R. Machleidt and K. Holinde and C. Elster, Phys. Rept. 149 (1987) 1.
15. Review of Particle Physics, Phys. Rev. D66 (2002) Part I.
16. D.Jido, M. Oka and A. Hosaka, Prog. Theor. Phys. 106 (2001) 873.
17. C. G. Callan, Jr. S. Coleman. J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. 177 (1969) 2247.
18. T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. Lond. A260 (1961) 127; Nucl. Phys. 31 (1962) 556; I. Zahed and G. E. Brown, Phys. Rept., 142 (1986) 1.
19. E. Braaten, S. Townsend and L. Carson, Phys. Lett. B235 (1990) 147.
20. E. Witten, Nucl. Phys. B223 (1983) 422; 433.
21. G.S. Adkins, C. R. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. B228 (1983) 552.