

# ローレンツ変換

# ガリレイ変換

古典力学の仮定

$$\begin{cases} t = t' \\ \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + ut \\ y = y', z = z' \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'} \quad \text{から}$$

左下の式をS, S'系で微分して

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad \text{速度の加算性}$$

# 何が必要か？

## 1. 速度の相対性

- (1) S系から見るとS'系は速度  $u$  で動いている
- (2) S'系から見るとS系は速度  $-u$  で動いている

## 2. 光速不変の原理

これらを満足する線形変換を考える

S系で見た2倍の長さは、S'系で見てもやはり2倍だろう

# 線形変換

速度  $u$  を  $x$  方向にとると、  
線形変換は  $x$  と  $t$  を関係づける

$$t' = pt + qx$$

$$x' = rt + sx$$

未知数  $p, q, r, s$  を決める

# 1. 速度の相対性

S'系の原点  $x' = 0$  はS系から見て速度  $u$  で動いている

$$rt + sx = 0$$

$$\frac{x}{t} = -\frac{r}{s} = u \quad \Rightarrow \quad r = -su \quad (1)$$

同様に、S系の原点のことを考えると

$$r = -pu \quad (2)$$

## 2. 光速度不変

S系で  $x = ct$  ならばS'系で  $x' = ct'$

$$x' = ct' = c(pt + qx) = c(pt + qct) = cpt + c^2qt$$

$$x' = rt + sx = rt + sct$$

これから

$$r + sc = cp + c^2q \quad (3)$$

この式は光速度  $c$  の符号を変えても成り立つので

$$r - sc = -cp + c^2q \quad (4)$$

(1) ~ (4)のうち独立な式は3つ

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

これが成り立つなら、相対性から

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & u/c^2 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

下の式を上のに代入して

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \beta = \frac{u}{c}$$

# ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (u / c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



$c = 1$  としてみると

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

# 確認と応用

$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

## 1. 速度の相対性

S系から見たS'系の原点  $x' = 0$  の速度

$$-ut + x = 0$$

$$-udt + dx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = u$$

S'系から見たS系の原点  $x = 0$  の速度をもとめることもできる

## 2. 時間の遅れ

S'系の原点  $x' = 0$  におかれた時計がS'系で  $t'$  経過するとき、S系での時間経過は？

$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad 0 = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

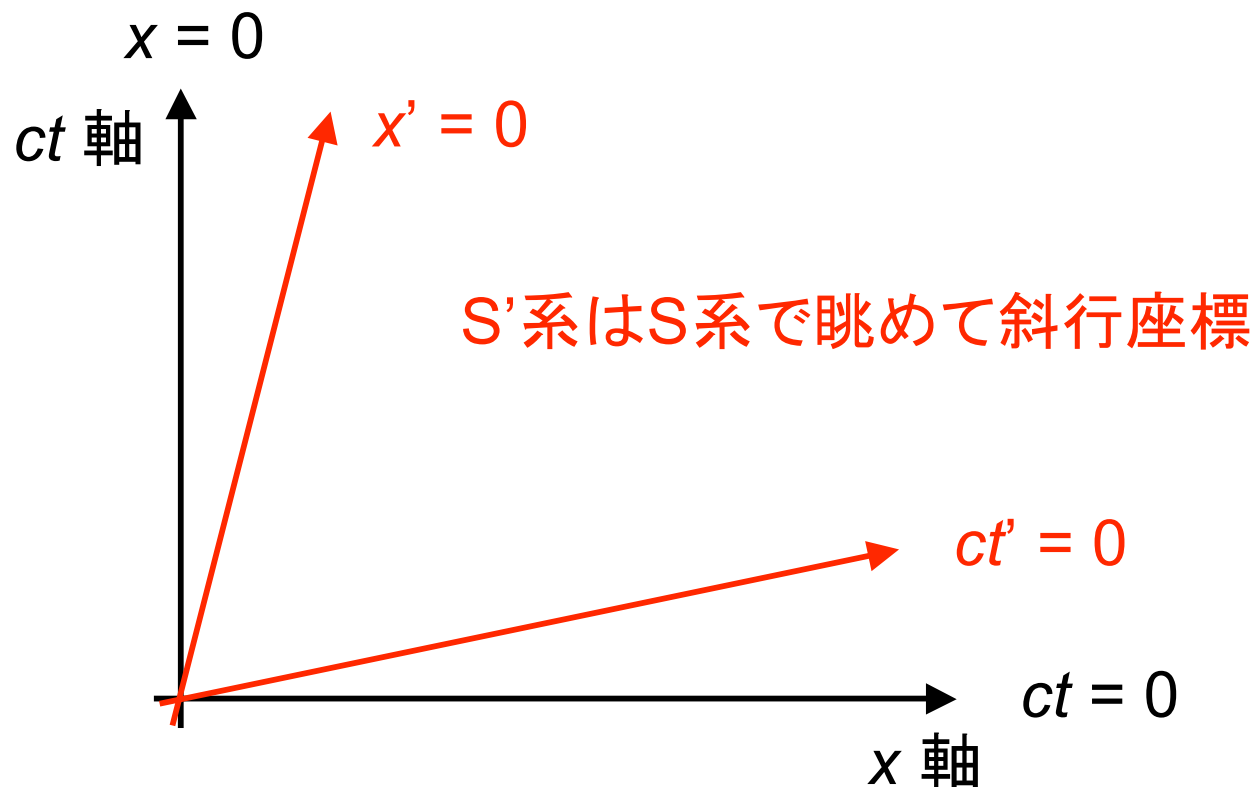
$$t' = \sqrt{1 - \beta^2} t$$

### 3. 時空の世界線

S、S'系の座標系を描く  
まず次元をそろえるために

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$



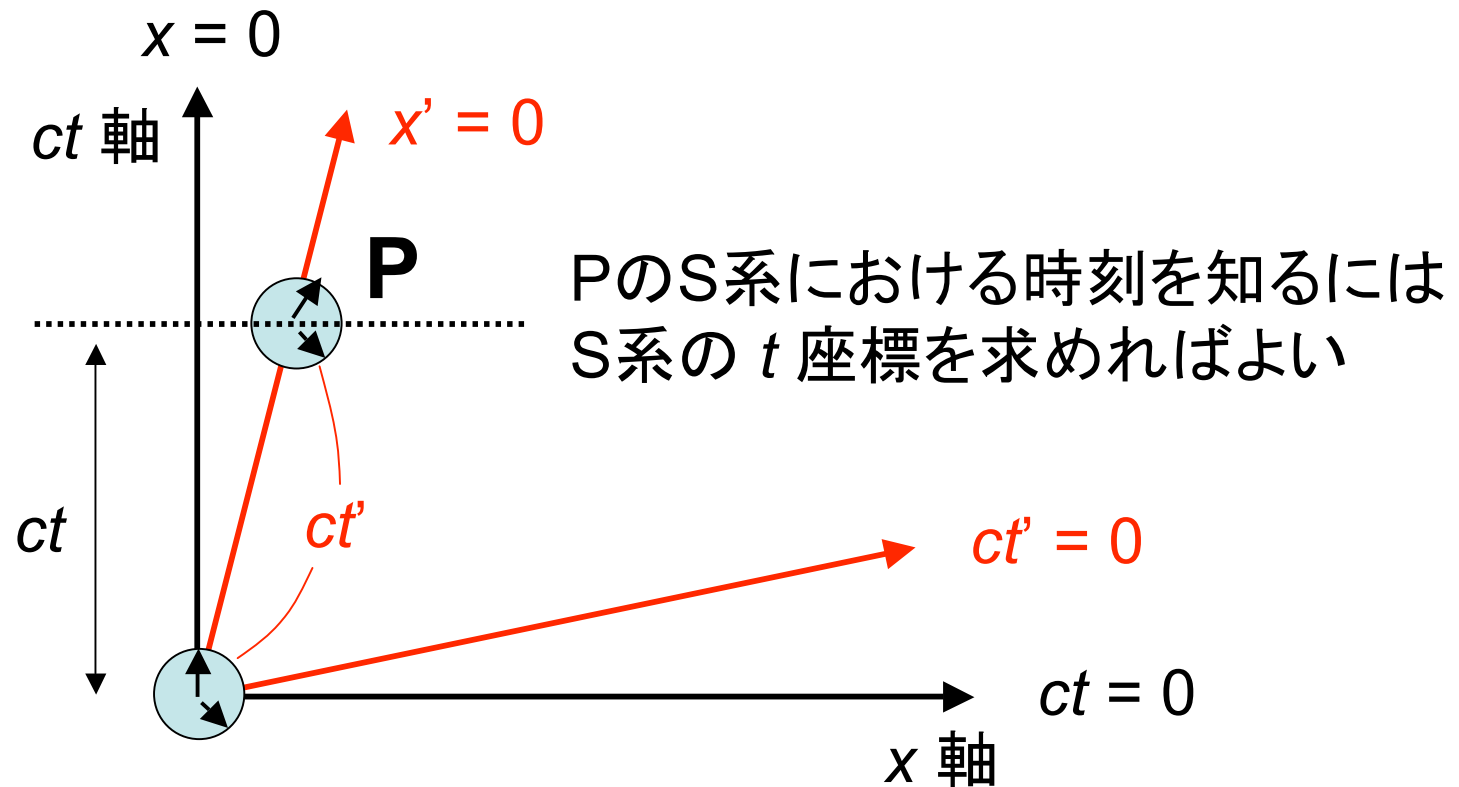
## 2'. 時間の遅れ

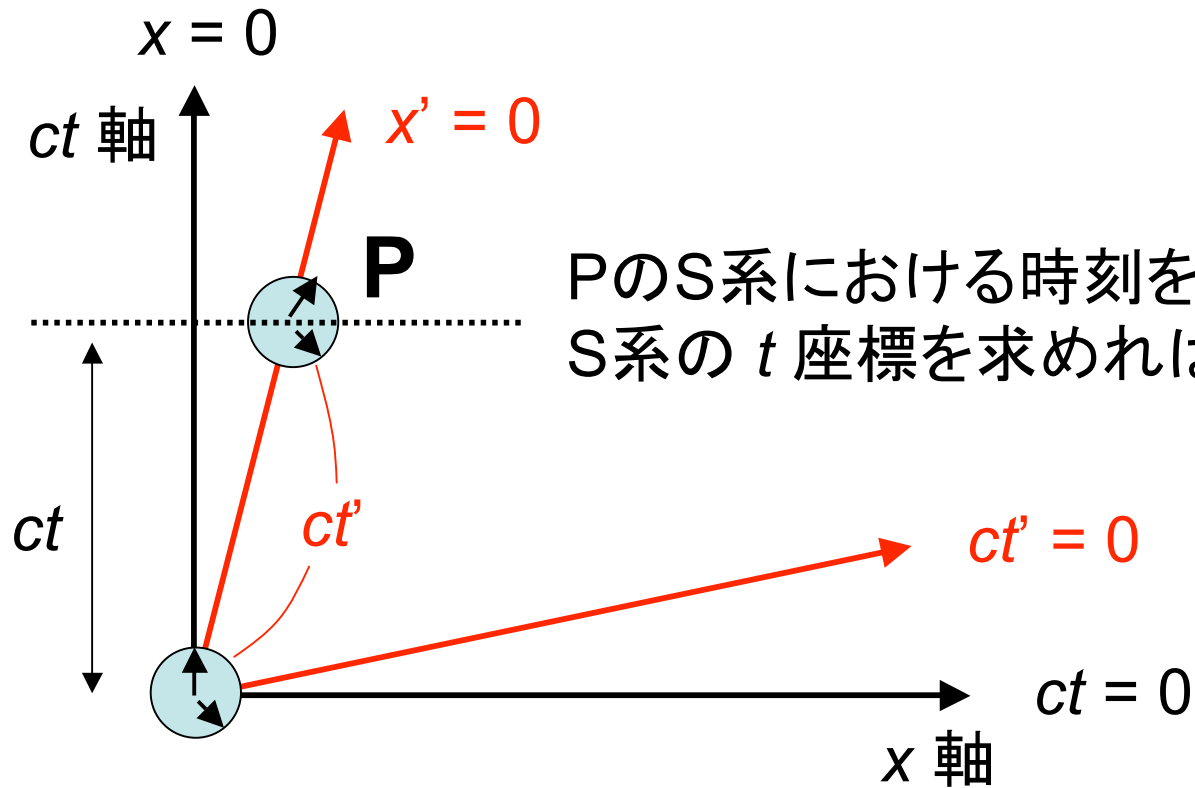
S'系の原点に置かれた時計

事象Pを観測する = Pの座標を知る

=>

SとS'で座標成分は異なる

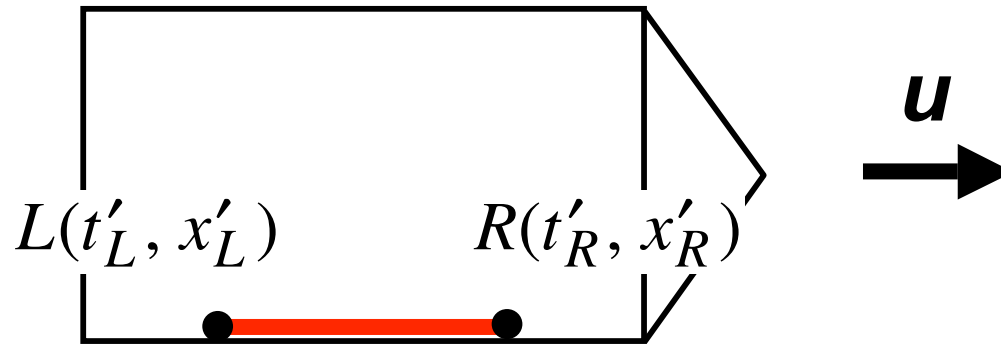




$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad 0 = x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

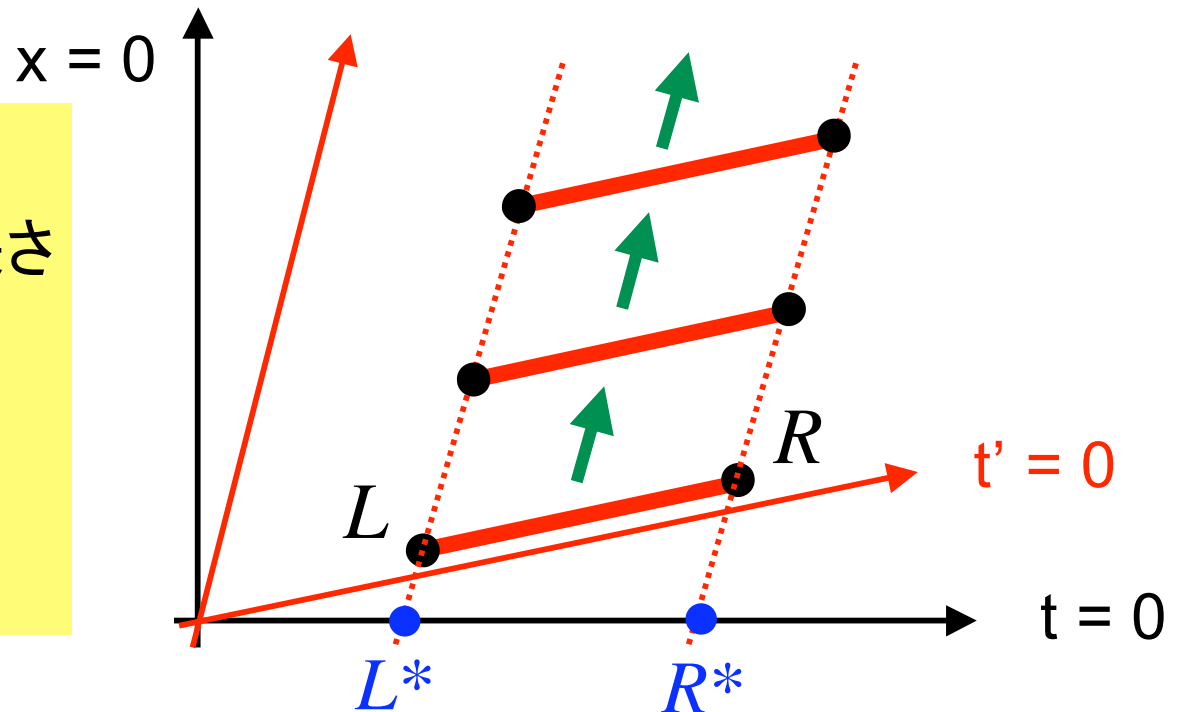
$$t' = \sqrt{1 - \beta^2} t$$

# 4. S'系のものさしとローレンツ収縮

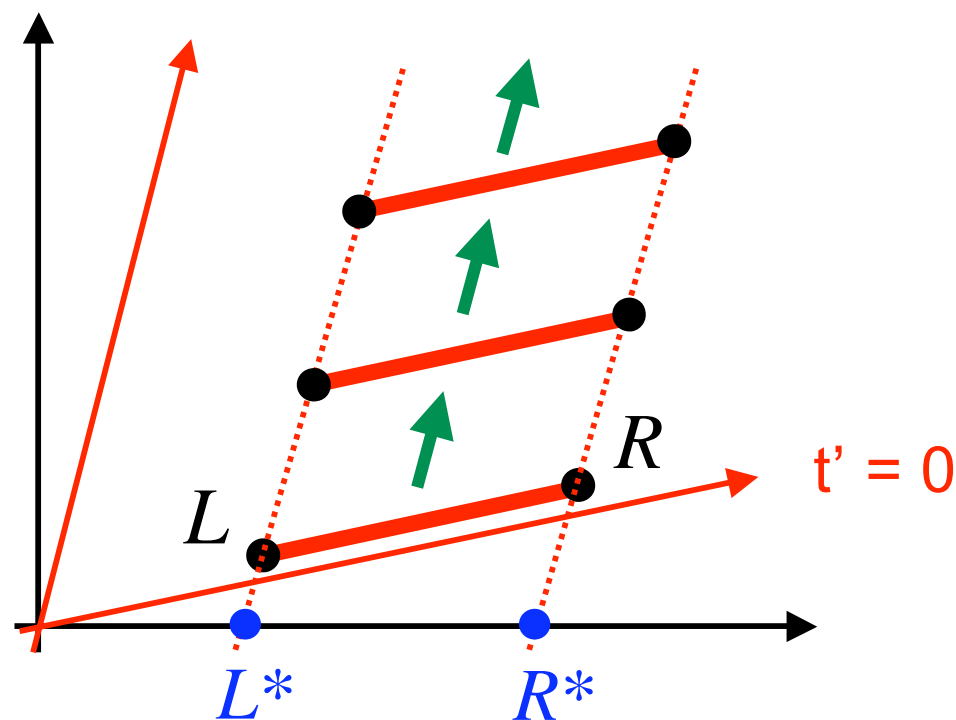


S'系での長さ $LR$ と  
S系への射影 $L^*R^*$ の長さ  
を比較する

$LR$ はS'系で同時刻  
 $L^*R^*$ はS系で同時刻



$$\left\{ \begin{array}{l} t'_L = \frac{t_L - (u/c^2)x_L}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'_L = \frac{-ut_L + x_L}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t'_R = \frac{t_R - (u/c^2)x_R}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'_R = \frac{-ut_R + x_R}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right.$$



条件  $t_L = t_R$  を課すと

$$x_L - x_R = \sqrt{1-\beta^2} (x'_L - x'_R)$$



# 5. 光速度不変

S系で  $v = c$  ならば S'系でも  $v' = c$

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

微分して

$$cdt' = \frac{cdt - \beta dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dx' = \frac{-\beta cdt + dx}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

辺々で割り算して

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \text{ならば} \quad \frac{dx'}{dt'} = c \quad \text{が示せる}$$

## 6. 速度の合成

$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad \text{を使って}$$

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt}, \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt}, \quad v_z \equiv \frac{dz}{dt} \quad \text{と} \quad v'_x \equiv \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y \equiv \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z \equiv \frac{dz'}{dt'}$$

の関係を導くことができる。結果は:

$$v'_x = \frac{-u + v_x}{1 - (u/c^2)v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - (u/c^2)v_x}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 - (u/c^2)v_x}$$

# 7. 4次元時空

$c = 1$ とにおいて時間と空間を対等に扱う

$$\begin{cases} t' = \frac{t - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ x' = \frac{-\beta t + x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

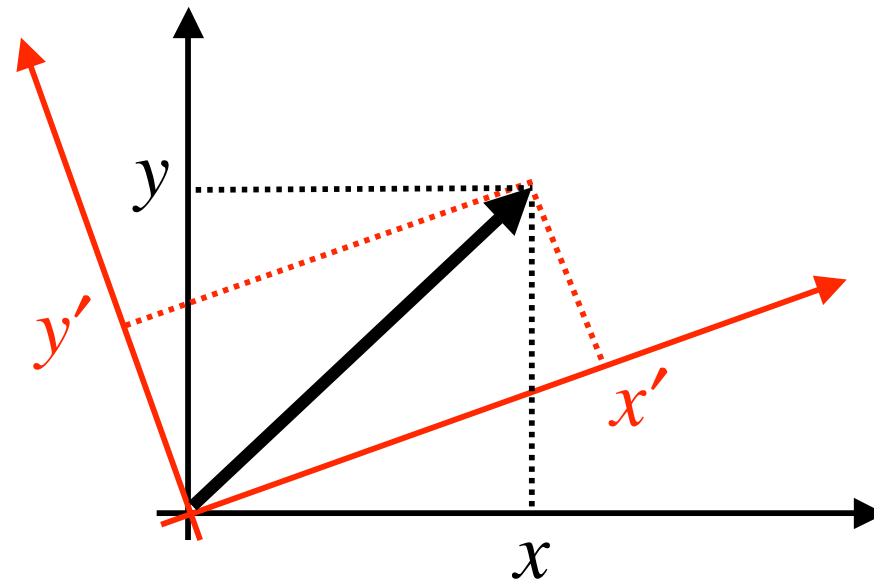
$$t \rightarrow it, \beta \rightarrow i\beta \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \cos \theta, \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \sin \theta \quad \text{とすると}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換は  
4次元(複素)時空の  
回転とみなせる

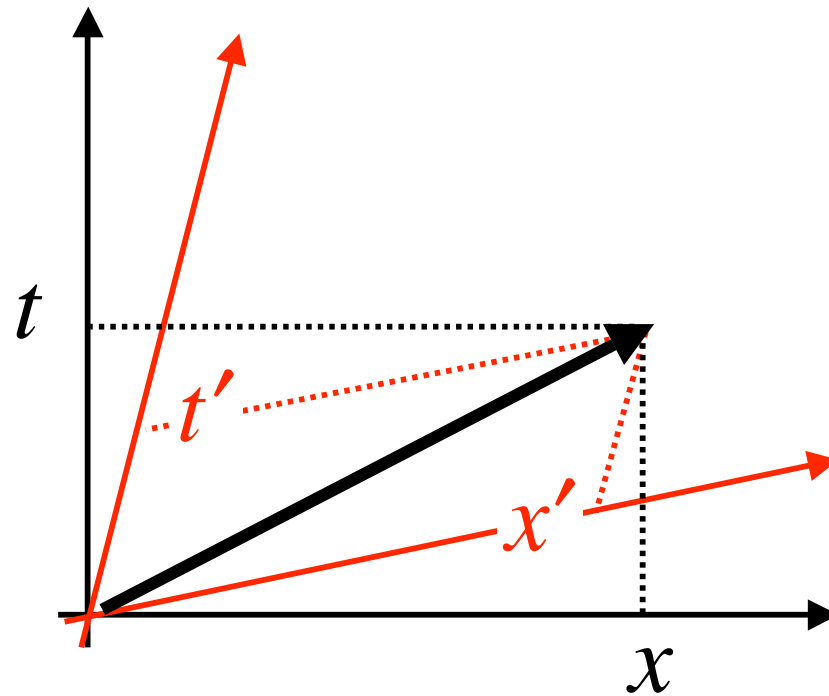
## 8. 不変量

回転の元で2点間の距離は不変に保たれる



$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 \quad \text{ユークリッド}$$

# ローレンツ変換の場合



$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2 \quad \text{ミンコフスキー}$$