電位

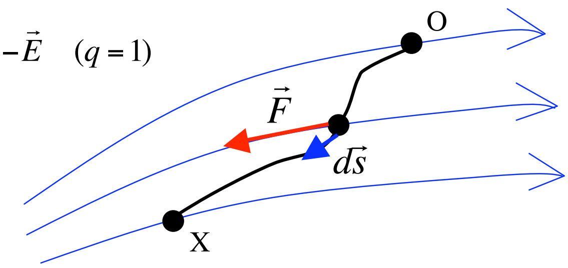
電場の中で単位電荷を移動するのに必要なエネルギーを考える

（エネルギー＝仕事）＝（力）×（移動距離）

$W = Fs$　　もしくは微小な移動に対して

$dW = Fds$　　ベクトル性を考慮して　$dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = Fs\cos\theta$

$\vec{F} = -q\vec{E} = -\vec{E} \quad (q=1)$



O（下流）から出発して（上流）に向かうことを考える。電場から受ける力に逆らって電荷 q=1 [C]を運ぶ際に必要な全エネルギーを OA の電位差と定義して：

$$\boxed{V_{O\to X} = \int_O^X d\vec{s}\cdot\vec{F} = -\int_O^X d\vec{s}\cdot\vec{E} \quad [V = J/C]}$$

点 X の座標成分を(x,y,z)と書き、$V_{O\to X}$を X(x,y,z)の関数とみなす。この式の右辺について X -> X + dX の間の微小な寄与を考えると：

$$V_{X\to X+dX} = V(X+dX) - V(X)$$
$$= -\int_X^{X+dX} d\vec{s}\cdot\vec{E} \sim -(dxE_x + dyE_y + dzE_z)$$

そこで、$dX = (dx,0,0)$とすれば、

$$V(x+dx,y,z) - V(x,y,z) = -dxE_x$$

すなわち、

$$E_x(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z)$$

同様に、他の成分についても求められ、結局

$$\boxed{(E_x,E_y,E_z) = \left(-\frac{\partial V}{\partial x},-\frac{\partial V}{\partial y},-\frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad => \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V}$$

この式の意味を考える

（１）電位差 $V_{O\to X}$ は O から X に向かって、力に逆らって進むときの仕事量なので「高さ」と解釈することができる。

（２） $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ は V が最も速く（急に）変化する方向を表す。

(説明)

$$V(x+dx,y+dy,z+dz)-V(x,y,z)\sim\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=-(dxE_x+dyE_y+dzE_z)$$

の意味を考えてみる。ここで、微少な変化ベクトルの大きさを一定にして、その向きをいろいろ変えてみると、V の変化 $V(x+dx,y+dy,z+dz)-V(x,y,z)$ は、ベクトル

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial x},-\frac{\partial V}{\partial y},-\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \vec{E}$$

と $d\vec{r}=(dx.dy,dz)$ が平行なときに最大値をとる（あたりまえ）。言い換えると、同じ距離 $dr=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ だけ進むとき、V の変化は $d\vec{r}$ が $\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ に平行なときである。すなわち、$\vec{E}=-\vec{\nabla}V$ の方向は、V が最も速く（急速に）変化する方向である。

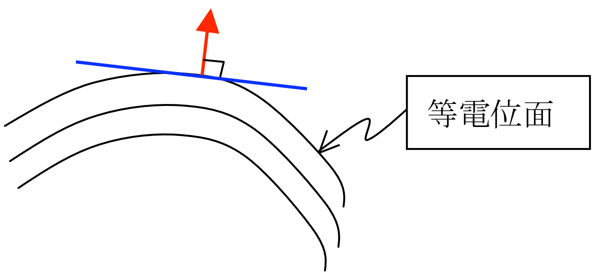
（３） $d\vec{r}=(dx.dy,dz)$ 隔てられた２点間を進むとき、V が変化しないとする（２つの点は等電位にあるという）。すなわち、

$$\begin{aligned}0&=V(x+dx,y+dy,z+dz)-V(x,y,z)\\&=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=-(dxE_x+dyE_y+dzE_z)\end{aligned}$$

このことから、$d\vec{r}=(dx.dy,dz)$ と $\vec{E}$ は直交している。これを少し拡張して、ある点 (a,b,c) で電場 $\vec{E}$ を考えることにして、別の点 (x,y,z) を (a,b,c) からみる。この方向ベクトル $(x-a,y-b,z-c)$ を、先の $d\vec{r}=(dx.dy,dz)$ と置き換えてみると、等電位の条件は

$$E_x(x-a)+E_y(y-b)+E_z(z-c)=0$$

この式は、点 (a,b,c) を通りベクトル $\vec{E}$ に垂直な平面の方程式を表す。



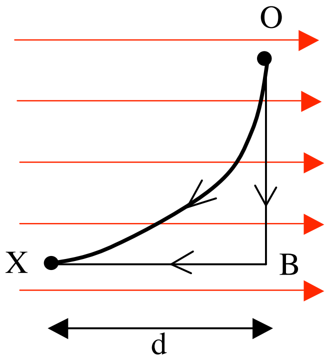
重ね合わせの原理

電位と電場は積分、もしくは微分の関係にあるので、電場で成り立っていた重ね合わせの原理は電位についても成り立つ。すなわち、電荷$q_1, q_2, q_3 \cdots$のそれぞれの電荷による電位を$V_1, V_2, V_3 \cdots$とすれば、合計の電位は

$$V = \sum_i V_i$$

以下の電位の計算では、どこに基準点を置くかに注意する

例１：一様な電場（基準点はどこか任意の点 O）



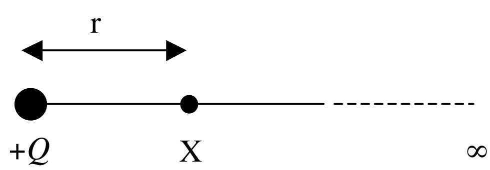
$$\begin{aligned} V_{OX} &= -\int_O^X \vec{E} \cdot d\vec{x} \\ &= -\int_{parallel} \vec{E} \cdot d\vec{x} - \int_{perpendicular} \vec{E} \cdot d\vec{x} \\ &= -\int_{BX} \vec{E} \cdot d\vec{x} - \int_{OB} \vec{E} \cdot d\vec{x} \\ &= -\int_{BX} \vec{E} \cdot d\vec{x} = -\int_0^{-d} E dx = Ex \end{aligned}$$

・ OB 上の積分は、$\vec{E}$と$d\vec{l}$が直交しているのでゼロ。

・ X は O の左にあるので負の位置

例２：点電荷（**基準点は無限遠方**、座標の原点は電荷$+Q$の位置）

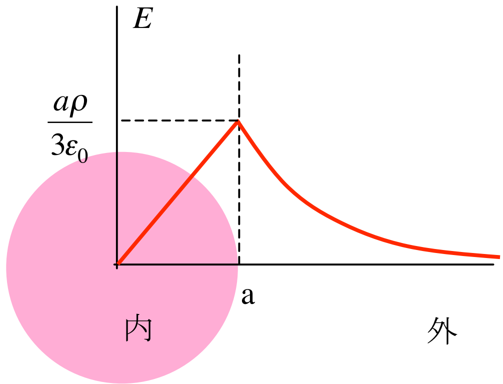
$$\begin{aligned} V_{\infty X} &= -\int_\infty^X \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= -\int_\infty^X \frac{kQ}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ &= -\int_\infty^X \frac{kQ}{r^2} dr \\ &= \left[+\frac{kQ}{r} \right]_\infty^X = \frac{kQ}{r} \end{aligned}$$



・点 X は原点から距離 r の位置にある。

例３：半径 a の球内に一様に分布する電荷（電荷密度をρ = 一定とする)。
まず、球の内部と外部でそれぞれガウスの法則を適用して電場を求める：

内側：



$$\int d\vec{S}\cdot\vec{E}_{in} = 4\pi r^2 E_{in}$$

$$= \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{(4\pi r^3/3)\rho}{\varepsilon_0}$$

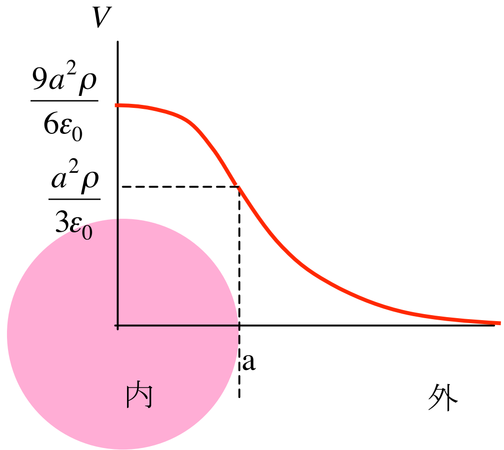
＝＞

$$E_{in} = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$$

外側：

$$E_{out} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{(4\pi a^3/3)\rho}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{a^3\rho}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

これを積分して電位を求める：



$V_{out}(r) =$ 点電荷の場合と同じ

$$V_{in}(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_\infty^a \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} - \int_a^r \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}dr$$

$$= \frac{a^2\rho}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left(a^2 - r^2\right)$$

試しに下の式を微分してみると確かにE_{in}が正しく得られていることが確かめられる。

まとめ

（１）電場と電位の関係（微分と積分～傾斜と高さ）

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad \Leftrightarrow \quad V(X) = -\int_O^X d\vec{s}\cdot\vec{E}$$

（２）電位は電気的な高さを表し、電場$\vec{E}$はその傾斜（最も急に変化する方向）を表す。

（３）問題の解き方

（あ）ガウスの法則を使って電場 E を求める。それを積分して V を求める。

（い）電位 V を求め、次にそれを微分して E を求める。