ローレンツ変換

ガリレイ変換

古典力学の仮定

$$\begin{cases} \boxed{t = t'} \\ \vec{r} = \vec{r}' + \vec{u}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + ut \\ y = y', z = z' \end{cases}$$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \quad \vec{v}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$ から

左下の式をS, S'系で微分して

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ 速度の加算性

何が必要か？

１．速度の相対性

（１）S系から見るとS'系は速度 u で動いている

（２）S'系から見るとS系は速度 $-u$ で動いている

２．光速度不変の原理

これらを満足する線形変換を考える

S系で見た2倍の長さは、S'系で見てもやはり2倍だろう

線形変換

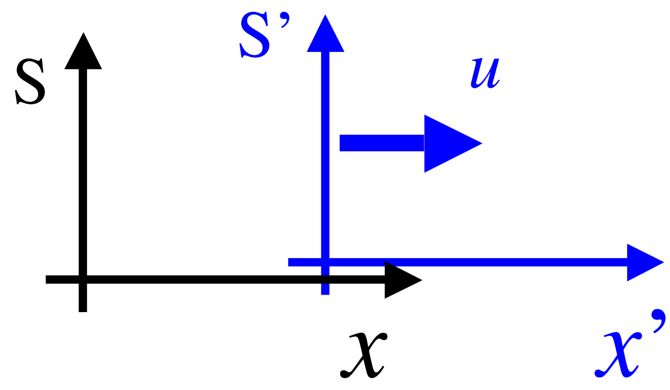
速度 u を x 方向に取ると、
線形変換は x と t を関係づける

$$t' = pt + qx$$

$$x' = rt + sx$$

未知数 p, q, r, s を決める

1. 速度の相対性



S'系の原点　$x' = 0$　は

S系から見て速度 u で動いている

$$rt + sx = 0$$

$$\frac{x}{t} = -\frac{r}{s} = u \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = -su \quad (1)}$$

同様に、S系の原点のことを考えると

$$\boxed{r = -pu \quad (2)}$$

2. 光速度不変

S系で $x = ct$ ならばS' 系で $x' = ct'$

$$x' = ct' = c(pt + qx) = c(pt + qct) = cpt + c^2 qt$$

$$x' = rt + sx = rt + sct$$

これから

$$\boxed{r + sc = cp + c^2 q \qquad (3)}$$

この式は光速度 c の符号を変えても成り立つので(なぜか？)

$$\boxed{r - sc = -cp + c^2 q \qquad (4)}$$

(1) ~ (4)のうち独立な式は3つ

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & -u/c^2 \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

これが成り立つなら、相対性から

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & u/c^2 \\ u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}$$

なぜ符号がかわるか？

下の式を上の式に代入して

$$p = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta = \frac{u}{c}$$

ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{u}{c}$$

$c = 1$ としてみると

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

確認と応用

$$t' = \frac{t-(u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut+x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

１．速度の相対性

S系から見たS’系の原点 $x' = 0$ の速度

$$-ut + x = 0$$

$$-udt + dx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = u$$

S’系から見たS系の原点 $x = 0$ の速度をもとめることもできる

２. 時間の遅れ

$$t' = \frac{t - (u / c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S’系の原点 $x' = 0$ におかれた時計がS’系で t’ 経過するとき、S系での時間経過は？

$$t' = \frac{t - (u / c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad 0 = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

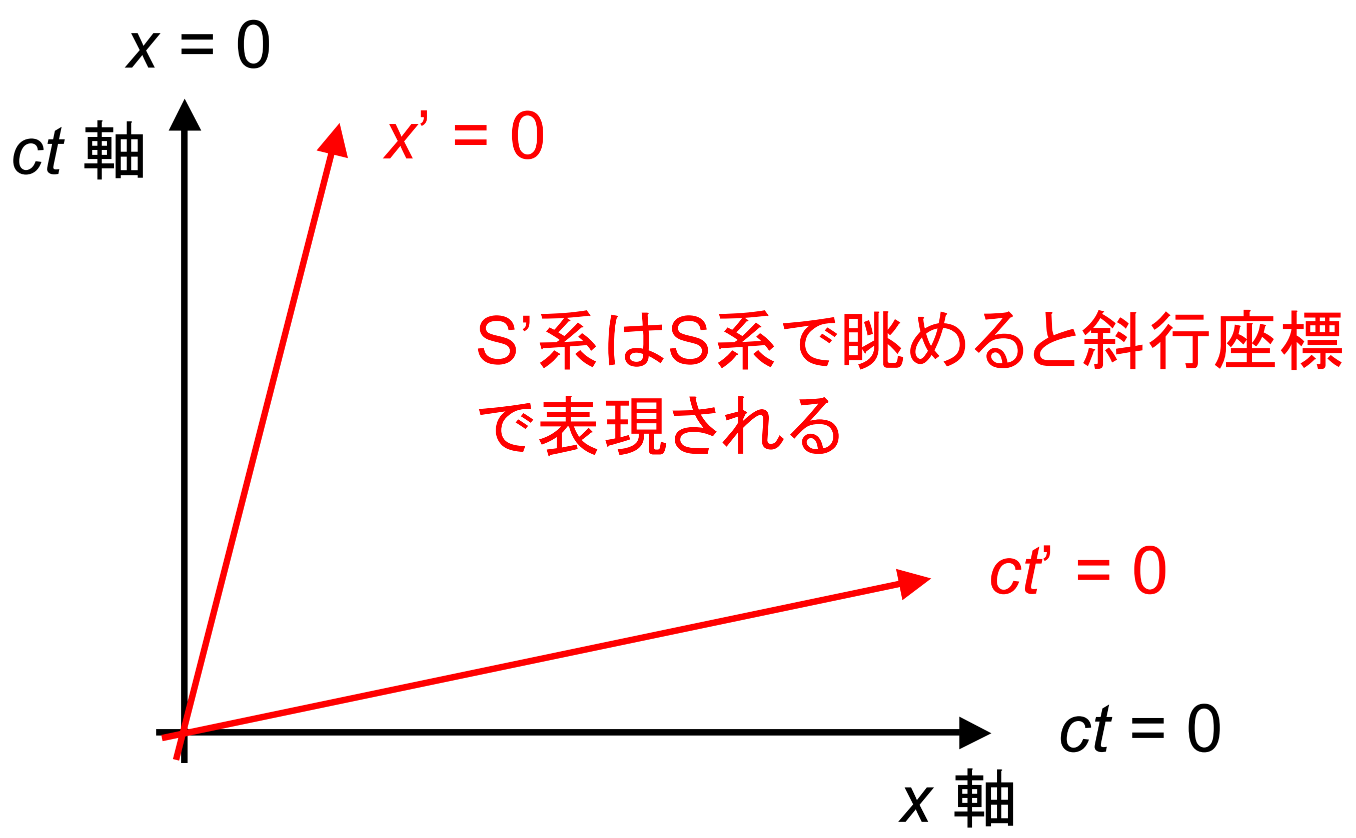
$$\boxed{t' = \sqrt{1-\beta^2}\ t} \qquad \rightarrow t_{in} = \sqrt{1-\beta^2}\ t_{obs}$$

３．時空の世界線

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

S、S'系の座標系を描く
まず次元をそろえるために

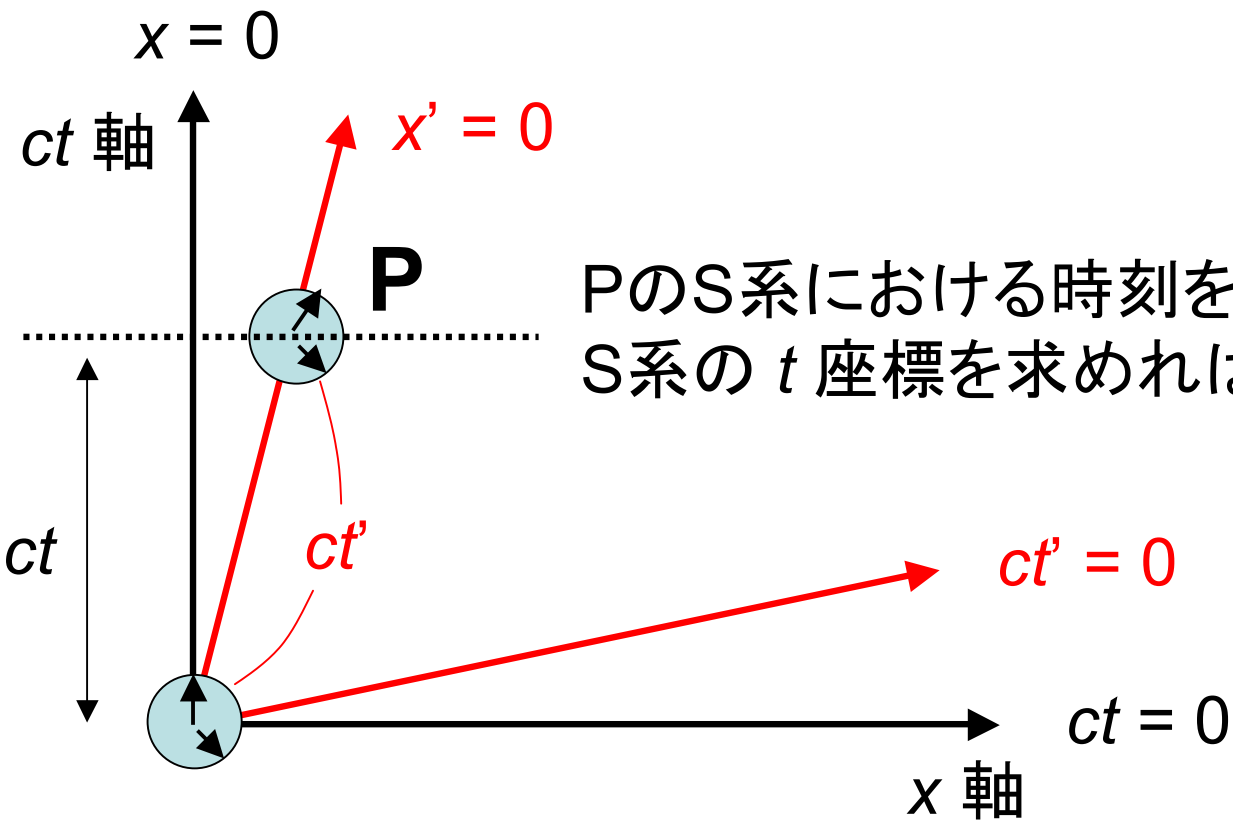


2'. 時間の遅れ　S'系の原点に置かれた時計

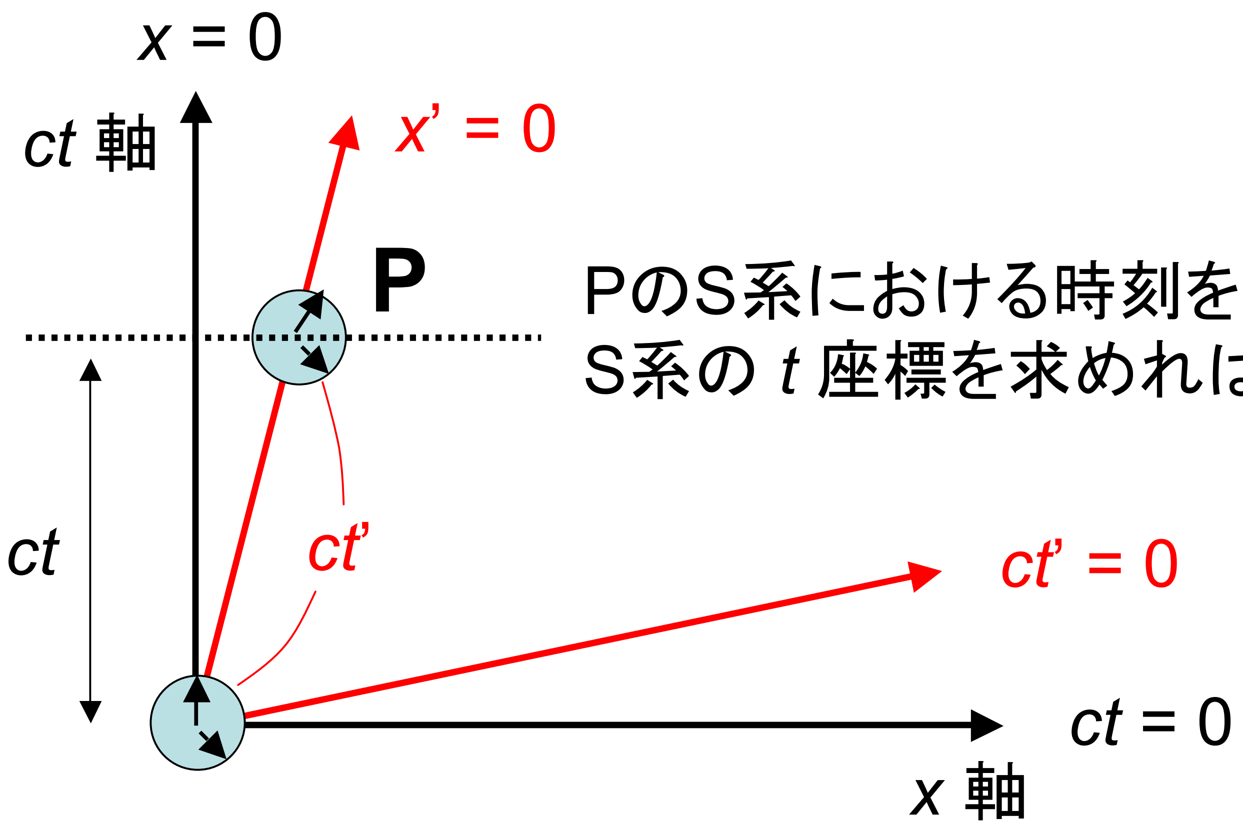
事象P**を観測**する ＝ P**の座標**を求める

＝＞

S と **S'** で **座標成分は異なる**



PのS系における時刻を知るには
S系の *t* 座標を求めればよい

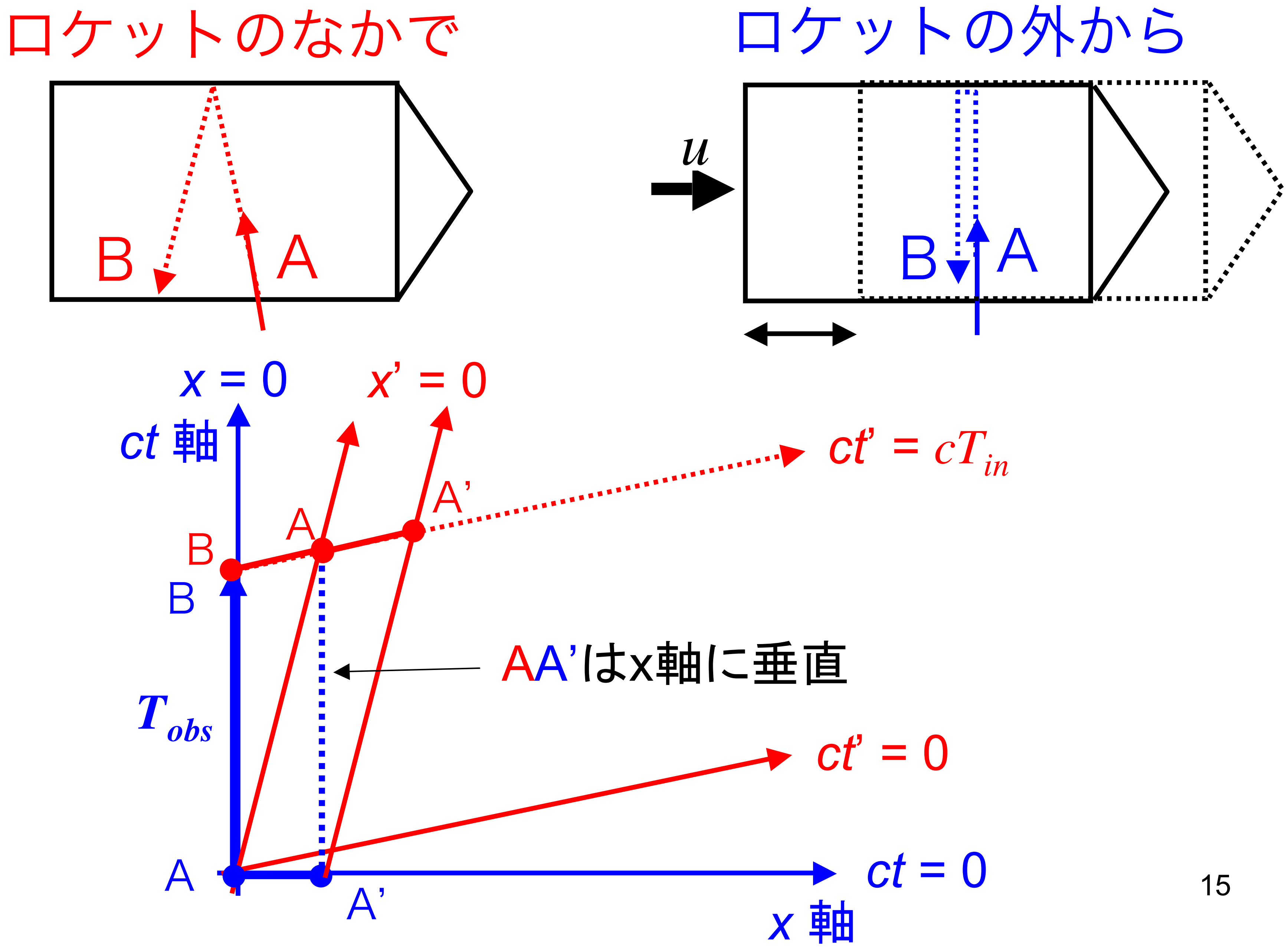


PのS系における時刻を知るには
S系の t 座標を求めればよい

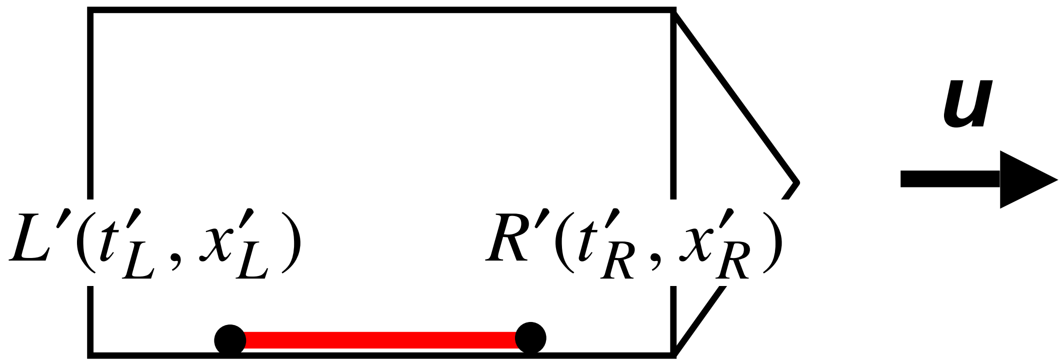
$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad 0 = x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\boxed{t' = \sqrt{1-\beta^2}\ t}$$

4. S'系のものさしとローレンツ収縮

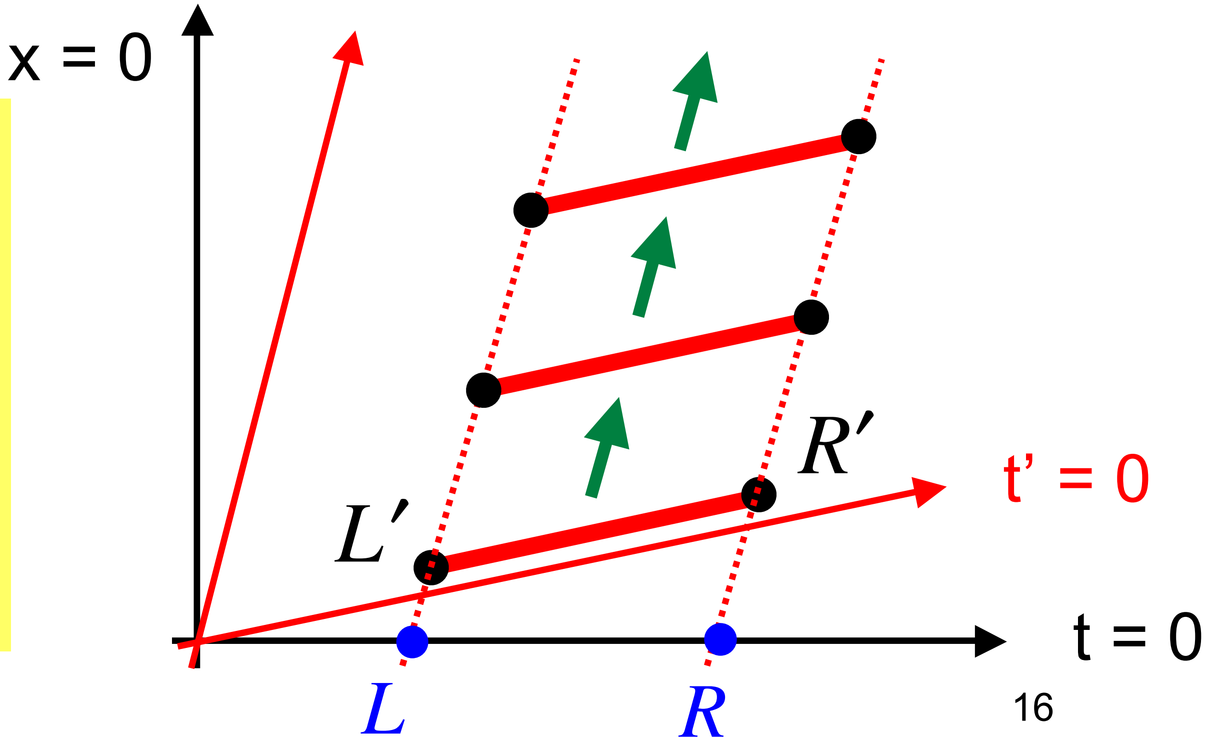


4. S'系のものさしとローレンツ収縮



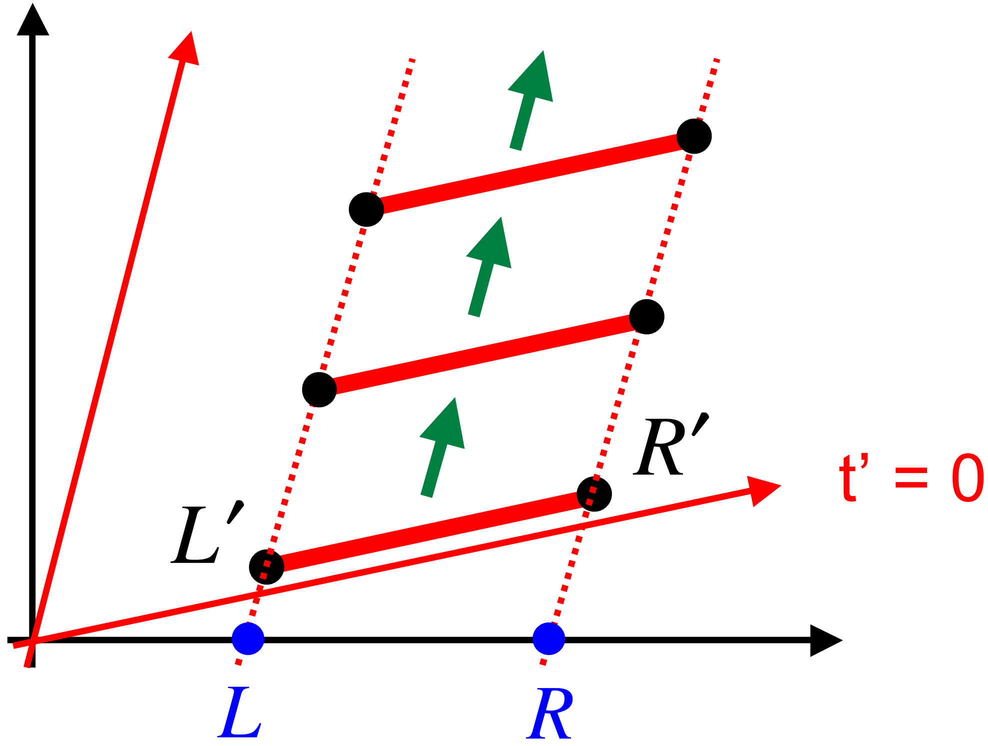
S'系での長さ $L'R'$ と
S系への射影 LR の長さ
を比較する

$L'R'$ はS'系で同時刻
LR はS系で同時刻



$$\begin{cases} t'_L = \dfrac{t_L - (u/c^2)x_L}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'_L = \dfrac{-ut_L + x_L}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t'_R = \dfrac{t_R - (u/c^2)x_R}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x'_R = \dfrac{-ut_R + x_R}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$



条件 $t_L = t_R$ を課すと

$$x_L - x_R = \sqrt{1-\beta^2}\left(x'_L - x'_R\right)$$

5. 光速度不変 S系でv = cならばS'系でもv' = c

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x' = \frac{-\beta ct + x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

微分して

$$c\,dt' = \frac{c\,dt - \beta\,dx}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad dx' = \frac{-\beta c\,dt + dx}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

辺々で割り算して

$\dfrac{dx}{dt} = c$ ならば $\dfrac{dx'}{dt'} = c$ が示せる

６．速度の合成

$$t' = \frac{t - (u/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

を使って

$$v_x \equiv \frac{dx}{dt}, \quad v_y \equiv \frac{dy}{dt}, \quad v_z \equiv \frac{dz}{dt}$$

と

$$v'_x \equiv \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y \equiv \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z \equiv \frac{dz'}{dt'}$$

の関係を導くことができる。結果は:

$$v'_x = \frac{-u + v_x}{1 - (u/c^2)v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - (u/c^2)v_x}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - (u/c^2)v_x}$$

7．4次元時空

c = 1とおいて時間と空間を対等に扱う

$$\begin{cases} t' = \dfrac{t-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x' = \dfrac{-\beta t + x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

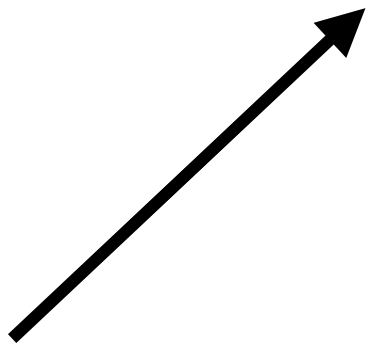
$t \to it, \beta \to i\beta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} = \cos\theta, \ \dfrac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}} = \sin\theta$ とすると

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換は
4次元（複素）時空の
回転とみなせる

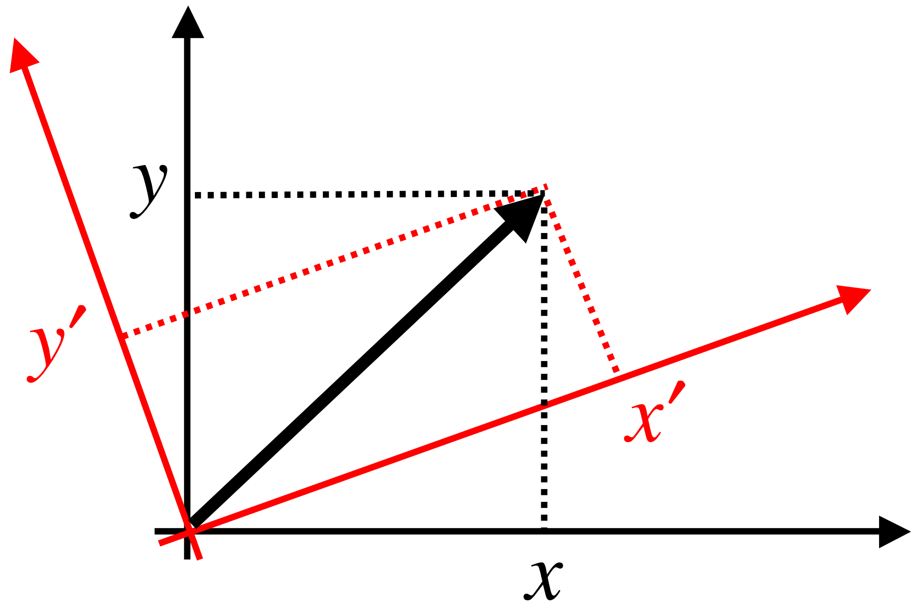
８．不変量

回転の元で2点間の距離は不変に保たれる



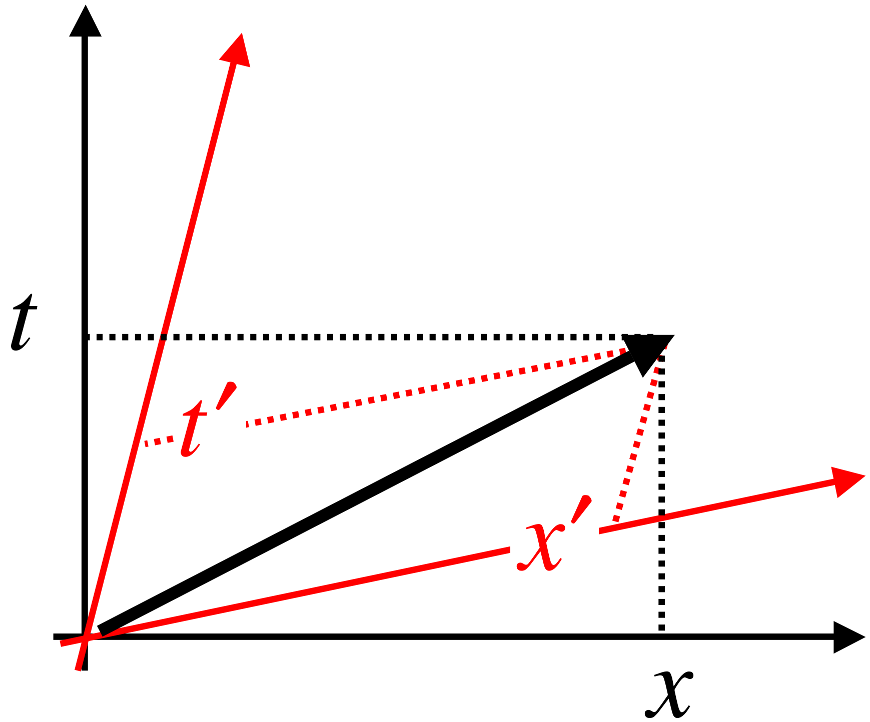
８．不変量

回転の元で2点間の距離は不変に保たれる



$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$ ユークリッド

ローレンツ変換の場合



$$t^2 - x^2 = t'^2 - x'^2$$ ミンコフスキー