２．電場と電位

力の伝わり方

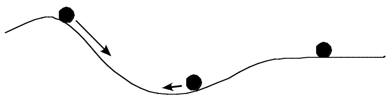
遠隔作用

$$\vec{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$$

距離r離れている点１と点２に電荷がおかれているという情報のみで、力が表現されている。一方、q_2の値が変われば、q_1に働く力も変化する。すなわち点２の作用は点１へと伝わっているはず（その逆も同じ）。クーロンの法則では、点１，２の作用が、媒介するものなしに伝わるかのように表現されている。このような力を、遠隔作用という。

近接作用の考え方：重力（斜面）の例

斜面上の物体は角度に応じた下降力を受ける



受ける力は、本来地球の重力に引かれることに原因があるが、この場合、斜面の角度という、その場所の性質に関係していると解釈することもできる。力の起源ををはなれた別の点に求めるのではなく、その場所（空間）の性質であるとするとき、この力を近接作用という。

斜面上の質量mの物体に作用する下降力は

$$\vec{F}=mg\sin\theta\,\vec{e}=m\vec{G}$$

ここで、$\vec{e}$は斜面に接する下方を向いた単位ベクトル。mは物体の性質なので、

$$\vec{G}=g\sin\theta\,\vec{e}$$

を、斜面（空間）の点の重力に関連した性質と呼ぶことが出来る。斜面上の各点は、そこに質量mを持ってくると、$m\vec{G}$という力を生じるような性質を持っている。

場

空間の各点にある性質を考えることができ、それが、場所ごとに変化するような場合、その性質は場所の関数であり、そのような関数を場と呼ぶ。

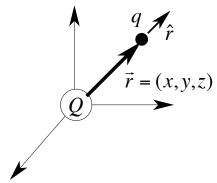
・温度や気圧は確かに場所によって変化する。それらは１成分の関数なのでスカラー場と呼ばれる。
・風（空気の流れ）も場所ごとに変化するが、これは大きさと方向を持ったベクトル場である。
・斜面上の下降力の場合、$\vec{G}=g\sin\theta\,\vec{e}$がベクトル場である。

基本

クーロンの法則、$\vec{E},V$の関係、重ね合わせの原理を使ってかなり多くのことを示すことが出来る。

１基本事項

原点に電荷Qがおかれている場合



$$\vec{F}=k\frac{qQ}{r^2}\hat{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}=k\frac{Q}{r^2}\hat{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\qquad \vec{F}=q\vec{E}$$

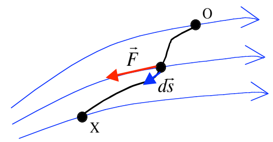
$$V=k\frac{Q}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

(基準は無限遠方)

これから、$\vec{E}=-\vec{\nabla}V$　あるいは成分で書くと、$(E_x,E_y,E_z)=\left(-\frac{\partial V}{\partial x},-\frac{\partial V}{\partial y},-\frac{\partial V}{\partial z}\right)$

この逆の関係は（$\vec{F}$は単位電荷に作用する力）

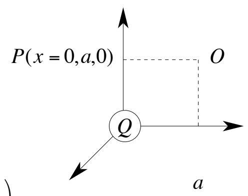
$$V_{O\to X}=\int_O^X d\vec{s}\cdot\vec{F}=-\int_O^X d\vec{s}\cdot\vec{E}\quad [V=J/C]$$



ここでＯは電位の基準で、点電荷など有限の領域に電荷が分布する場合には無限遠方を基準にとる

問　$V=k\frac{Q}{r}$　から$\vec{E}$を計算せよ。逆に　$\vec{E}=k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$　からVを計算せよ。

問　図のように、Ｏを基準にしたＰの電位を、$V_{O\to X}=-\int_O^X d\vec{s}\cdot\vec{E}$に従って計算によって求めよ。



$$-\int_O^P \vec{E}\cdot d\vec{r}=+Q\int_0^a\frac{ydy}{\left(y^2+a^2\right)^{3/2}}=Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}a}-\frac{1}{a}\right)$$

発散

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$をベクトル（流れ）の発散といい、その場所における流れのわき出し（消失）量を表す。

１方向に向かう流れのベクトルは一般に $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$と書ける。この向きがｘ方向を向いていなければ、座標軸を回転してｘ軸を流れの方向にそろえれば良い（座標回転）。このとき、

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{E_x(x+dx)-E_x(x)}{dx}$$

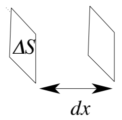
となって、まさしく流量変化の割合そのものを表している。

　流れの変化がｘ軸の他に、ｙ軸、ｚ軸方向にもある場合には、今までの考察を若干追加訂正する必要がある。その結果、$\frac{\partial E_x}{\partial x}$は一般化され、$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$が流量の変化の割合となる。

問　流れが一方向に向かう場合、ベクトルの内積の性質を用いて、$\frac{\partial E_x}{\partial x}$は$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$の表現の特別な場合になっていることを示せ。

ところで、ガウスの法則によれば、$\vec{E}$を流れの密度（単位面を通過していく流量）と解釈することによって、

$$\underbrace{\Delta SE_x(x+dx)-\Delta SE_x(x)}_{\text{流量の差し引き}}=\Delta S\big(E_x(x+dx)-E_x(x)\big)=\underbrace{\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0}}_{\text{体積内の電荷}}$$



この式の両辺をΔSdx（＝微小な体積）で割ると、

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

これをガウスの法則の微分形という。これを積分したものは、

$$\int_{Surface}d\vec{S}\cdot\vec{E}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

のように書ける。

閉曲面を通過していく力線の量は、その内部に存在する電荷の総量（のε_0分の１）に等しい

問　$\vec{E}=k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$　のときに、$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$と$\int_{Surface}d\vec{S}\cdot\vec{E}$を計算せよ。

問　$V=\frac{e^{-mr}}{r}$, $(m\neq 0)$（湯川ポテンシャル）のときに、$\vec{E}$、$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$、$\int_{Surface}d\vec{S}\cdot\vec{E}$を計算せよ。

多くの電荷がある場合　～　重ね合わせの原理

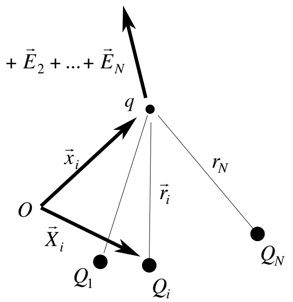
$$V(\vec{x})=k\sum_i\frac{Q_i}{r_i}=k\sum_i\frac{Q_i}{\left|\vec{x}_i-\vec{X}_i\right|}$$

$$\vec{E}(\vec{x})=-\vec{\nabla}_{\vec{x}}V(\vec{x})$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}k\sum_i\frac{Q_i}{\left[(x-X_i)^2+(y-Y_i)^2+(z-Z_i)^2\right]^{1/2}}$$

$$=k\sum_i\frac{Q_i(x-X_i)}{\left[(x-X_i)^2+(y-Y_i)^2+(z-Z_i)^2\right]^{3/2}}$$

$$=k\sum_i\underbrace{\frac{Q_i}{\left[(x-X_i)^2+\ldots\right]}}_{r_i^2}\underbrace{\frac{(x-X_i)}{\left[(x-X_i)^2+\ldots\right]^{1/2}}}_{\hat{r}_i\text{ のｘ成分}}\rightarrow k\sum_i\frac{Q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$



連続分布の場合

和を積分に置き換えれば良い：

$$V(\vec{x})=k\int dv_{\vec{X}}\frac{\rho(\vec{X})}{\left|\vec{x}-\vec{X}\right|}\quad、\quad\vec{E}(\vec{x})=k\int dv_{\vec{X}}\frac{\rho(\vec{X})}{\left|\vec{x}-\vec{X}\right|^2}\frac{\vec{x}-\vec{X}}{\left|\vec{x}-\vec{X}\right|}$$

問　半径ａの球内に電荷Ｑが一様な密度ρで分布する場合、電場$\vec{E}(\vec{x})$をガウスの法則を使って求め、次にポテンシャル$V(\vec{x})$を求めよ。ポテンシャルの基準は無限遠方にとるものとする。次に、$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$を計算して確かにρ/ε_0となることを示せ