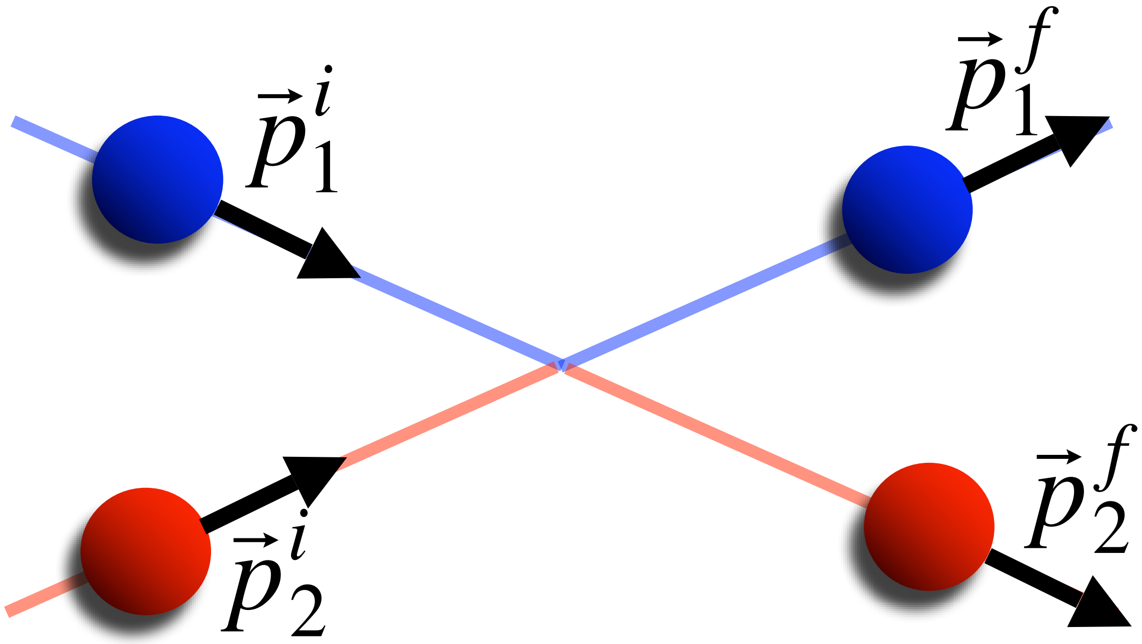
相対論的運動量と
運動方程式

問題（矛盾点）

運動量の保存が成り立たない？



$$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} \neq \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f} \quad \cdots \quad ?$$

簡単な説明

$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$　のy成分

$$m_1 \frac{dy^{i}{}_1}{dt^{i}{}_1} + m_2 \frac{dy^{i}{}_2}{dt^{i}{}_2} = m_1 \frac{dy^{f}{}_1}{dt^{f}{}_1} + m_2 \frac{dy^{f}{}_2}{dt^{f}{}_2} \qquad (1)$$

時空座標にそれぞれの粒子のラベルがついていることに注意

ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (u / c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

簡単な説明

$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$ のy成分

$$m_1 \frac{dy^i{}_1}{dt^i{}_1} + m_2 \frac{dy^i{}_2}{dt^i{}_2} = m_1 \frac{dy^f{}_1}{dt^f{}_1} + m_2 \frac{dy^f{}_2}{dt^f{}_2} \qquad (1)$$

時空座標にそれぞれの粒子のラベルがついていることに注意

別の座標系では

$$m_1 \frac{dy_1'^i}{dt_1'^i} + m_2 \frac{dy_2'^i}{dt_2'^i} = m_1 \frac{dy_1'^f}{dt_1'^f} + m_2 \frac{dy_2'^f}{dt_2'^f} \qquad (2)$$

このため、Lorentz変換で(1)と(2)は相容れない
特に、時間が粒子、座標系によって変わってしまうことが問題

相対論的運動量

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

τ は固有時間

相対論的運動量

$$\boxed{\vec{p} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \tau \text{ は固有時間}}$$

相対論的運動方程式

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)}$$

例：一定の力を受けて加速する粒子

力と運動の方向は同じとする

$$F = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{d\tau} \right) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2}\,dt} \right) = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

例：一定の力を受けて加速する粒子

力と運動の方向は同じとする

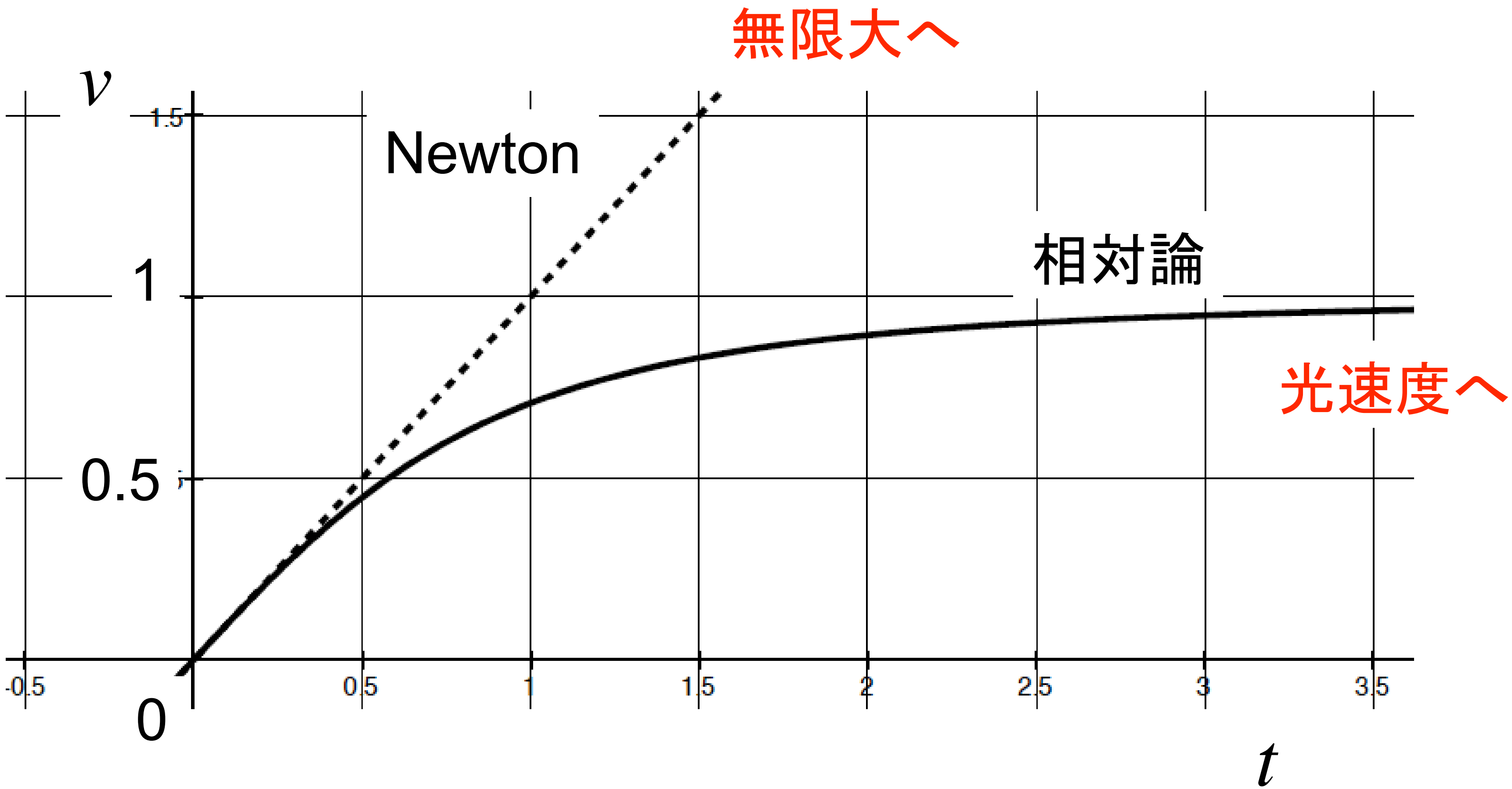
$$F = \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{d\tau} \right) = m \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2}\,dt} \right) = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{dv}{dt}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

この式を解くと

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + a^2 t^2}}, \quad a = \frac{F}{m}$$

速度の時間変化



エネルギー

運動エネルギー

$$K = \int d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int d\vec{s} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

計算 : 力と移動の向きを同じに取る

$$K = \int_0^v dxF = \int_0^v dx \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \int_0^v vd\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$\boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

静止エネルギーとして $\boxed{E = mc^2}$

四元運動量

$$(E, \vec{p}) = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$ なので

$$(E, \vec{p}) = m\left(c^2 \frac{dt}{d\tau}, \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) \xrightarrow{c=1} m\frac{d}{d\tau}(t, \ \vec{x})$$

τとmはローレンツ変換の元で不変なので

$(E, \vec{p})$ は $(t, \ \vec{x})$ と同じように変換する

四元運動量（四元ベクトル）

$(E, \vec{p})$ のように、ローレンツ（座標）変換の元で

$(t,\ \vec{x})$ と同じように変換する量を、四元ベクトルという

ベクトル

（1）成分をもった量（物理量＝観測される量）
（2）座標変換の元で一定の規則に従って移り変わる量

スカラー

座標変換の元で変換しない、一定（固有）の量

一般にはテンソル

$T_{ijk\cdots}$