現代物理学入門

序：　現代物理学

物理学　＝　自然現象に潜む法則を探求する

広がり	と	奥行き	を兼ね備えている
多様性		階層、究極	
適用範囲の広さ		より基本的（であるほど適用範囲が広がる）	

法則

１９０５年

特殊相対性理論	アインシュタイン、ポアンカレ、ローレンツ、、、
光電効果（量子論）	プランク、ボーア、ド・ブロイ、シュレーディンガー ハイゼンベルグ、パウリ、ディラック、、、

これらは現代物理の基礎を作る

１００年も前のことであるが日常経験しにくいので、今でも新鮮に写る

古典物理学	から	現代物理学へ
力学、電磁気、熱力学		時空の認識と物質構成の理解

現代物理学の著しい特徴　＝　場の考え方

- 真空を励起することができ、その励起状態として物質を記述する
  - 物質は生成・消滅を繰り返す
- 力は場を伝わる近接相互作用
  - 伝達速度には上限（光速度）がある
- 反応の前後には保存則が成り立つ
  - 質量、エネルギー、運動量、電荷、、、

まとめ

時空：	時間と空間を同じ枠組みで扱う
物質：	場の励起として物質が出現
保存則と対称性：	力と物質の個性（質量など）の出現を説明する 南部陽一郎博士（シカゴ大）

参考書：　バークレー 物理学コース、丸善

ファインマン物理学、岩波書店

内山龍雄著、相対性理論、岩波書店、

ランダウ／ジューコフ著、相対性理論入門 (東京図書)

特殊相対性理論　Special theory of relativity,　Special relativity

１章：光速度不変の原理と慣性系

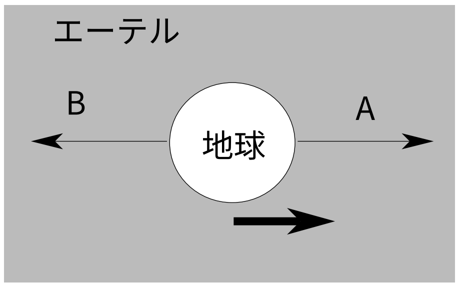
なぜ特殊か
慣性系（等速直線運動、重力のない系）のみを扱う理論。非慣性系にまで拡張したものが一般相対性理論＝重力の理論。

１．光速度不変の原理

ことの発端　＝　光とは何かという疑問
　　　　　　　ニュートンの粒子説
　　　　　　　ヤングの干渉実験（１８０１年）＝＞波動説を確立
　　　　　　　しかし　アインシュタインの光電効果は光の粒子説を復活させた

波動説：１９世紀のエーテル仮説
　　　光を伝える媒質は何か？
　　　真空はエーテルで満ちている
　　　　　　・光を伝える媒質
　　　　　　・星の運行を妨げるような粘性はない（さらさらしている）
　　　　　　　　勝手な仮説！

エーテルの存在を確かめる実験　マイケルソン＝モーレー（1887年）
- 地球がエーテルに対して静止していればどの向きにも光は同じ速さで進む
- 地球がエーテルに対して運動していれば光は進む向きにより速さが異なる

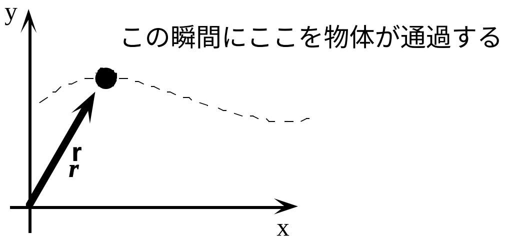


問　もし地球が上の図のようにエーテルに対して右に向かって進んでいるとすると、地球上で観測される光速度は、A方向とB方向に進む場合とでどちらが速く見えるだろうか？

実験結果：どの方向に進む場合も光速度は全く同じ
　　　　　→ エーテル説の否定、時空の概念の根本的な変更

２．慣性系とガリレイ変換

座標系：　事象の起こる時刻 $\boldsymbol{t}$ と場所 $\mathbf{r}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を測るための座標軸。



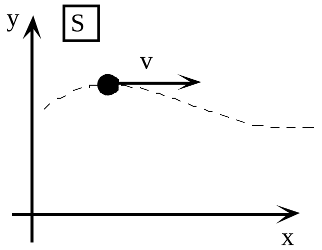
異なる座標系を選ぶと、この事象の時刻も場所も変わりうる

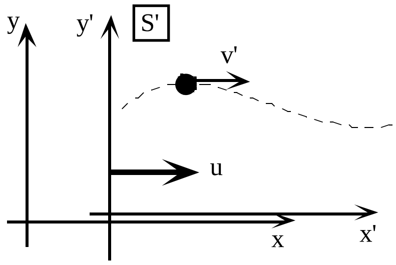
ex. 原点の位置をずらす

動いている（等速直線運動、加速運動）座標系　など

慣性系：　力を受けない物体が等速直線運動をする座標系

異なる慣性系：S 系とS' 系





S 系でみた事象の位置：$(\boldsymbol{t},\mathbf{r})$　　S' 系でみた事象の位置：$(\boldsymbol{t}',\mathbf{r}')$

時刻の原点をそろえれば

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}' \\ \mathbf{r}=\mathbf{r}'+\boldsymbol{t}\mathbf{u} \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{tu} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}',\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}' \end{cases}$$

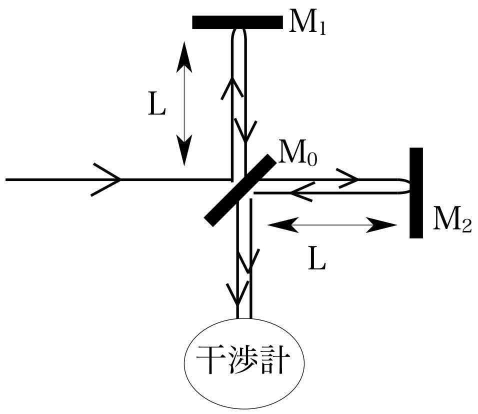
この関係をガリレイ変換という。これは光速度不変の原理に反する結果を導く。

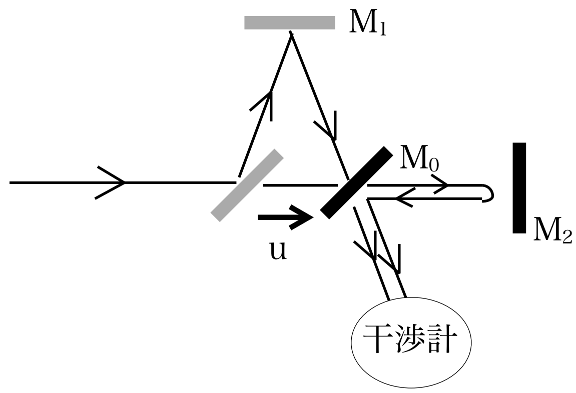
経験的な速度の加算則

S' からながめると、S からながめたときより物体は（遅く、速く）動いているように見える（上の図の場合どちらか？）

v とv' の関係：　v' = v - u　あるいは　v = v' - u

マイケルソン・モーレーの実験（１８８７年）





地球（観測装置）がエーテルに対して
静止している場合の光の経路

速度 u で右に動いている場合に
エーテル系から見た光の経路

（1）1' に要する時間 $2t$ は

$$(ct)^2 = (vt)^2 + L^2$$

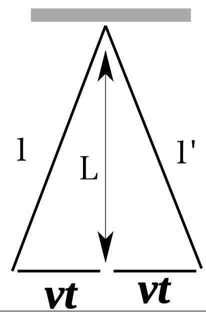
を満足する。したがって

$$t = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$T_{1+1'} = 2t = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$= T_0 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad T_0 \equiv \frac{2L}{c}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

エーテル系から見ると光は三角形の斜辺を通る



（2）2' に要する時間は

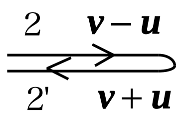
$$T_{2+2'} = t(2) + t(2') = \frac{L}{v-u} + \frac{L}{v+u}$$

$$= \frac{2cL}{c^2 - v^2} = T_0 \frac{1}{1-\beta^2}$$

従って

$$T_{2+2'} - T_{1+1'} \sim T_0 \cdot \frac{\beta^2}{2}$$

地球から見ると 2 のときはゆっくり、2'のときは速く進む

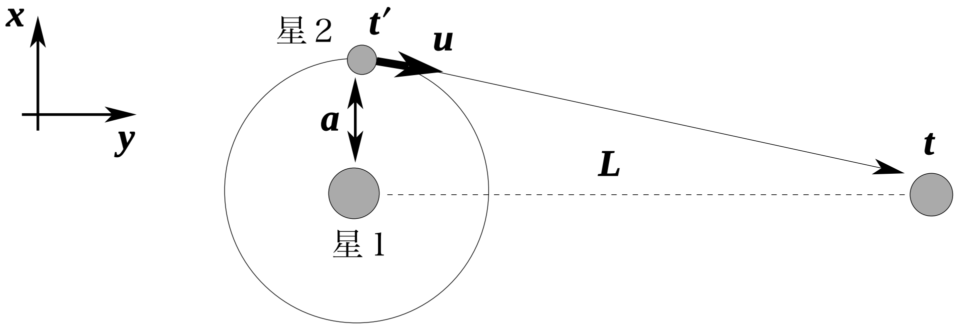


問：　最後の近似式を示せ

みかけの２重星（連星＝対になっている２つの星）

　光が粒子で通常の速度の加算則が成り立つとすると、見かけ上、星の数が２つより多く見えることがある。しかしながら、そのような例は観測されていない。

　時刻 t' に星２から出た光がしばらくして時刻 t に地球に到達する状況を考える。



星２が地球に対して静止している星１の周りを等速円運動をしているとする：

$$\begin{cases} x(t') = a\cos\omega t' \\ y(t') = a\sin\omega t' \end{cases} \Rightarrow \quad u_y = a\omega\cos\omega t' \equiv u\cos\omega t'$$

この際星２の公転面は、地球と星を結ぶ直線に対して平行であるとする。時刻 t' に地球に向かって発した光の速さは、地球に対して

$$c' = c + u\cos\omega t'$$

のように速くなったり遅くなったりする。この光が地球に到達する時刻 t は、

$$t - t' = \frac{L}{c + u\cos\omega t'} = \frac{L}{c}\frac{1}{1 + \frac{u}{c}\cos\omega t'} \sim \frac{L}{c}\left(1 - \beta\cos\omega t'\right)$$

によって与えられる。ここで $\beta = u/c$ 。、また、星２から地球までの距離は L で近似した。時刻 t の基準を適当にとればこの式は

$$t' = \frac{L}{c}\beta\cos\omega t' = \frac{L}{c}\frac{u}{c}\cos\omega t' = \frac{L\omega}{c^2}a\cos\omega t'$$

あるいは、

$$\frac{c^2}{L\omega}t' = a\cos\omega t'$$

と書くことができる。この式を満足する t' に星２から出た光は、いずれも同じ時刻 t に地球に到達する。ところが、右辺は地球から見た星２の位置なので、許される t' の数にたいして、右辺が異なる場合の数だけ星２が（たくさん）見えることになる。その数は左辺の直線の傾きによって、いくつもにもなりえる。

まとめ

１　座標系とは、事象の時刻と位置を計るための物差しのセット。
２　経験的には、速度の合成則は$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$。ガリレイ変換に基づいた関係。
３　光の速さは、どのような条件の元で観測しても常に一定（不変量）
　　自然界の基本定数の一つ
４　慣性系とは、外力が作用しない場合には物体が等速直線運動をするような系。
５　マイケルソンとモーレーは地上で異なる方向に進む光の速さの違いを測定しようとしたが、予想された速さの違いを確認することはできなかった。

問題

１　音の媒質は何か。

２　波の速さは $\boldsymbol{v} = \sqrt{\dfrac{\boldsymbol{T}}{\rho}}$ などのように表される。$\boldsymbol{T}$，ρはなにかを説明し、この式の意味を力と慣性の関係で説明してみよう。気体中を伝わる音速を速くするには、どうしたらよいだろうか。また、

３　ガリレイ変換から経験的な速度の加算則を導け。

４　マイケルソンの干渉計で、ハーフミラーM_0で２つに別れた光が鏡M_1，M_2に反射され、再びM_0に戻るまでには時間差が生じる。この時間の間に光が進む距離の違いが可視光の波長の半分になるためには、M_0からM_1（またはM_2）までの距離L [m]が何[m]であればよいか。

５　身近なところで光の干渉現象の例を示せ。

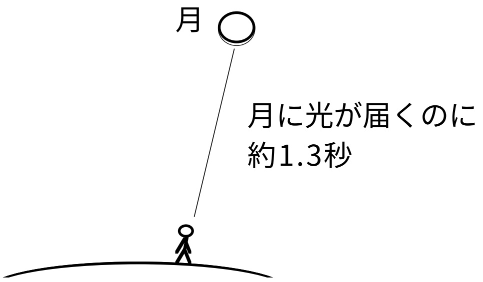
６　見かけの連星の個数について、方程式$\dfrac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{L}\omega}\boldsymbol{t}' = \boldsymbol{a}\cos\omega\boldsymbol{t}'$を解け。

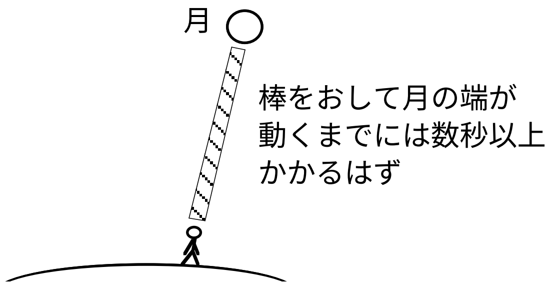
７　前問でどのような条件の時に解が２つ以上、すなわち見かけの個数が２つ以上になるだろうか。

２章　ローレンツ変換

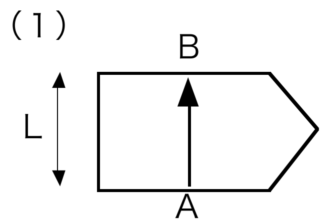
１．光速度不変の原理からのいくつかの帰結

情報の伝達はすべて光（電磁波）により行われる
すべての作用の伝達は、光速度を越えることはない

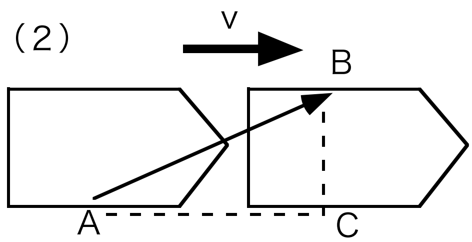




（１）時間の遅れ



床からでた光が天井に届く
のに t = L/c だけかかる



これを地上から眺めると
光は斜めに進む

（１）ロケット内で光が天井に届く時間

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{L} / \boldsymbol{v}$$

（２）地上でみるときに、光が斜めに進んでいく時間 $\boldsymbol{t}'$ は次の関係を満たす：

$$(\boldsymbol{ct}')^2 = (\boldsymbol{vt}')^2 + \boldsymbol{h}^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{t}' = \frac{\boldsymbol{h}}{\sqrt{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{v}^2}} = \frac{\boldsymbol{h} / \boldsymbol{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \boxed{\beta = \boldsymbol{v} / \boldsymbol{c}}$$

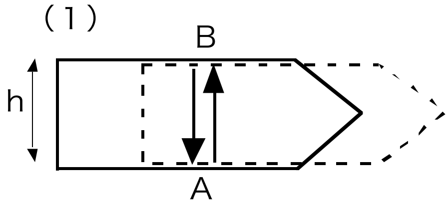
このことから、ロケット内の時間は地上に比べて$\sqrt{1-\beta^2}$ だけ遅れる

宇宙船の中での（静止しているものの）時間を固有時間という

（２）長さの縮み（ローレンツ収縮）

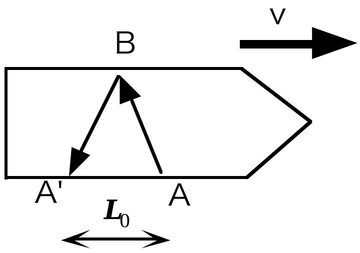
動いているものの長さを測るには工夫が必要。この実験のために、床が透明、天井が鏡でできている長いロケットを考える。速さvで進むロケットの先端が地上の観測点にさしかかった瞬間に、地上からロケットに向けて光を送る。その際に光が通ったロケットの床の位置に印Aをつける。少しすると光はロケット天井の鏡で反射して地上の観測点に戻る。このとき通過する床の位置に印A'をつける。地上では、光は再び同じ観測点に戻るが、ロケットはその間に進むのでAとA'は異なる。

（１）



地上から出た光が床を通り過ぎ
天井で反射して再び床を通り
過ぎるまで t = 2h/c だけかかる

（２）



地上で上下に往復する光は
ロケットの中では斜めに進む

（１）地上の観測者はAA'の長さを、光がロケットの床と天井の間を往復する時間にロケットの速さ$\boldsymbol{v}$をかけて

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{vt} = \frac{2\boldsymbol{vh}}{\boldsymbol{c}}$$

とみなすであろう。

（２）ロケットの中の観測者は、光が斜めに往復するのにかかる時間 $\boldsymbol{t'}$ にロケットの速さ$\boldsymbol{v}$をかけてAA'の長さとするだろう。$\boldsymbol{t'}$ は次の関係を満たす：

$$(\boldsymbol{vt'}/2)^2 + \boldsymbol{h}^2 = (\boldsymbol{ct'}/2)^2 \qquad \therefore \quad \frac{\boldsymbol{t'}}{2} = \frac{\boldsymbol{h}}{\sqrt{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{v}^2}}$$

すなわち

$$\boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{vt'} = \frac{2\boldsymbol{vh}}{\sqrt{\boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{v}^2}} = \frac{2\boldsymbol{vh}/\boldsymbol{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\boldsymbol{L}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

あるいは

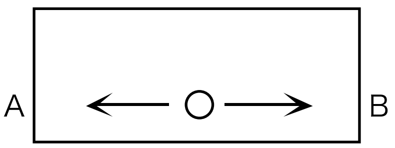
$$\boldsymbol{L} = \sqrt{1-\beta^2}\,\boldsymbol{L}_0$$

このことは、地上で観測した長さ$\boldsymbol{L}$が宇宙船の中で見る長さ$\boldsymbol{L}_0$に比べ$\sqrt{1-\beta^2}$倍だけ短くなって見えることを意味している。

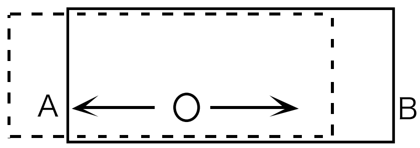
宇宙船の中でみる（静止しているものの）長さを固有長という

（３）同時刻性

　異なる場所で起こる２つの事象は、系によって同時に起こったように見えたりそうでなかったりする。



ロケットの中央から出た光は中の人にとっては同時に前後の先端に届く

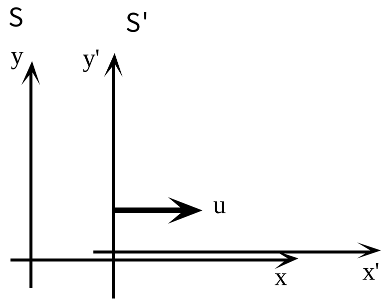


地上でながめているとロケットが進む分だけ，光は後ろの端の先に届く

２．ローレンツ変換

光速度不変の原理と慣性系SとS'の相対性から導かれる

x（または x' ）方向に速さvで相対的に動いている慣性系SとS'を考える。Sから見てS'は一定の速度vで、S'から見てSは一定の速度 - v で動いている。



S系で定規２本の長さが一本の長さの２倍ならば、S'系でも２倍。ただしその絶対的な長さは異なっていてもよい（ローレンツ収縮）。この様な考察から、S系の座標(t, x)とS'系の座標(t', x')の間の関係は線形である：

$$\begin{aligned} t' &= pt + qx \\ x' &= rt + sx \end{aligned} \qquad (1)$$

ここに、 p, q, r, s は速度 u に依存した未知定数。４つの未知数を求めるために４つの条件を考える。

（１）　速度の相対性

S'系の原点$x' = 0$はS系から見て速度ｖで動いている、すなわち(1)で$x' = 0$とおいて、

$$rt + sx = 0$$

これより

$$\frac{x}{t} \quad = \quad -\frac{r}{s} = v$$

あるいは

$$r = -sv \tag{2}$$

同様にS系の原点 $x = 0$ はS'系から見ると速度 - v で動いている。そこで(1)で $x = 0$ とおいて、

$$\begin{aligned} t' &= pt \\ x' &= rt \end{aligned} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{x'}{t'} \quad = \quad \frac{r}{p} = -v$$

あるいは

$$r = -pv \tag{3}$$

ここでは、(2) (3) に等価な

$$r = -pv \qquad \text{および} \qquad s = p \tag{4}$$

を４つのうちの２つの式として採用することにする。

（2）　光速度不変の原理

S系で $x = ct$ ならばS'系でも $x' = ct'$ 。すなわち、

$$\begin{aligned} x' &= ct' = c(pt + qx) = c(pt + qct) = cpt + c^2qt \\ x' &= rt + sx = rt + sct \end{aligned}$$

これら二つの式より

$$rt + sct = cpt + c^2qt$$

あるいは

$$r + sc = cp + c^2q \tag{5}$$

この式は光速度 c の符号を変えても成り立たないといけないので（問：なぜか？）

$$r - sc = -cp + c^2q \tag{6}$$

(5)と(6)に等価な関係のうちの一つ(5)-(6)は(4)の第２式なので（確かめよ）、(5)+(6)を、連立方程式の３つめの式として採用する：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c}^2\boldsymbol{q} \qquad \text{あるいは} \qquad \boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}^2} = -\frac{\boldsymbol{pv}}{\boldsymbol{c}^2} \tag{7}$$

(4) (7) から、変換則 (1) は次のようにかける：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= \boldsymbol{pt} - \frac{\boldsymbol{pv}}{\boldsymbol{c}^2}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}' &= -\boldsymbol{pvt} + \boldsymbol{px} \end{aligned} \qquad \text{あるいは} \qquad \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2 \\ -\boldsymbol{v} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \tag{8}$$

（３）　SとS'の相対性

このことより次の式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2 \\ \boldsymbol{v} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} \qquad \text{（問：なぜか？）} \tag{9}$$

(8) (9)を合成すると、元に戻らないといけないので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2 \\ \boldsymbol{v} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{p}\begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2 \\ \boldsymbol{v} & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{p}\begin{pmatrix} 1 & -\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2 \\ -\boldsymbol{v} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{p}^2\begin{pmatrix} 1-\beta^2 & 0 \\ 0 & 1-\beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{10}$$

以上で未知数 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ はすべて求まり、変換則 (1) は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}' &= \frac{\boldsymbol{t} - (\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2)\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \boldsymbol{x}' &= \frac{-\boldsymbol{vt} + \boldsymbol{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned} \tag{11}$$

となる。これが有名なローレンツ変換の式である。

まとめ

１　光速度不変の原理から、時間と空間の尺度はもはや絶対的でないことをみた。
２　ある系に対して動く系の時間は、元の系に対して遅れて進むように見える
３　動くものの長さは、止まっている場合と比較して縮んでいるように見える
４　光速度不変の原理からローレンツ変換を導いた。これは時間と空間に対する線形変換である。

問題

１　ローレンツ変換(11)は複雑に見えるが、いくらか簡単にすることができる。変数(t,x), (t',x')の代わりに　、(ct,x), (ct',x')を用いて、ローレンツ変換(11)を書き直せ。また$(t,x/c)$, $(t',x'/c)$を用いた場合はどうなるか？

２　前問の変数を用いると簡単になる理由を、単位（次元）をもとに考察せよ。

３　Lorentz変換(11)の逆変換を求めよ。

４　地球から 40 光年離れた場所へ、光速度の 4/5 の速さで旅行する。ロケットの中の人にとって目的地までの距離はいくらに見えるだろうか？この距離を光速度の 4/5 の 速さで飛行するのにかかる時間は何年か？

５　地球から100 光年離れた天体に10 年で着きたいと思う。ロケットの速さはいくらでなければならないか。

６　光にとっては宇宙（世の中）の様子はどう見えるだろうか？