

不確定性關係

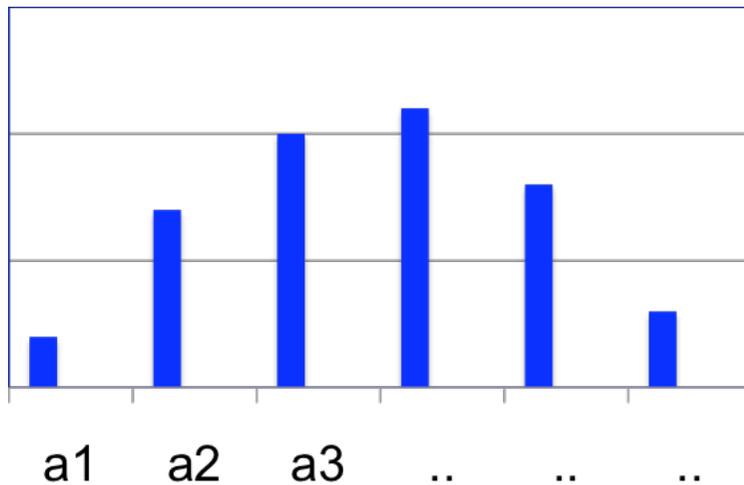
Werner Karl Heisenberg

1901-1976



行列力学

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & \cdots \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & \cdots \\ h_{21} & h_{21} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

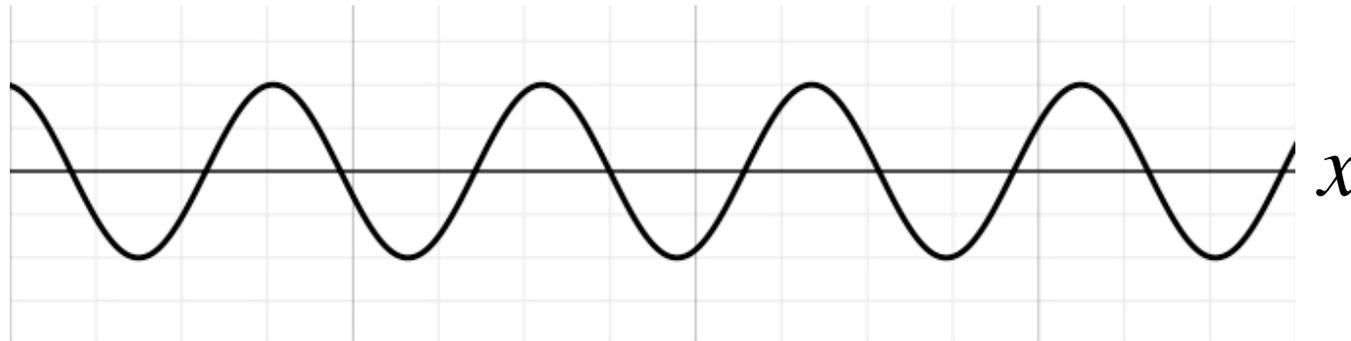


不確定性關係

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$$

波の性質

$$\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) = \sin\left(2\pi\frac{px}{h}\right) = \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) \xrightarrow{\hbar=1} \sin(px)$$



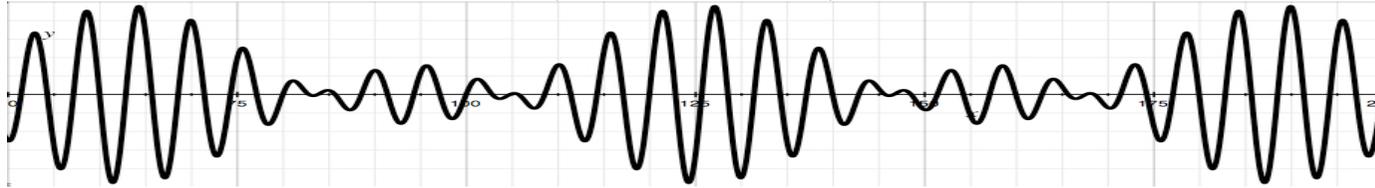
運動量 p の定まった波は無限に広がっている

空間の狭い領域にとどませるにはどうしたらよいか？

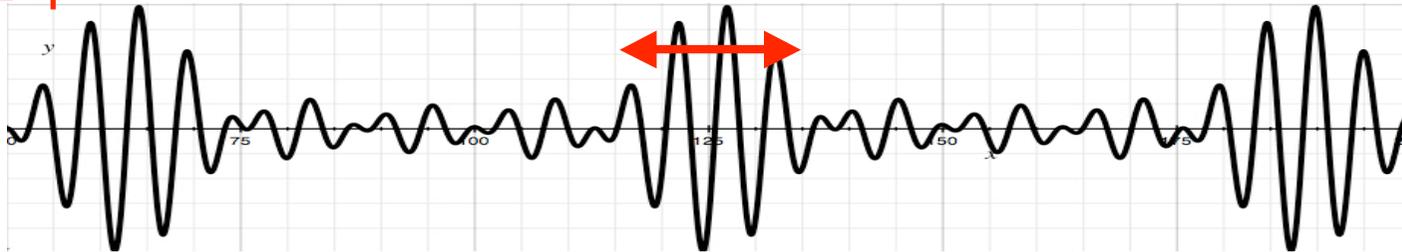
異なる運動量の波を重ね合わせてみる

$$\sum_n^{n_{\max}} \sin[(1 + 0.1n)x]$$

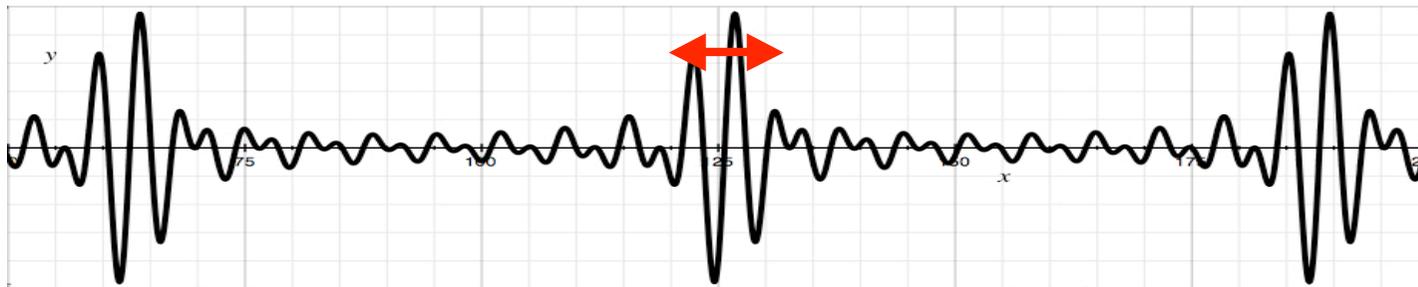
$n_{\max} = 2$



$n_{\max} = 4$



$n_{\max} = 8$



項の数に反比例して幅が狭まる

異なる運動量の波を重ね合わせる

=>

運動量の不確定さを増やしていく

=>

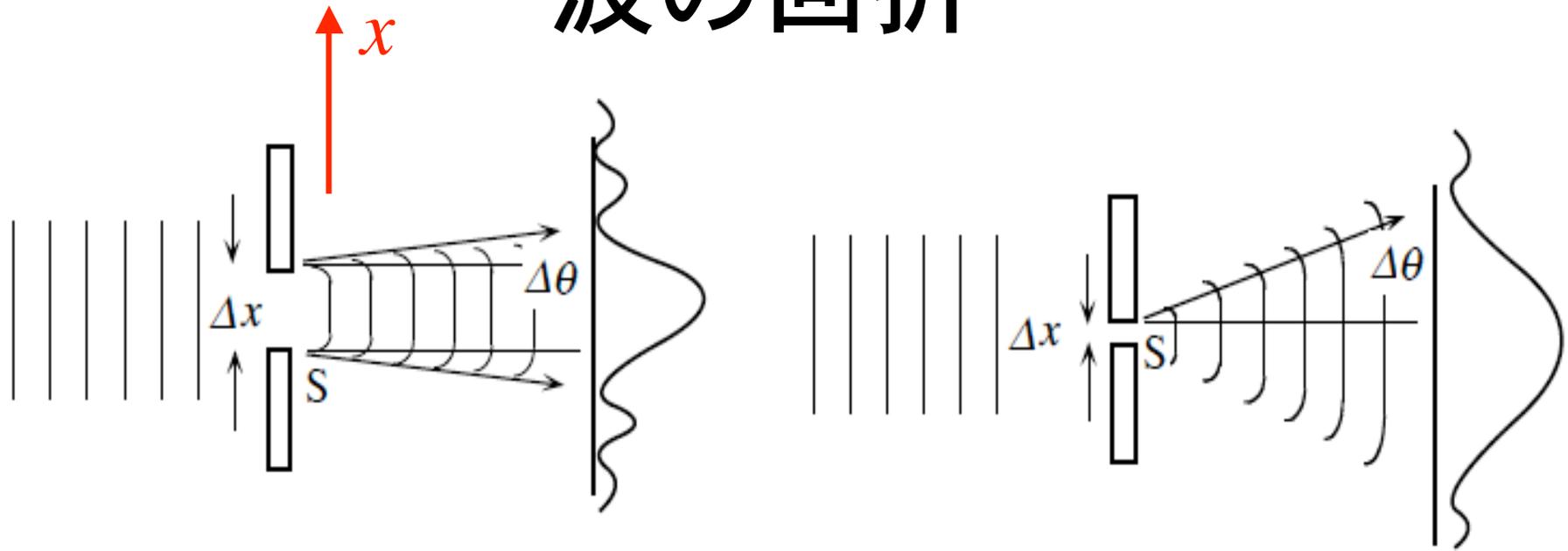
存在領域(位置)がより限られてくる

位置と運動量を同時に定めることは不可能

不確定性関係

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

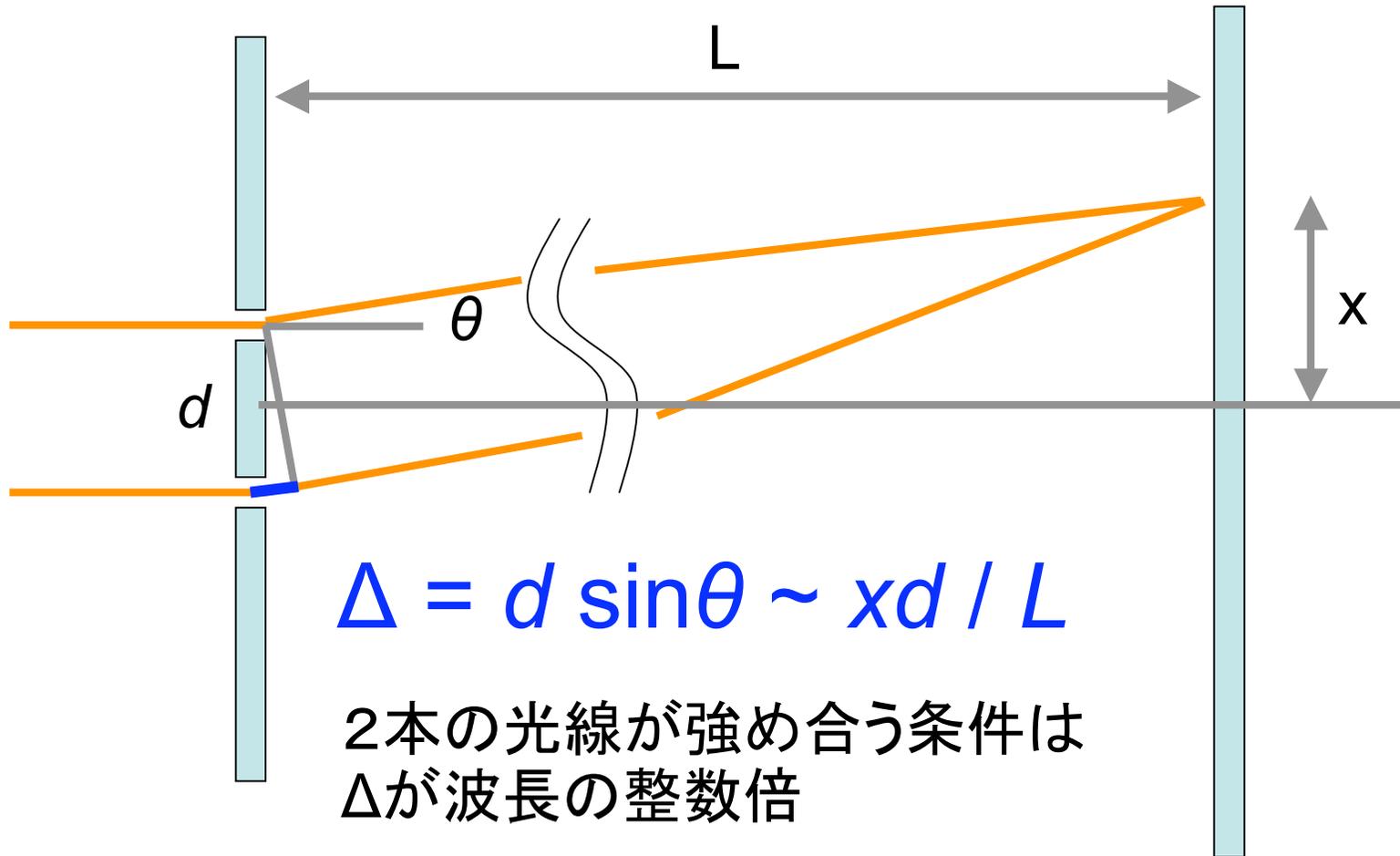
波の回折



$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{D} \xrightarrow{\text{ドブロイの関係式}} p\Delta\theta \sim \frac{h}{D}$$

$$p\Delta\theta \sim \Delta p \quad D \sim \Delta x$$

$$\Delta x \Delta p \sim h$$



$$\Delta = d \sin\theta \sim xd / L$$

2本の光線が強め合う条件は
 Δ が波長の整数倍

$$\frac{xd}{L} = n\lambda, \quad x = n \frac{\lambda L}{d}$$

$n = 1, x/L \sim \theta, d = D$ とおけば回折の場合と同じ

問：不確定性関係を使って水素原子の基底状態のエネルギーを変分によって求めることが出来る。

(1) 全エネルギーを運動量と半径の関数として表せ。

(2) 不確定性関係を使って運動量を消去せよ。

(3) エネルギーの運動項、ポテンシャル項、全エネルギーを半径の関数としてプロットせよ。