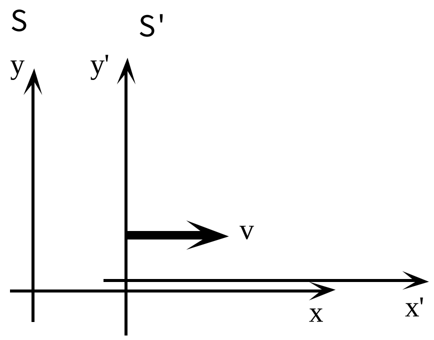
# ３章　Lorentz 変換からのいくつかの帰結

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.a}$$

$$x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{1.b}$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

## （１）速度の相対性




S' 系の原点$x' = 0$はS系で見て速度 v で動く．そこで，(1.b) 式で$x' = 0$とおいて，S' 系の原点という情報をインプットする．すると，

$$-vt + x = 0$$

v は定数であることを用いてこの式を微分すると，

$$-v\,dt + dx = 0$$

すなわち，

$$\frac{dx}{dt} = v$$

問　S系の原点はS'系で見ると，速度 $-v$で動いていることを示せ．

## （２）光速度不変の原理

S系で $\dfrac{dx}{dt} = c$ 　ならば，S'系で $\dfrac{dx'}{dt'} = c$ 　となることを示す．Lorents変換の式(1)を微分すると，

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad dx' = \frac{-vdt + dx}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

辺々で割算をして，$dx/dt = c$を用いると，

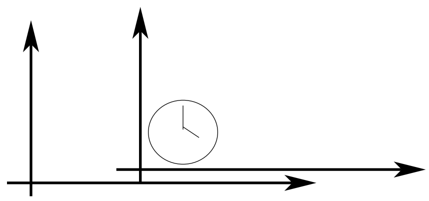
$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{-vdt + dx}{dt - (v/c^2)dx} = \frac{-v + dx/dt}{1-(v/c^2)dx/dt} = \frac{-v + c}{1-(v/c^2)c} = c$$　証明終わり

（3）時間の遅れ

　S'系の原点におかれた時計がS'系で t' 経過するとき，S系での時間経過を求める．S'系の原点という情報をLorentz変換の式に入れると，

$$\boldsymbol{t}' = \frac{\boldsymbol{t} - (\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c}^2)\boldsymbol{x}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad 0 = \frac{-\boldsymbol{vt} + \boldsymbol{x}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

第２式より x を消去すると

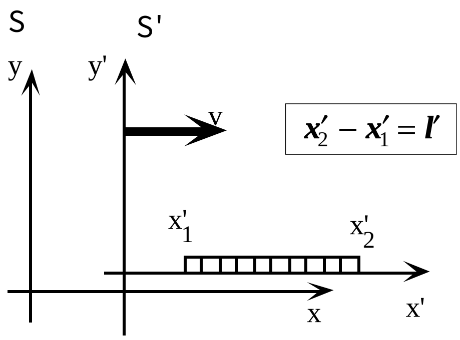


$$\boldsymbol{t}' = \sqrt{1-\beta^2}\ \boldsymbol{t} \tag{2}$$

を得る.

（4）Lorentz収縮

　S'系の x' 軸上におかれた長さ $\boldsymbol{l}'$ のものさしの長さを S 系で測定する．長さの測定とは．．．同時刻に両端の位置をみきわめ，その差をとる．ここでいう同時刻とはS系の同時刻であり，S'系では必ずしも同時刻ではないことに注意しなければならない！




　S系で左端を観測する事象を $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{x}_1)$，右端を観測する事象を $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{x}_2)$ とし，それらの事象に対するS'系での座標を求めると，

$$\boldsymbol{x}_1' = \frac{-\boldsymbol{vt}_1 + \boldsymbol{x}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \boldsymbol{x}_2' = \frac{-\boldsymbol{vt}_2 + \boldsymbol{x}_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S系では L と R は同時刻でなければならないので $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{t}_2$ ．辺々引算して

$$\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{x}_2' - \boldsymbol{x}_1' = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)\Big/\sqrt{1-\beta^2}$$

$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1$ としてLorentz収縮の公式

$$\boldsymbol{l} = \sqrt{1-\beta^2}\ \boldsymbol{l}' \tag{3}$$

を見いだすことができる。

（５）同時刻性

　S系で同時刻に起こる２つの事象 $P(t_P, x_P)$, $Q(t_Q, x_Q)$ （$t_P = t_Q$）はS'系では必ずしも同時刻には起こらない．P, Q をS' 系で見たときの事象を$P'(t'_P, x'_P)$, $Q'(t'_Q, x'_Q)$とする．

$$t'_P = \frac{t_P - (v/c^2)x_P}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t'_Q = \frac{t_Q - (v/c^2)x_Q}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \qquad\qquad t_P = t_Q$$

従って，S'系では P' と Q' は

$$t'_Q - t'_P = \frac{-v(x_Q - x_P)}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}$$

だけ時間がずれて観測される．

（６）速度の合成
　ローレンツ変換の式を用いてそれぞれの座標系で観測される物体の速度

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad v' = \frac{dx'}{dt'}$$

の間の関係を求める。微分の公式を使えばよい。たとえば、

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{-udt + dx}{dt - (u/c^2)dx} = \frac{-u + dx/dt}{1-(u/c^2)dx/dt} \quad => \quad v' = \frac{-u+v}{1-(u/c^2)v}$$

この逆変換によって（計算してもよいが、速度の向きを変えて$u \to -u$とすればよい）

$$v = \frac{u+v'}{1+(u/c^2)v'} \tag{4}$$

まとめ

１　ローレンツ変換によって、光速度の不変性、時間の遅れ、長さの収縮、同時刻性などの性質を数学的に導出した。

問題

１　速度の合成則を用いて、光速度の半分で移動しながらその同じ方向に光速度の半分の速さで投げ出されたものの速さを求めよ。

２　速度の合成則において、$u = c$ ならば $v'$ がいくらであれ、合成された結果の速さ $v$ は $c$ であることを確かめよ。

３　S系の原点におかれた時計がS系で t 経過するとき，S'系での時間経過を求めよ.

４　S系では２つの事象 P と Q は空間的に $x_P - x_Q$ だけ離れているが，S'系で見ると，事象 P' と Q' の空間的な隔たり $x'_P - x'_Q$　はどうなるか.

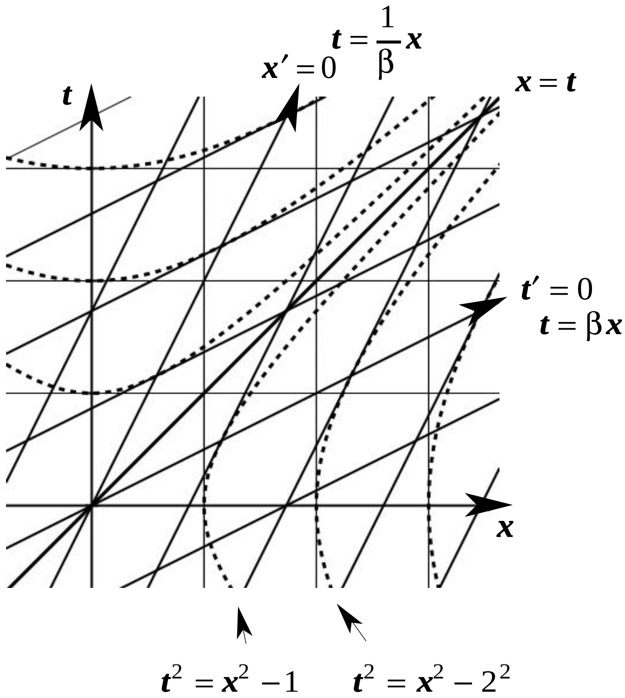
５　時間と位置の変数を組み合わせて　$(ct)^2 - x^2$　なる量を考える．これは，ローレンツ変換によって不変に保たれることを示せ.

## ４章　ローレンツ変換の数学

### １．時空ダイアグラム

　以下、式の表現を簡単にするために、$c=1$（自然単位系）を用いることにする。本来$ct$などと書かれるべきところは、単に$t$と書かれることになる。

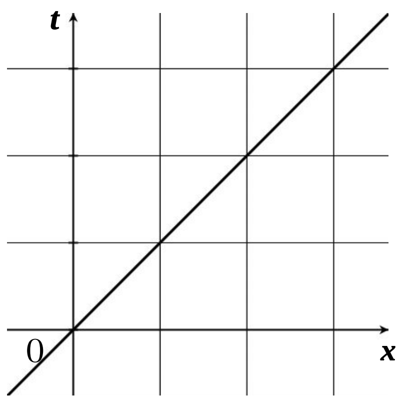
右の図には
　S系を表す直交座標系
　S'系を表す斜行座標系
　光の世界線（$t=x$）
　同時刻（同位置）の線（双曲線）
が示されている。これらを使うことで、
相対論の性質のいくつかを視覚的に
理解することができる。

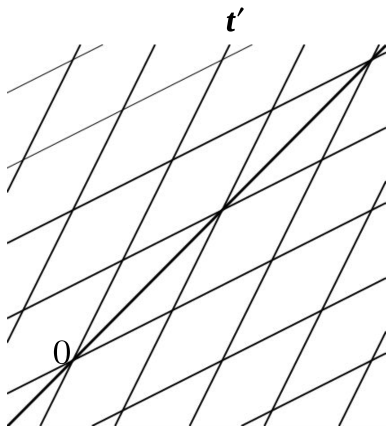



これを時空ダイアグラムという

時空ダイアグラムの書き方

S系の座標$(x,t)$, S'系の座標$(x',t')$




　斜行座標軸は、$t'=const,\ x'=const$を満たす$x,y$の集合なので、S系$(x,t)$からみるとひし形の目のような座標となる（斜行座標系）。しかし、S系の単位長さ・時間と、S'系の単位長さ・時間との関係が明らかになっていない。すなわち問題は、S'系の単位長さ、もしくは単位時間が、S系ではどのように表されるかということである。この関係を明らかにするために、時間と空間に関する不変量を利用する。

相対論では$t^2 - x^2$という量が不変量である。すなわち、ローレンツ変換のもとで変わらない：

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$$

たとえば、時刻$t = 0$とときに原点$x = 0$から出発した光の通過する時空点は座標系によらず

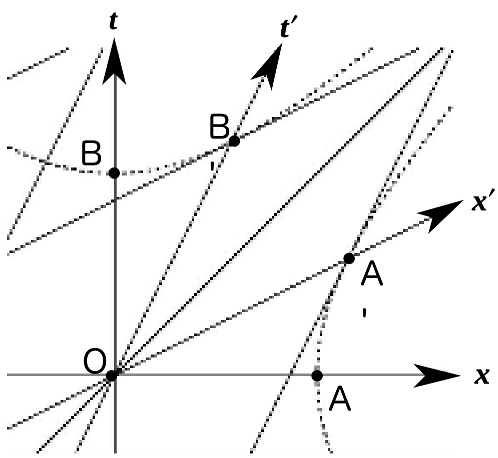
$$t^2 - x^2 = 0$$

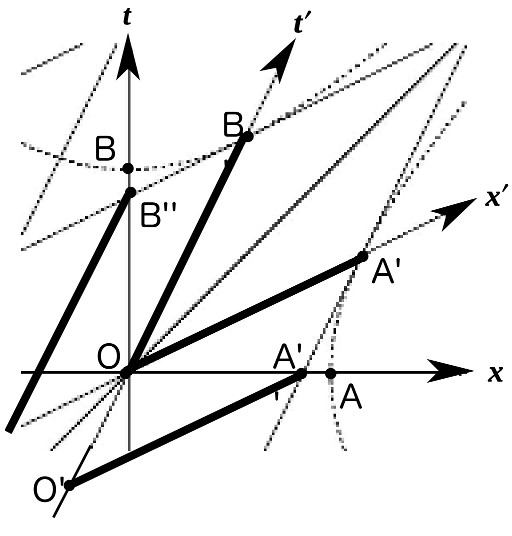
を満足する。空間３次元の場合には$t^2 - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$となり、これは４次元時空間の中で円錐を表す（光円錐）。

この性質を利用して

$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 = -1$$

を考えてみることにする。この式は、S系で見ると$t = 0$のとき$x = 1$となり、これがS系の単位長さ１を決める（下左の図でOA ＝ 1）。S'系についても同様に、$t' = 0$のときに$x' = 1$の点がS'系の単位長さを決める(OA' ＝ 1）。こうしてS系の単位長さOAとS'系の単位長さOA'が決まった。同じようにしてS系の単位時間（OB）とS'系の単位時間（OB'）を決めることができる。




時空の性質

この時空ダイアグラムを用いて、時間と長さの短縮を理解することができる。

（１）長さの短縮

S'系におかれた長さ１の物差しは、図でAA' で表される。長さとは、同時刻に観測される両端AとA'の距離をもって定義する。AA'はS'系では同時刻の点に位置する。しかし、これらがS系において同時刻にないことは、ＡとA'のt座標が異なっていることから明らかである（これのことがすでに、同時刻の概念が系によって異なることを示してい

る）。S系で物差しの両端が同時刻にあるのは、OA''である。ところがOA''はS系の単位長さOAより短い。

（２）時間の短縮

上の図はt, xに関して対称な形をしている。そこで、空間と時間の役割を入れ替えれば、時間の短縮についても説明できる。

（３）同時刻性

上の（１）で説明済み

## ２．ミンコフスキー空間

すでに見たように、ローレンツ変換のもとで量 $\boldsymbol{t}^2-\boldsymbol{x}^2$ が不変に保たれることをみた。より一般的には、この量は２つの事象A$(\boldsymbol{t_A},\boldsymbol{x_A})$, B$(\boldsymbol{t_B},\boldsymbol{x_B})$に対して

$$\left(\boldsymbol{t_A}-\boldsymbol{t_B}\right)^2-\left(\boldsymbol{x_A}-\boldsymbol{x_B}\right)^2$$

という量で表されるものである。もし、$\left(\boldsymbol{x_A}-\boldsymbol{x_B}\right)^2$ の前の係数がプラスならば、この量は通常の（ユークリッド）空間における２点間の長さと見なすことができる。空間２点間の長さは、空間回転に対して不変である。ローレンツ変換も似たようなものと解釈できないだろうか。

２点間の距離が、それぞれの座標差の２乗和ではなく、和の一部が差になっているような性質を持つ空間をミンコフスキー空間という。ユークリッド空間とミンコフスキー空間は、一部の座標変数に虚数単位ｉをかけることでお互いに移り変われることが予想できる。相対論の場合、虚数単位をかけて時間を新たに定義して移り変われる。

さてローレンツ変換の式は、角度変数$\phi$ を

$$\cosh\phi=\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}},\quad \sinh\phi=-\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}$$

によって定義すれば、

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}'\\ \boldsymbol{x}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi\\ \sinh\phi & \cosh\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}$$

の様に表すことができる。そして、$\boldsymbol{t}\to\boldsymbol{it},\boldsymbol{t}'\to\boldsymbol{it}'$とすれば、新しく定義された虚時間と虚速度（＝角度）のもとで、回転によって

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix}$$

の様に表現することができる。

　このように、時間と空間を全く同等に扱うことができる。このことから、時間を空間と異なったものとして特別視すべきでないことが理解できる。このように、時間と空間が対等な正解を、時間１次元と空間３次元をあわせて４次元時空という。

まとめ

１　時空ダイアグラムを用いて、ローレンツ変換を表した。そして、時間と長さの短縮、同時刻性などを視覚的に表現した。

２　ローレンツ変換のもとにおける不変量$\boldsymbol{t}^2 - \boldsymbol{x}^2$は、ミンコフスキー時空間における２点間の距離である。

３　虚時間を導入し、ミンコフスキー時空間はユークリッド空間に帰着する。このことから、時間と空間は全く同等のものと解釈される。

問題