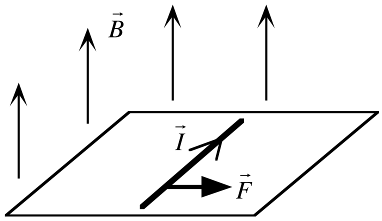
定常磁場

電磁気　＝　電気と磁気の関係を明らかにし、それらの法則をまとめた学問体形
相対性理論の窓口
統一理論の原形

電荷－＞電場を形成する－＞（静止、運動する）電荷に力を与える
電流－＞磁場を形成する－＞（運動する）電荷に力を与える

$\vec{E}$ の源は Q 　　$\vec{B}$ の源は $\vec{I}$

（１）単位長さあたりの電流が受ける力

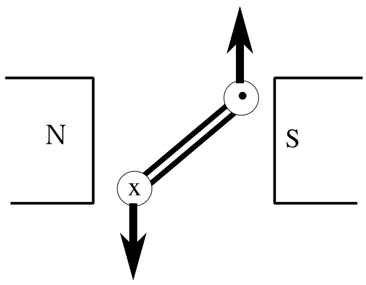


$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$$ （経験則）

磁場（磁束密度）の単位

テスラ [T]　= １[A] の電流に単位長さ（１m）あたり１ [N] の力が働く場合の磁場の強さ
地球磁場の強さはおよそ 10**(−5) [T]

（２）コイルが受ける力



１辺の長さが a[m] のコイルが受ける力は、向かい合う２辺に対して同じ大きさで向きは逆、その大きさは

$F = IBa$ 　および、$f = IB\cos\theta$

角度 θ はコイル面の法線と磁場のなす角度。力 $F = IBa$ はコイルを回転させるトルクを与え、その大きさは

$$\tau = 2 \times IBa \times \frac{a}{2} \times \sin\theta = BIa^2 \sin\theta = BM\sin\theta$$

ここで、$M = Ia^2$（ループを流れる電流　×　ループの面積）を**磁気能率**という。

問１　コイル面が磁場に垂直におかれてある状態から平行になるように９０度回転させるのに必要な仕事（エネルギー）を計算せよ。

（２）電荷１個が受ける力

導線単位長さあたり、電荷（自由電子など）q [C] が n 個あるとする。これが一定の速さ $\vec{v}$ で流れるとすると、電流は $\vec{I} = nq\vec{v}$ で表される。これを使えば、（１）の式は

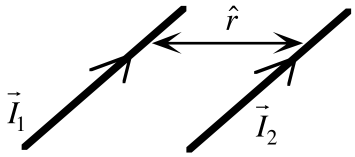
$$\vec{F} = nq\vec{v} \times \vec{B}$$

左辺は単位長さ（n 個の電荷）あたりの電流が受ける力なので、１個当たりの力は

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

である。これをローレンツ力という。

（３）平行電流間に働く力（単位長さあたり）

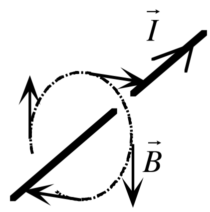


$$F = -\frac{\mu_0 \hat{r}}{2\pi r} \vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2$$

ここで、μ_0は真空の透磁率でその値は正確に$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [N / A^2]$である。また、単位ベクトル$\hat{r}$は、$\vec{I}_2$に働く力を考えるときには１から２に向かう$\vec{I}_2$に垂直な単位ベクトル、$\vec{I}_1$に働く力を考えるときには２から１に向かう$\vec{I}_1$に垂直な単位ベクトルとする。すると、$\vec{I}_1$と$\vec{I}_2$が平行なときには、それらの内積が正であることから引力、$\vec{I}_1$と$\vec{I}_2$が反平行のときには、それらの内積が負であることから斥力であることがわかる。

問２　$\sqrt{1 / (\varepsilon_0 \mu_0)}$を計算しそれが光速度に等しいことを確かめよ。

（４）無限に長い直線電流が作る磁場（エルステッドの法則）

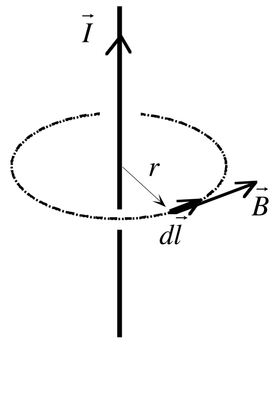


$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \vec{I} \times \hat{r}$$

ここに、単位ベクトル$\hat{r}$は電流から観測点に向かう単位法線ベクトルである。

問３　エルステッドの公式から$\vec{I}_1$が$\vec{I}_2$の所に作る磁場を求めておいて、（１）の公式により、$\vec{I}_2$がその磁場から受ける力を計算し、結果が（３）と一致することを確かめよ。

問４　エルステッドの法則を用いて、一様な磁場中を流れる直流電流のまわりに出来る磁場の様子を描き、電流が磁場から受ける力の向きを説明せよ。



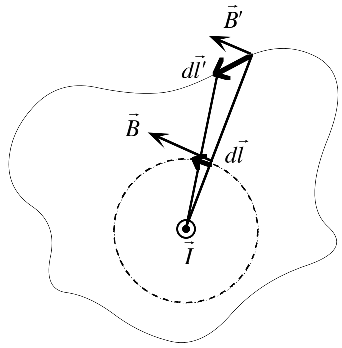
（５）アンペールの法則

エルステッドの公式を半径rの円周に沿って周回積分すると、

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

となることがわかる。この周回積分は下の図から、経路によらないことが示せるので、この公式は非常に一般的なものである。また、この式は、ガウスの法則の積分形に対応する。

$d\vec{l}\cdot\vec{B}$ と $d\vec{l}'\cdot\vec{B}'$ は等しい。なぜなら、
線素（$d\vec{l}$ 、$d\vec{l}'$ ）は中心からの距離に
比例して大きくなるのに対して、
磁場（$\vec{B}$、$\vec{B}'$ ）は距離に半比例して
小さくなるからである。線素と磁場の
角度の違いは、内積によって考慮される。



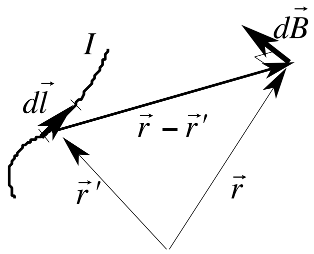
一方アンペールの法則の右辺、すなわち電流の総和（断面を横切る電流の量）を積分で表すと

$$I = \int_{surface} d\vec{S}\cdot\vec{i} \qquad \text{（}\vec{i}\text{ は電流密度）}$$

（６）ビオ・サバールの法則（公式）

微小電流が作る磁場

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}\times|\vec{r}-\vec{r}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad or \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int I \frac{d\vec{l}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$



この式から、磁場は発散がゼロ：

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\frac{\mu_0}{4\pi}\int I\frac{d\vec{l}\times|\vec{r}-\vec{r}'|}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int Id\vec{l}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\times\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = 0$$

今までの結果をまとめると、次の式を得る

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$		$\int\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$	・電場の源は電荷（電場の沸きだし口は電荷）
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$		$\oint\vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$	・静電気力は保存力
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	=>	$\int\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	・磁場に沸きだし口はない
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{i}$		$\oint\vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$	・磁場の源は電流

（７）双極子（棒磁石）の作る磁場

NS 極を原点の回り+a/2, -a/2 の場所に配置したときの磁場。N, S を独立の単磁極と考える：

$$\vec{B} = km\left(\frac{\vec{r}-\vec{a}/2}{|\vec{r}-\vec{a}/2|^3} - \frac{\vec{r}+\vec{a}/2}{|\vec{r}+\vec{a}/2|^3}\right) \quad \sim \quad -km\ \ \vec{a}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

この式を正確に計算するには、成分で表すと良い。以下繰り返された添え字については和をとると約束する（アインシュタインの縮約記法）：

$$B_i = km\left(\frac{r_i - a_i/2}{|\vec{r}-\vec{a}/2|^3} - \frac{r_i + a_i/2}{|\vec{r}+\vec{a}/2|^3}\right) \quad \sim \quad -km\ \ a_j\frac{\partial}{\partial r_j}\left(\frac{r_i}{r^3}\right)$$

$$= -km\ \ a_j\left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{r_i r_j}{r^5}\right) \quad \to \quad +2km\ \ \frac{a}{r^3}$$

この式の最後で、 $\vec{a} = (0,0,a),\ \vec{r} = (0,0,r)$ として、z 軸上におかれた NS 極が z 軸上に作る磁場を求めた。十分遠方では３乗則に従って減少する。N と S が磁極の影響を相殺する。

＊テイラー展開の公式

１変数の場合

$$f(x) = f(a) + a\partial f(a) + \frac{1}{2}(a\partial)^2 f(a) + \ldots$$

$$= (1 + a\partial + \frac{1}{2}(a\partial)^2 + \ldots)f(x)\Big|_{x=a} = \exp(a\partial)f(x)\Big|_{x=a}$$

多変数の場合

$$F(x,y,z) = F(a,b,c) + (a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z)F(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(a,b,c)}$$

$$+\frac{1}{2}(a\partial_x + b\partial_y + c\partial_z)^2 F(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(a,b,c)} + \ldots$$

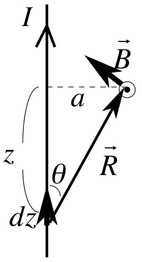
$$= \exp(\vec{A}\cdot\vec{\partial})F(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(a,b,c)}$$

問３　ビオ・サバールの公式を積分して無限に長い直線電流がその周りに作る磁場を計算せよ。

電流から距離aだけ離れたところの磁場を計算する

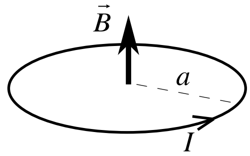
$\vec{r}-\vec{r}'=\vec{R}$、$\left|d\vec{l}\right|=dz$、とおけば右の図から　$\left|d\vec{l}\times\hat{R}\right|=dz\sin\theta=\dfrac{adz}{\sqrt{a^2+z^2}}$　なので、

$$\left|\vec{B}\right|=\frac{\mu_0}{4\pi}\int I\frac{\left|d\vec{l}\times\hat{R}\right|}{R^2}=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int\frac{dz}{\left(z^2+a^2\right)^{3/2}}$$

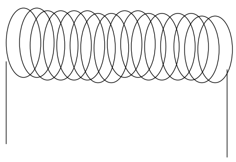


この積分を計算すればよい。

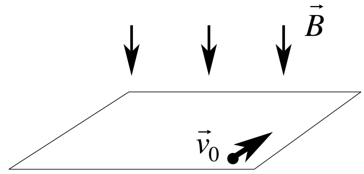
問４　円電流がその中心に作る磁場を計算せよ。



問５　アンペールの（積分）法則を使ってソレノイド内の磁場を計算せよ。単位長さあたりのまき数をnとせよ。



問６　一様な磁場$\vec{B}$に垂直な方向に、電荷ｑが初期速度$\vec{v}_0$で動き始めるとき、その後の運動を調べよ。



周期$T=\dfrac{2\pi m}{qB}$の等速円運動

問７　磁場$\vec{B}$に対して角度θの方向に向かって動き始めるときの運動を調べよ

らせん運動

問８　半径１mm の銅線に（銅の比重は 8.96）１[A] の電流が流れている。電子の平均の速さを求めよ。

0.024 mm/sec

問９　図のように４本の電流 I[A] が流れている。各電流に働く力と、中心の磁場を求めよ。