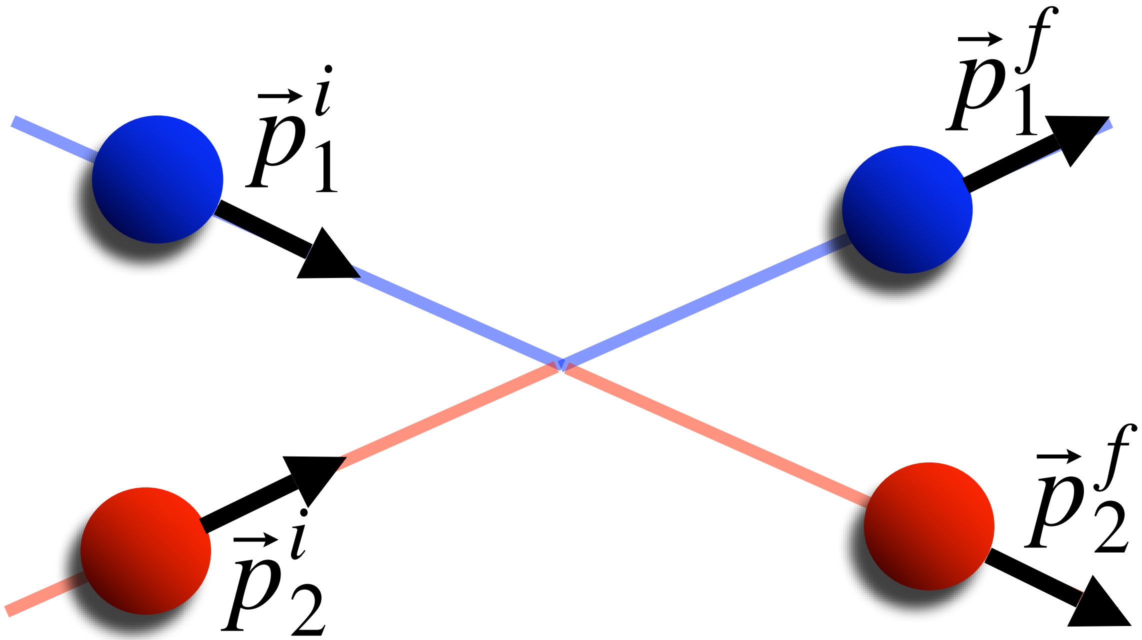
相対論的運動量と
運動方程式

問題（矛盾点）

運動量の保存が成り立たない？



$$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} \neq \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f} \quad \cdots \quad ?$$

簡単な説明

$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$ のy成分

$$m_1 \frac{dy^i{}_1}{dt^i{}_1} + m_2 \frac{dy^i{}_2}{dt^i{}_2} = m_1 \frac{dy^f{}_1}{dt^f{}_1} + m_2 \frac{dy^f{}_2}{dt^f{}_2} \qquad (1)$$

時空座標にそれぞれの粒子のラベルがついていることに注意

ローレンツ変換

$$t' = \frac{t-(u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut+x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$y' = y, \quad z' = z$$

簡単な説明

$\vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f}$ のy成分

$$m_1 \frac{dy^i{}_1}{dt^i{}_1} + m_2 \frac{dy^i{}_2}{dt^i{}_2} = m_1 \frac{dy^f{}_1}{dt^f{}_1} + m_2 \frac{dy^f{}_2}{dt^f{}_2} \qquad (1)$$

時空座標にそれぞれの粒子のラベルがついていることに注意

別の座標系では

$$m_1 \frac{dy_1'^i}{dt_1'^i} + m_2 \frac{dy_2'^i}{dt_2'^i} = m_1 \frac{dy_1'^f}{dt_1'^f} + m_2 \frac{dy_2'^f}{dt_2'^f} \qquad (2)$$

yはLorentz変換のもとで不変だが、t は変換される
このため、Lorentz変換で（1）と（2）は相容れない

相対論的運動量

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

τ は固有時間

相対論的運動量

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

τ は固有時間

相対論的運動方程式

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)$$

例：一定の力を受けて加速する粒子

力と運動の方向は同じとする

$$F = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{d\tau} \right) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2}\,dt} \right) = \frac{m}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

例：一定の力を受けて加速する粒子

力と運動の方向は同じとする

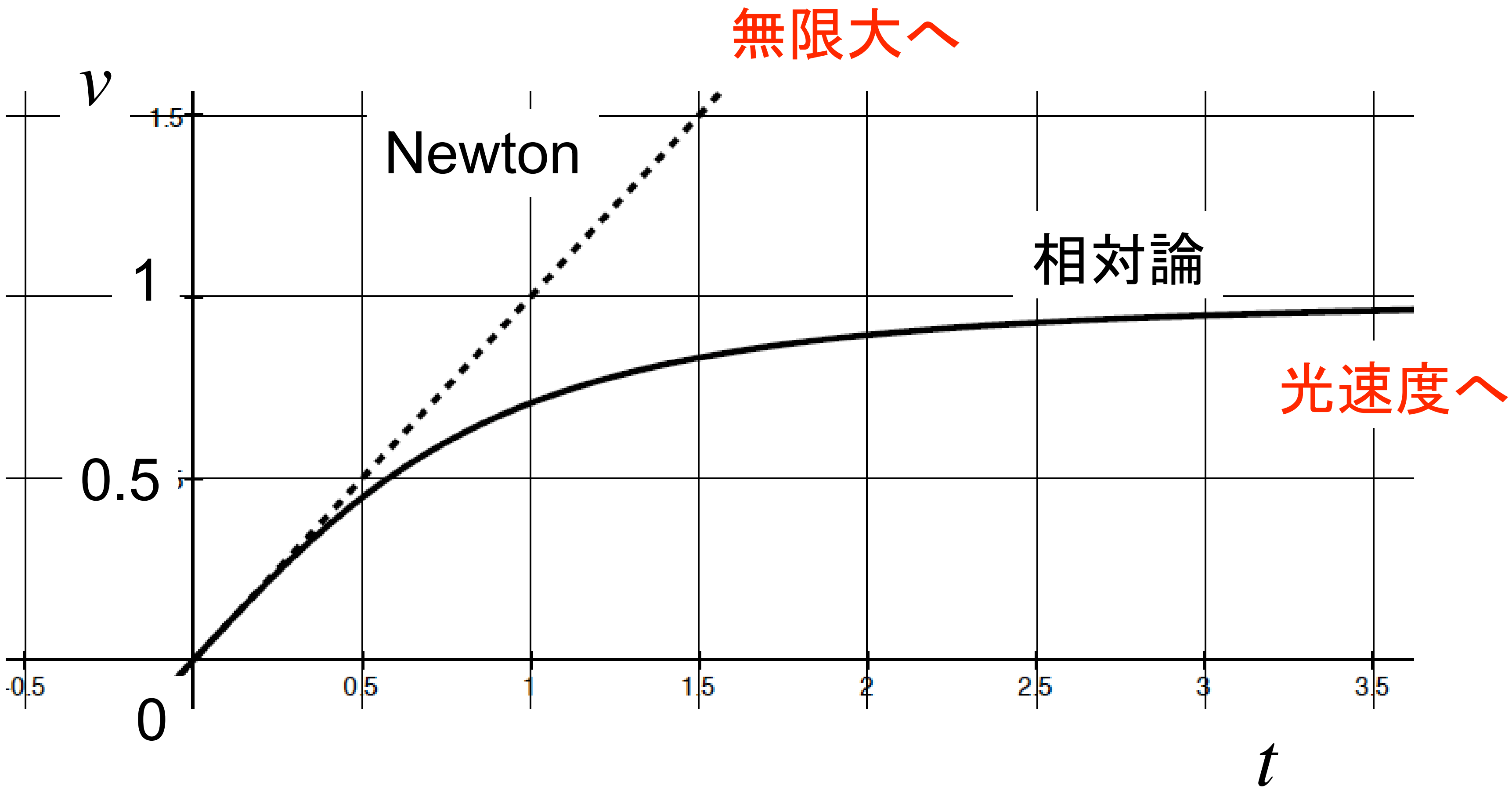
$$F=\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{d\tau}\right)=m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2}\,dt}\right)=\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}$$

$$\beta=\frac{v}{c}$$

この式を解くと

$$v=\frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}},\quad a=\frac{F}{m}$$

速度の時間変化



エネルギー

運動エネルギー

$$K = \int d\vec{s} \cdot \vec{F} = \int d\vec{s} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

計算 : 力と移動の向きを同じに取る

$$K = \int_0^x dxF = \int_0^t dx \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \int_0^v vd\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$\boxed{K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \Rightarrow E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

静止エネルギーとして $\boxed{E = mc^2}$

四元運動量

$$(E,\vec{p})=\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$$ なので

$$(E,\vec{p})=m\left(c^2\frac{dt}{d\tau},\ \frac{d\vec{x}}{d\tau}\right)\xrightarrow{c=1} m\frac{d}{d\tau}(t,\ \vec{x})$$

τとmはローレンツ変換の元で不変なので

$(E,\vec{p})$ は $(t,\ \vec{x})$ と同じように変換する

四元運動量（四元ベクトル）

$(E, \vec{p})$ のように、ローレンツ（座標）変換の元で

$(t,\ \vec{x})$ と同じように変換する量を、四元ベクトルという

ベクトル

（１）成分をもった量（物理量＝観測される量）
（２）座標変換の元で一定の規則に従って移り変わる量

スカラー

座標変換の元で変換しない、一定（固有）の量

一般にはテンソル

$T_{ijk\cdots}$

問題：化学反応の前後における質量保存の法則は厳密には成り立たない。どの程度の破れが生じるか。

問題：100 V/mの電場で電子、陽子を1秒間加速したときのそれぞれの速さと獲得するエネルギーを求めよ。

問題：阪大核物理研究センターの加速器は陽子の運動エネルギーを400 MeVまで加速する。そのときの陽子の速さを光速度の比で求めよ。

問題：Spring-8のシンクロトロンでは電子が8GeVのエネルギーで運動している。この電子の速さを光速度の比で求めよ。

問題：50光年離れた場所まで、1年で着いて1年滞在し1年で戻ってきたいと思う（合計3年）。往復の際は一定の速さで飛行するとして、その速さを求めよ。また、エネルギー効率を100%として、動力は原子力を使うとしてそのために必要な核燃料の量を推定してみよ。