1　運動量とエネルギー

保存する運動量

物理学で運動量やエネルギーは最も基本的な量である。より詳しく学んでいくと、運動量は空間の性質と、エネルギーは時間の性質と関連していることが明らかになってくる。このことを反映して、相対論で時間と空間の概念が変更されたのに伴って、運動量とエネルギーもニュートン力学の場合から変更を受ける。

このことを示すのはそれほど簡単なことではないが、ここでは、ニュートン力学で定義された運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$ の保存則が、ある慣性系 s で満たされていても、ローレンツ変換によって別の慣性系 S に移ると、満たされなくなることを確かめることによって、$\vec{p} = m\vec{v}$ によって定義された運動量の問題点を見ることにしよう。

そのために同じ質量 m を持った 2 粒子 1, 2 の衝突を考え、その様子を s 系，および S 系から眺めることにしよう。少々複雑になるが、ここでは s 系の量は小文字，S 系の量は大文字で区別することにする。

- **s 系**
  2 粒子の重心系。粒子 1, 2 が逆向きに同じ速さで近づき、衝突の後に同じ速さで逆向きに遠ざかって行く。このときの速度を以下のように表すことにする。

	衝突前	衝突後
1	$(-v_x, -v_y)$	$(-v_x, +v_y)$
2	(v_x, v_y)	$(v_x, -v_y)$

- **S 系**
  s 系に対して相対速度 $\beta = v_x$ で運動する慣性系で、ここでは、2 は x 方向には移動せず、真上に向かって 1 と衝突した後に真下に戻ってくる。このときの速度を以下のように表すことにする。

	衝突前	衝突後
1	(V_{1x}, V_{1y})	$(V'_{1x} = V_{1x}, V'_{1y} = -V_{1y})$
2	$(V_{2x} = 0, V_{2y})$	$(V'_{2x} = 0, V'_{2y})$

ローレンツ変換で得られる速度の合成則を使ってやると、S 系における速度を、s 系における速度を用いて表すことができる。結果は以下のようになる：

$$\begin{aligned}
V_{1x} &= V'_{1x} = \frac{-v_x + (-v_x)}{1 - \beta(-v_x)} = \frac{-2v_x}{1+\beta^2} \\
-V_{1y} &= V'_{1y} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2} \qquad (1) \\
V_{2x} &= V'_{2x} = 0 \\
V_{2y} &= -V'_{2y} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

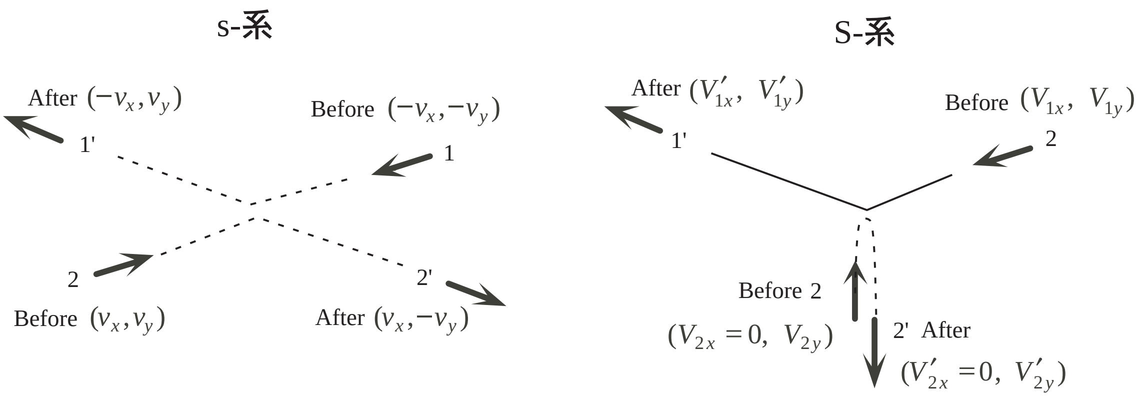

Figure 1: 2 粒子の衝突の様子。

これを用いて、y 方向の運動量の保存則を見てみよう。s 系においては、衝突前後の運動量の和（y 方向）は、衝突の前後でゼロであることは自明で、確かに運動量の保存 $p_y(1+2) = p'_y(1+2) = 0$ が成り立っている。一方、同じことを S 系から眺めるとどうであろうか。

$$\begin{aligned} P_y(1+2) &= mV_{1y} + mV_{2y} = -m\frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2} + m\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0 \\ P'_y(1+2) &= mV'_{1y} + mV'_{2y} = +m\frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta^2} - m\frac{v_y}{\sqrt{1-\beta^2}} = -P_y(1+2) \end{aligned} \tag{3}$$

となり、s 系と異なり、1,2 の運動量の和がゼロでないばかりか反応の前後で異なる（逆符号になる）ことがわかる。

運動量が保存されない理由を少し別の観点から考えてみよう。y 成分について考えてみると、運動量 $\vec{p} = \vec{v}$ の保存則は以下の 2 式を要請することになる:

$$\text{Frame } \ s: \qquad m(v_{1y} + v_{2y}) = m(v'_{1y} + v'_{2y}), \tag{4}$$

$$\text{Frame } \ S: \qquad m\left(V_{1y} + V_{2y}\right) = m\left(V'_{1y} + V'_{2y}\right), \tag{5}$$

これらの速度を微分を使って表すと、

$$\text{Frame } \ s: \qquad m\left(\frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt}\right) = m\left(\frac{dy'_1}{dt} + \frac{dy'_2}{dt}\right) \tag{6}$$

$$\text{Frame } \ S: \qquad m\left(\frac{dY_1}{dT} + \frac{dY_2}{dT}\right) = m\left(\frac{dY'_1}{dT} + \frac{dY'_2}{dT}\right) \tag{7}$$

ところが，ローレンツ変換のもとで座標変数 y, Y は不変に保たれるが、時間変数 t, T は変換される。このとき s 系で成立していた保存則が S 系ではもはや満足されない可能性が出てくる。そして実際に保存則 (5) は破れるのである。この問題の本質は、運動量が座標系に依存しない y 座標（の微分）を、座標系に依存する時間 t（の微分）で割ることによって定義されているところにある。

そこでもし、座標系に依存しない時間変数があれば（これを τ であらわすことにしよう)、相対論的にも座標系に依存せずに常に保存則を満足する運動量を構成することがで

きるであろう：

$$p_x = m\frac{dx}{d\tau}\,,\quad p_y = m\frac{dy}{d\tau}\,,\quad p_z = m\frac{dz}{d\tau}\,, \tag{8}$$

ここで，再び

- （静止）質量 m はその定義から相対論的に不変
- 上で議論してきたように、s, S 系の相対速度がそれらに共通する x 軸に平行な場合、y, z 座標はローレンツ変換のもとで不変
- 時間 τ はその定義から不変

であることに気づけば，運動量 (8) の y, z 成分は不変に保たれることは自明であろう。そこで、s 系における運動量の y, z 成分に対して保存則が成立すれば，S 系に対しても成り立つことも明白である。

固有時間

ここで導入された時間 τ は固有時間と呼ばれる。

B 君が地球を出発し宇宙旅行をして再び地球に戻り、親友の A 君に再会することを考えよう。ロケットは B 君の時計でちょうど 1 年後に地球に戻ってくるように、飛行プランが設計されているものとする。

宇宙旅行の間、B 君にとって 1 年の歳月が過ぎれば B 君は 1 歳年をとる。当たり前である。ところが地球に残っている A 君にとっては、B 君がもどってくるまでに 1 年以上の歳月が過ぎることになる。ロケットが速ければ速いほどより長い時間が経過する。しかしそれでも、B 君にとっては相変わらず 1 年の旅行である。

B 君にとって再び A 君と再開するまでに経過する時間（これは B 君にとっては必ず 1 年である）を「固有時間」という。

もう少し正確に言うと、以下のようになる。運動する対象に対してその時間の経過を測定するにあたって、その対象から離れた観測地点で測定するのか、あるいはその対象と一緒に動きながら時間の経過を測定するかによって時間の進み方が異なるのである。離れた観測者というのはいく通りもあり得て、その場合いろいろな相対速度で運動しながら、その対象を観測することになる。そこで観測する時間の長さもまちまちである。それに対して、対象とともに動くような観測者は一通りしかないので、そこで測定される時間の経過も一通りである。上の例では、B 君の時間経過である。

A 君が計る時間の経過を t, B 君の時間経過を τ とすると、

$$\tau = \sqrt{1-\beta^2}t\,. \tag{9}$$

一般に A 君を観測者、B 君を被観測者ということにして、被観測者が観測者に対して速さ v で運動するものとする。このとき相対論的に意味のある被観測者の運動量 (8) は

$$\vec{p} = m\frac{\vec{x}}{d\tau} = \frac{m\vec{v}^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{10}$$

と書かれることになる。ただし $\beta = v/c$。

エネルギー

前節では運動量について考えてきた。この節では、それと同じくらい重要な量であるエネルギーについて考察しよう。そのために、仕事とエネルギーの関係から出発する：

$$K = \int d\vec{s} \cdot \vec{F} \,. \tag{11}$$

ここで、$d\vec{s}$ は微笑変位、$\vec{F}$ は力である。そこで次に相対論的な力とは何か、ということが問題になる。それを

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{12}$$

によって定義する。ここで相対論的運動量

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

を用いて積分 (11) を実行する（１次元で考える)。

この積分を計算するために、はじめに静止していた $(v=0)$ 質量 m の物体が、終速度が v になるまで力 $\vec{F}$ を加え続けることを考える。すなわち、

$$\begin{aligned} K &= \int_0^v dxF \\ &= \int_0^v dx \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \int_0^v vd\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

最後の等号では $v = dx/dt$ を用いた。部分積分を行い積分を最後まで実行すると、次の結果を得る：

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - mc^2 \,. \tag{14}$$

これを相対論的な「運動エネルギー（Kinetic energy)」と定義する。以下の項で明らかになるように、相対論的な**全エネルギー**を (14) の引き算の項を除いて、

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{15}$$

と定めることにする。このエネルギー E は物体が静止している場合でもゼロにはならず、

$$E(v=0) = mc^2 \tag{16}$$

である．これを，質量 m の物体が持つ静止エネルギーという．これが，アインシュタインの主張した「質量とエネルギーの同等性」，$E = mc^2$（イー　イコール　エムシーの二乗）であり，物質の質量からエネルギーを取り出すという，20 世紀最大の発見の一つと言われている．

４元運動量

前節で定義された相対論的エネルギー (15) と運動量をまとめて、以下のように表現することができる．$\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,t$ に注意すると

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2\frac{dt}{d\tau} \\
\vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

または，まとめてベクトルの形にかけて

$$
(E/c, \vec{p}) = m\frac{d}{d\tau}(t, \vec{x})) \tag{18}
$$

このようにすると、$(E/c^2, \vec{p})$ は時空座標 $(t, \vec{x})$ と同じように変換することがわかる．すなわち、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} E' \\ p' \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ t \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

座標 (t, x) と同じようにローレンツ変換を受ける（y, z を含めた）４つ１組の量を，４元ベクトルという．とくにエネルギーと運動量の組を，４元運動量と呼ぶ．以下、エネルギーと運動量についていくつか注目すべき点をあげておく：

- **みかけの質量**

  式 (44) で、

$$
m^* \equiv \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{20}
$$

  を導入すると、エネルギーと運動量の式は

$$
E = m^*c^2\,, \quad \vec{p} = m^*\vec{v} \tag{21}
$$

  のように書くことができる。これらは、エネルギーに関しては $E = mc^2$ と、運動量に関してはニュートン力学の定義 $\vec{p} = m\vec{v}$ と同じ形をしている（m を m^* に置き換えればよい）。あるいは、ゆっくり動く物の（質量エネルギーと運動エネルギーを足した全）エネルギーと運動量を

$$
E = mc^2\,, \quad \vec{p} = m\vec{v} \tag{22}
$$

  の様に書いておくと、速く運動することによって、質量が m から m^* の様に見かけ上増加すると言うこともできる。

- **質量エネルギー**
  速度がゼロの場合 ($\vec{v}=0$)、$(E,\vec{p})=(mc^2,0,0,0)$ となり、４元運動量のうちエネルギーだけがゼロでない値をとる。これが静止エネルギーであり、質量とエネルギーの等価性を表している。

- **不変量**
  以前見たように，４元ベクトルの (時間成分)^2 − (空間成分)^2 はローレンツ変換のもとで不変に保たれる：

$$E^2-(cp)^2=\frac{m^2c^4}{1-\beta^2}-\frac{m^2c^2v^2}{1-\beta^2}=m^2c^4 \tag{23}$$

  すなわち，ミンコフスキー計量[1] のもとでの４元運動量の長さは（静止）質量にほかならない.

- **速度が遅い場合**
  通常の古典的な運動エネルギーと運動量が導かれる：

$$(E,\vec{p})\to\left(mc^2+\frac{1}{2}mv^2,m\vec{v}\right) \tag{24}$$

- **質量がゼロの場合**
  $E^2-(cp)^2=m^2c^4=0$ より、$E=cp$ が成り立つ。この関係は光に対して成り立ち、光が運動量を運ぶことを示している（光圧)。

質量エネルギーの解放

多くの化学反応ではエネルギーの放出（発熱）もしくは吸収（吸熱）がおこる。この際反応の前後の物質の間の質量は、ごくわずかであるが異なっている。例えば、1 モルの炭素が燃えると

$$C+O_2\to CO_2+394[kJ] \tag{25}$$

のように熱を生じる。このとき、反応の前後の質量には

$$\frac{394\times10^3}{(3\times10^8)^2}=4\times10^{-12}[kg] \tag{26}$$

だけ差が生じる。しかし通常は、このように小さな質量差を検知することはできないので、近似的に、化学反応の前後では、物質の質量は保存するという、「質量保存の法則」が成り立っている。

　しかし、核反応では、通常 1 パーセント前後の質量エネルギーが解放される。例えば、重水素からヘリウムへの核融合反応では、0.6 % の質量がエネルギーに転換する。従って、1 [g] の重水素から 0.994 [g] のヘリウムができたとすると、

$$0.006\times10^{-3}\times(3\times10^8)^2=5\times10^9[J] \tag{27}$$

[1]最後の「補足」の項を見よ。

程度の膨大なエネルギーを得ることができる。これは、炭素 1 [g] が燃えることによって得られるエネルギーのおよそ 10 万倍である。

このことをふまえて、これまで考えてきたような、超高速度による宇宙旅行がどのくらい（非）現実的なものかを理解することができる。

補足：ミンコフスキー空間

ふたたびローレンツ変換の式から始める：

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{28}$$

ここで

$$\cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,, \quad \sinh\phi = -\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{29}$$

によって角度変数 ϕ を導入すれば、ローレンツ変換は

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{30}$$

のように簡潔に書ける。さらに、虚数時間を導入し t を it に置き換え、t に関する式に i をかけて書き直すと、

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -i\sinh\phi \\ i\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{31}$$

ここで、指数関数と三角関数の間の関係式

$$\cos(ix) = \cosh x\,, \quad \sin(ix) = i\sinh x \tag{32}$$

を用いると、$\phi \to i\theta$ として

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \tag{33}$$

となって、これは、回転の変換公式に他ならない。

このように、ローレンツ変換は虚数時間という概念を導入することによって通常の空間回転と解釈することができる。回転の際に移り変わる（変換される）量と不変に保たれる量があった。前者はベクトルとかテンソルと呼ばれ、後者はスカラーと呼ばれる。あるベクトルの座標成分は、座標系を空間回転すると異なる値に変換される。一方、ベクトルの長さは回転によって変化しない。

以前、$t^2 - x^2$ という量はローレンツ変換のもとで不変に保たれることを見た。そして今回ローレンツ変換を回転に直すために、$t \to it$ という虚数への置き換えをした。この

とき、上の不変量は $t^2 - x^2 \to -t^2 - x^2$ となり、ベクトルの長さの２乗になる（マイナスの符号をつけたもの。この符号はあまり問題にしないことにする)。通常ベクトルの長さを求めるときには、各成分の２乗を足せばよい。より正確には、係数 $+1$ をかけて足す。このようにして長さが求まる空間をユークリッド空間という。また、これら係数の集まり（数学的には２回のテンソルと呼ばれる量）をユークリッド計量とよぶ。計量とは、ある空間で長さを定義する物差しの尺度である。ところが時空間の場合、空間と時間の各成分の２乗を足すときに、時間の前の係数を -1 にして足すことによって不変量、すなわち長さを求めることができる。計量の各成分の符号が異なるような空間をミンコフスキー空間とよび、また、その計量はミンコフスキー計量とよばれる。我々が住む４次元時空はミンコフスキー空間なのである。

ここまでの話は、いわゆる慣性系での話であり、重力の影響を全く考えてこなかった。しかし宇宙には多くの天体が存在し、現実には重力の影響を決して無視することはできない。このような状況は一般相対性理論によって論ずることができる。そのためには、曲がった空間の幾何学を必要とする。曲がった空間では、長さを測るのに、その場所に応じた物差し（計量）を用意しなければならない。まっすぐなユークリッド、もしくはミンコフスキー空間で、計量がどの場所でも同じであったのに対して（長さを求めるために足したベクトルの各成分の前の係数は場所によらない数)、このことは複雑な計算法を必要としている。

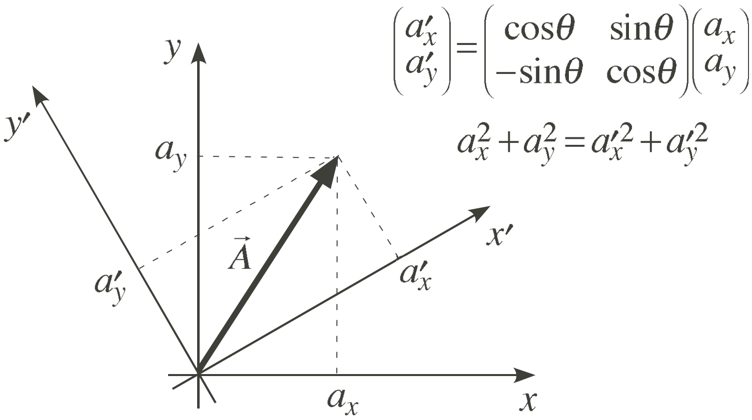

Figure 2: 座標系の回転で移り変わるベクトルの成分と不変な長さ。

話題：反粒子とディラック行列

相対性理論の確立にともなって、その量子力学的な定式化が 1920 年代に入って行われた。その突破口を開いて有名な電子論を確立し、原子の詳細な構造を説明するとともに、反粒子の存在を理論的に予言したのが、パウリに天才と言わしめたイギリスの物理学者ディラックである。彼のアイデアをごく簡単に紹介する。

ニュートン力学（古典力学)、アインシュタイン力学（相対論的力学）のいずれにおいても重要な役割を果たすのが、エネルギーと運動量という概念である。ニュートン力学に

おいては、

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{34}$$

の関係が成り立つことがよく知られている（確かめよ！）。この式は、任意の実数値をとる運動量 p に対して、運動エネルギー E は必ず正の値をとる。この式は、しかしながら、E と p に対して対称な形になっていない。相対論においては、時間と空間の関係がそうであったように、これらの間には対称な関係式のあることが望ましい。

さて、相対論に移行すると対応する関係式は（この節では再び $c = 1$ とおく）

$$E = \sqrt{p^2 + m^2} \tag{35}$$

これは、まだしかし、２乗することによって、

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{36}$$

のように、より対称な関係式を得ることができる。ところが２乗が現れてくるために、逆にエネルギーを求める式に戻すと、

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2} \tag{37}$$

のように正負２つの解が存在することになる。正のエネルギーは通常の粒子に対応する。負のエネルギーに対してディラックが与えた解答が、反粒子である。反粒子の存在は、エネルギーと運動量の間に相対論的な対称性を要請することによって必然的に現れなければならないのである。

このことを理解するためには量子力学に立ち入らなければならない。詳しいことをここで解説することはできないが、ディラックが演じたアクロバット的な計算術の一端を紹介することにする。

量子力学の一般原理によると、エネルギーと運動量は線形の関係式で結ばれることが望まれる。そこで、ディラックは、エネルギーと運動量のあいだに、(35, 37) のような２乗を含む関係式を避けて、線形の

$$E = bm + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 \tag{38}$$

という関係式を仮定した。ここで (p_1, p_2, p_3) は運動量ベクトルの各成分で、(b, a_1, a_2, a_3) は、線形関係式を特徴づける係数である。質量 m の前の係数が１ではなく β とおかれてある点にも注意しなければならない。運動量がゼロの場合を考えると、$b = 1$ が予想されることになるが、ディラックは対称な式 (36) を考えていたために、あえて１とおかなかった。そして、彼は (38) から (36) が導かれるべきという要請をした。これは可能なのだろうか。試しに (38) を２乗してみよう：

$$\begin{aligned}
E^2 &= (bm + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3)^2 \\
&= b^2 m^2 + a_1^2 p_1^2 + a_2^2 p_2^2 + a_3^2 p_3^2 \\
&\quad +2ba_1 m p_1 + 2ba_2 m p_2 + 2ba_3 m p_3 \\
&\quad +2a_1 a_2 p_1 p_2 + 2a_1 a_3 p_1 p_3 + 2a_2 a_3 p_2 p_3\,. \qquad (39)
\end{aligned}$$

これが $E^2 = p^2 + m^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2$ となるとして係数を比較してみると、そのような解は存在し得ないことがわかる。

この問題を解決するためにディラックは、係数 (b, a_1, a_2, a_3) を単なる数ではなく、かけたときに交換法則の成り立たない行列ではないかと考えた（パウリはこれをアクロバット的だと評した）。すなわち、

$$\begin{aligned}
&(bm + a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3)^2\\
&= b^2m^2 + a_1^2p_1^2 + a_2^2p_2^2 + a_3^2p_3^2\\
&+(ba_1 + a_1b)mp_1 + (ba_2 + a_2b)mp_2 + (ba_3 + a_3b)mp_3\\
&+(a_1a_2 + a_2a_1)p_1p_2 + (a_1a_3 + a_3a_1)p_1p_3 + (a_2a_3 + a_3a_2)p_2p_3
\end{aligned} \tag{40}$$

として、それぞれの係数に対して

$$\begin{aligned}
&b^2 = a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 1\\
&ba_1 + a_1b = ba_2 + a_2b = ba_3 + a_3b\\
&= a_1a_2 + a_2a_1 = a_1a_3 + a_3a_1 = a_2a_3 + a_3a_2 = 0
\end{aligned} \tag{41}$$

を考えた。彼はこの関係式を満たす係数（行列）として

$$\begin{aligned}
b &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\\
a_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{42}$$

という 4 個の 4×4 の行列を見いだした。ここで $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ はかつてパウリによって導入されたパウリのスピン行列である：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

これら４個の行列 b, a_1, a_2, a_3 はディラック行列として、その後相対論的、かつ量子力学的に電子を記述する際に不可欠のものとなった。

まとめ

1. 相対性理論ではエネルギーと運動量は、４元ベルトルの異なる成分として表される。

$$\begin{aligned}
E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2\frac{dt}{d\tau}\\
\vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau}
\end{aligned} \tag{44}$$

2. ４元運動量は

$$E^2 - p^2 = m^2 \tag{45}$$

を満足し、静止質量 m はローレンツ変換のもとで不変に保たれる。

3. 質量とエネルギーは等価であり、次の関係式を満足する

$$E = mc^2 \tag{46}$$

問題

1. ある人が地球から 100 光年はなれた天体に向かって光の速さの 90 % という超高速で旅行する。出発後間もなくこの速度に到達できたとして、<u>この人</u>は何年で目的地の天体に到着するか。

2. この速さで進むとき、運動エネルギーは全エネルギーの何%になるか。また、それは静止質量の何%か。

3. この運動エネルギーを獲得するために、ロケットにはスーパー重水素核融合エンジンを搭載しよう（そんなものは当分できそうにないが)。すなわち、重水素をヘリウムに核融合して、解放される 0.6 %の質量エネルギーを推進力にする。理想的な場合として、解放されたエネルギーの 100 %がロケットの推進に使われるとする。ロケット本体と人の重さをあわせて 200 kg としたときに、どのくらいの重水素燃料を必要とするだろうか。燃料自体も一緒にのせていく必要があるが、この際このことは無視しても（ばかげているが）かまわないとする。

4. 運動方程式

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{47}$$

を考えよう。これを解いてはじめに運動量が p_i にあった物体が、（加速、減速して）運動量 p_f になるのにかかる時間を、次の式で計算することができる：

$$T = \int_{p_i}^{p_f} \frac{dp}{F} \tag{48}$$

一定の力の場合には、F を積分の外に出すことができる。また、$dp = d(mv/\sqrt{1-v^2})$, $(c = 1)$ を使うと、時間と速さの関係を求める式になる。例えば、初速度ゼロからスタートして一定の力を受けながら加速する物体の運動を考えることができる。静止系で物体が加速していく様子を観測する系の時間を t、物体と一緒に運動する系の（固有）時間を τ として、v, t および v, τ の関係式を求めよ。$d\tau = \sqrt{1-v^2}dt$ を使う。

解答：

$$t = \frac{m}{F}\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,, \quad \tau = \frac{m}{2F}\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\,. \tag{49}$$

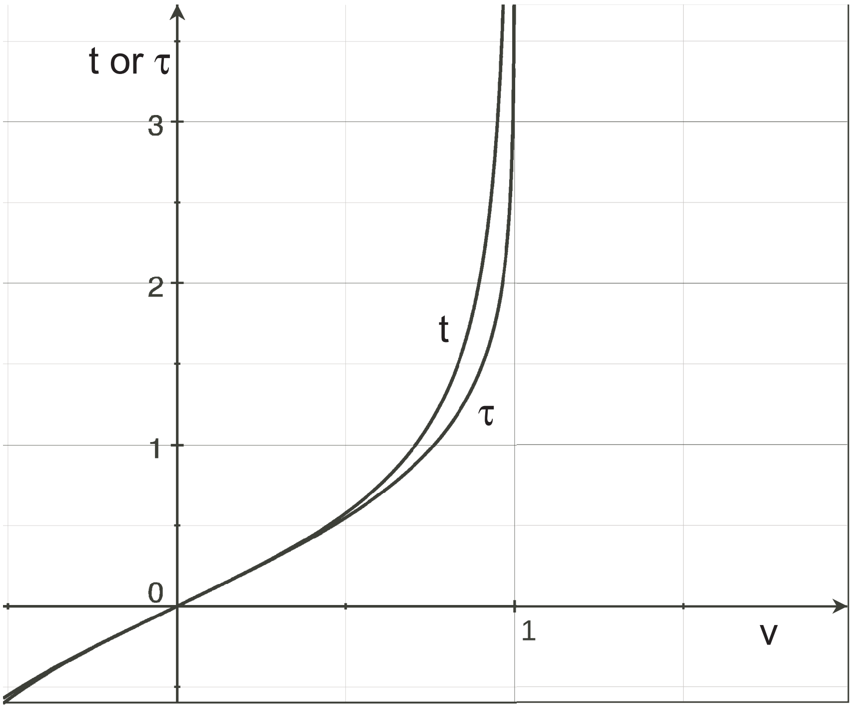

Figure 3: 一定の力を受けて加速する物体の速さと時間の関係