放射線基礎物理学

土岐博、畑中吉治、福田光宏

2009 April 20
http://www.rcnp.osaka-u.ac.jp/ toki/medicalphysics.pdf

1 物理学の基礎

1.1 医学物理士

現在の医学物理士に求められているのは次のような能力であろう。今日の医療現場では最先端科学技術機器が導入されており、患者の治療に携わる医師だけでは，これらの機器を使いこなすことが難しくなって来ている。特に放射線に関する医療機器は特別の能力を必要とする。放射線や粒子線治療の現場では非常に高い物理的能力が必要とされている。このような背景から世界的に医学物理士の育成が急務とされている。

しかし，日本では医学物理士の制度が始まった所でまだ確立されていない。今後の医学物理士の制度作りには、どのような医学物理士が今後育ってくるかに大きく関わっている。従って，現在の修士コースの学生がどこまでの能力を付けるかが非常に大事である。つまりは現在の学生がどこまで自らで努力をして、医学物理士の地位を勝ち取っていくかが今後の医学物理士の地位を決定する。

私の考える医学物理士は常に医師のそばにいて，医師が患者に対して治療をする中で医療技術に関わる事柄において、医師の信頼を得る仕事ができることであろう。そのためには，高度先進医療機器の管理運営はもとより，その改善や更新で出来るだけ良い機器を導入することが重要である。そのためには現在の科学技術の最先端の知識を獲得する必要がある。

昨年度に同じタイトルの授業をした経験から，私の対応している医学部保健学科の学位を修得した学生は放射線を扱うための基礎能力を持っていることを学んだ。従って，新しく、基礎的な物理学を修得し、その上で放射線，粒子線はどのようにして発生し，どのように物質や生物と相互作用するのかを基礎的な所から理解することが大事であると考えるようになった。

今年度から，医学物理士要請のための修士コースの学生には物理学科が提供するいくつかの基礎物理学の講義を受けてもらうことになった。私としては、数学や物理学の知識があまりない学生も含めて是非医学物理士にまで成長して欲しいと考えている。

日本は、高校の段階で理系や文系を意識する。つまりはその段階で理数の科目を勉強しない学生も多くいる。一方でアメリカでは高校の授業内容がそれほど高度ではなく，理数系の科目は大学の初年度できっちりと行う。この場で強調したいのは，理数の勉強は年齢がいくつから始めても良いということである。いくつから始めるかが問題ではなく，何が本質かを知って勉強するのが重要であると考えている。その本質をこの授業で教えたい。

この授業では５時間くらいを使って，理数の基礎的な知識を付けたいと考えている。私の学生がどの程度の知識と，経験さらには，希望を持っているかを知りたい。そのためにいくつかの質問させていただきたい。

1. 数学は得意と思うか。苦手と思うか。
2. 微分や積分は理解出来るか。
3. 三角関数や指数関数は理解出来るか。
4. 微分や積分などを理解したいと思っているか。

必ず，物理の勉強が面白くなるように教えたいと思っている。頑張ってついて来て欲しいと思う。

この講義ノートは下記の HP においておく。是非、活用して欲しい。
http://www.rcnp.osaka-u.ac.jp/ toki/medicalphysics.pdf

1.2 微分方程式

物理学は微分方程式で表現されていると言っても過言ではない。つまり物理は微分方程式である。その理由は微小な物理量の間の関係は非常に単純であるからである。そのことを分ってもらうために、まず最初に力学の話しから始める。高校時代に物理の問題をやる際に公式として例えば次のような式を憶える。

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h \tag{1}$$

この式は言葉ではこのように表現する。時間が０の時に h の高さにある物体が初速 v_0 で下の方向に動いている時に，時間が t の時にどの位置にあるかを

表すのが y である。ここで $g = 9.8m/sec^2$ である。高校の物理ではこの公式が使えることが大事である。つまりは、$h = 100m$、$v_0 = 0$ の時に $t = 2sec$ には $y = (-\frac{1}{2}9.8 \times 2^2 + 100)m = 80.4m$ という答えを得る。このように公式ばかりを暗記するという態度で勉強していると物理学は全然面白くない。この授業を受けて分かって欲しいのは，公式を使うのが物理ではなくて、自然の本質を理解することが物理である。だから，物理である微分方程式を分かって欲しいのである。微分方程式で考えること、つまりは微少量の間の関係を考えるのが物理であると言って良い。[1]

力学の基本的な方程式はニュートンの方程式である。これは次のような式で表現されている。

$$\vec{F} = M\vec{a} \tag{2}$$

ここで、$\vec{F}$ は物体に働く力、M は質量であり、$\vec{a}$ は加速度と呼ばれる物理量である。即ちこの式は力が与えられると，どれだけの加速度を質量が M の物体が得るかが与えられている。力学ではこの式のみを知っていれば全ての運動状態は記述出来る。これがニュートンが木からリンゴが落ちるという逸話とともに発見した式であると言われている。物理学者は古典力学に関する問題は全てこのニュートンの方程式から導出する。即ち，この方程式を憶えているだけである。

話しを簡単にするために上の式でベクトルの記号をはずす。空間は３次元なので方向は大事だが微分方程式を理解するには，１次元で充分である。物質の位置を x とする。この x の時間微分が速度 v であり、v の時間微分が加速度 a である。即ち，位置と速度と加速度は次の関係になっている。

$$\begin{aligned} v &= \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ a &= \dot{v} = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \end{aligned} \tag{3}$$

したがって、ニュートンの方程式は次のような微分方程式で表される。

$$F = M\frac{d^2x}{dt^2} \tag{4}$$

これは微分を含んだ方程式なので立派な微分方程式である。この微分方程式を解けば、我々が高校で憶えた物体の落下の方程式が得られる。物理学は最初から微分方程式であると言える。量子力学も全く同じことである。量子力学は波動の方程式をまねることによってニュートンの方程式からもっと高級な（難しい）微分方程式をシュレディンガーが導いた。

もっと簡単な例を導入したい。放射線を放出する原子核はその原子核特有の寿命を持っている。人間が寿命を持っているのと同じような意味を持つ。その時このような質問をする。N 個の原子核があれば，その時の時間当たりの粒子数の変化量は次の式の様に N に比例する。

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{5}$$

この式で λ は原子核に固有の定数である。この時に，人間で話しをする方がもっと分かりやすいかもしれない。人間が１万人いるとする。その時に時間当たり何人の人が死ぬか。符号を負に取るのは説明を要するかもしれない。生きている人の数を N としたので，正の方向が人間の数が増加する方向とした。従って，死ぬのは人間の数が減少するので負の量になっている。このように聞くと，多くの人が微分の意味を分かっていさえすれば、上のように微分方程式を書くと思う。日本人全体で見るとこの N が１億人になる。当然ある時間内に死亡する人の数は対象とする人の数に比例している。この時に λ は人間の固有の寿命である。これは神様（自然）が与えてくれたものである。つまりこの数字が大事なのである。

この微分方程式の解は

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{6}$$

となる。N_0 は t が 0 の時の原子核（人間）の数である。このように解の形は複雑になっている。普段の生活には出てこない指数関数が登場してくる。微分方程式は非常に簡単な形になっているのにその解はこんなにも複雑になるのである。即ち，物理学は微分方程式の形で書く方がその意味が良く分かるのである。物理学は微分方程式が基本であると言える。

1.3　微分と積分の意味

通常は色んな実験値は測定量を縦軸に取り，横軸にその測定量を得た時間や場所を取る。従って，一般的にこの時の曲線を

$$y = f(x) \tag{7}$$

と表すことにする。その時、x の場所でこの曲線の傾きがその曲線の微分で与えられる。これは微分の定義を見れば明白である。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} \tag{8}$$

この定義の持つ意味を図を見ながら説明したい。この式で $\lim_{\Delta\to 0}$ の様に Δ は小さい量であるというのを式で表したものである。数学者が書く微分の定義である。物理学者はもっと単純にする。微分の意味を理解するには Δ は小さい量であることを頭に入れてただ単純に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta} \tag{9}$$

と書くともっと分かりやすいかもしれない。この際に Δ は非常に小さい数であることを頭に入れておくことは重要である。物理学者はほぼこのように微分の式を見ている。重要なことは微分は曲線の傾きであるということを知ることである。

次に積分は何を意味しているかを図を見ながら説明しよう。

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_x \Delta f(x) \tag{10}$$

このように書くと関数 $f(x)$ を x が a から b まで細かく Δ の幅で短冊に切って出来る小さな $f(x) \times \Delta$ の面積の短冊を足しあわせるということになっている。つまりは曲線の面積である。

次には少し難しいが、この積分という操作は微分の操作の逆関数になっていることを理解したい。それを証明するには $f(x)$ を積分したものを微分してみよう。その時にもとの $f(x)$ になれば積分は微分の逆関数であるということの証明になる。

$$\frac{d}{dy}\int_a^y f(x)dx = \frac{1}{\Delta}\left(\int_a^{y+\Delta} f(x)dx - \int_a^y f(x)dx\right) = f(y) \tag{11}$$

従って、ある関数 $f(x)$ を積分したものを微分したらその関数になる。これが積分と微分は逆関数の関係に有るという意味である。

これから先、微分方程式を解いていくが，そのさいに使ういくつかの関係を書いておく。微分の形で公式を書いておく。

$$\begin{aligned}
(1)' &= 0 \qquad (12)\\
(x)' &= 1\\
(x^n)' &= nx^{n-1}\\
(e^x)' &= e^x\\
(\log x)' &= \frac{1}{x}\\
(\sin x)' &= \cos x\\
(\cos x)' &= -\sin x
\end{aligned}$$

ここで右上に $'$ を付けたものは微分を表す。即ち

$$(f(x))' = \frac{df(x)}{dx} \tag{13}$$

とする。これらを証明するのは難しいものもいくつかある。この授業では、これらは数学者がしっかりと証明して本に公式として書いてくれているものというスタンスを取る。数学の式の間の関係は難しいものが一杯有る。これは自然現象を理解するのに得意分野の違う人たちが共同作業して自然に挑戦していると考えてもらいたい。

2 微分方程式

最も簡単な微分方程式は

$$\frac{dy}{dx} = 1 \tag{14}$$

これは y を x で微分したものが 1 なので解は $y = x + C$ と求まる。実際に y を x で微分すると 1 になる。ここで C は積分の定数と呼ばれる。この時、憶えておいた x の微分が 1 であることを使って解が簡単に求まる。この際の態度は微分をしたら右辺に与えられた関数が得られるようなものを本から探すというイメージである。これではあまりに頭を使わないのでもう少し系統的な方法を書いておく。上の式の両辺に dx を掛ける。この時に dx や dy は小さいが有限の数であると頭に思い浮かべると良い。上の式を変形すると次のようになる。

$$dy = dx \tag{15}$$

この式の前に積分の記号を付ける。

$$\int dy = \int dx \tag{16}$$

左辺は $\int dy = y + C_1$ で右辺は $\int dx = x + C_2$ である。ここで C_1 や C_2 は積分定数と呼ばれる。従って，解は

$$y = x + C \tag{17}$$

数学を会得するということは，理解するというより，手を使って頭を使って使えるようになることであると言いたい。そこでいくつかの練習問題をやってもらう。
問題：

1. $\frac{dy}{dx} = 3x$

2. $\frac{dy}{dx} = 5x^2$

3. $\frac{dy}{dx} = 2x^5$

4. $\frac{dy}{dx} = \cos x$

5. $\frac{dy}{dx} = e^{2x}$

この際に前章で書いた微分の公式を使う。

もう少し，難しい微分方程式を扱う。これが寿命の問題に関する微分方程式である。次の問題を考える。

$$\frac{dy}{dx} = -3y \tag{18}$$

これまでの方程式と違っているのは右辺に x ではなく y が入っていることである。これは今までの知識ではうまくいかない。このような場合には同じ変数を持ったものを同じ辺に集めることでうまくいく。つまり上の式の両辺を y で割り算し、さらに dx のかけ算をする。

$$\frac{dy}{y} = -3dx \tag{19}$$

その上で両辺の積分を敢行する。

$$\int \frac{dy}{y} = \int -3dx \tag{20}$$

この積分は辺毎に次のようになる。

$$\log y + C_1 = -3x + C_2 \tag{21}$$

したがって、

$$y = Ce^{-3x} \tag{22}$$

ただし、$C = e^{C_2 - C_1}$ も定数である。

この方程式に近い微分方程式の問題を書く。これらの問題を解く練習をやってほしい。

問題：

1. $\frac{dy}{dx} = xy$
2. $\frac{dy}{dx} = (2x+1)y$
3. $\frac{dy}{dx} = xy^2$
4. $\frac{dy}{dx} = x(y+3)$
5. $\frac{dy}{dx} = x^3(y+3)$

これだけの練習問題をやった上で、寿命の問題をやってみよう。この時の微分方程式は

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{23}$$

と書かれる。λ は決まった数なので数字だという認識で扱う。両辺を N で割り算し，dt のかけ算をして次の式を得る。

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt \tag{24}$$

両辺の積分を行った結果は

$$\log N = -\lambda t \tag{25}$$

従って，

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{26}$$

これで皆さんがこれまで記憶して来た寿命の式が得られた。この式を得た過程を是非，何度も振り返って欲しい。これまで記憶して来た公式が微分方程式を解く技術を持った瞬間に覚えるものでなく，理解できるものに代わるのである。物理学の面白さを共有出来れば嬉しく思う。

これらの簡単な方程式を少し複雑にした微分方程式が本に書いてある。チャレンジしたい人がいればどんどんとやって欲しい [1]。どんな方程式でも解けると、自信がつくと思う。

導入の所で物体の落下の式がニュートンの方程式から導出出来ると言った。それをやってみる。ニュートンの方程式は次のような微分方程式である。微分が 2 回行われている形になっている。

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{27}$$

ただし重力の場合には左辺の F は定数である $(F = mg)$。従って

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{28}$$

この際に符号は上の方に行く方を＋にとることにする。そうすると重力は下の方向に向いているので負の符号をつけることにする。右辺が定数なので、まず一回積分を行うと

$$\frac{dx}{dt} = -gt + C_1 \tag{29}$$

この解が正しいかどうかは両辺を微分することでもとの微分方程式が得られることで確かめることができる。さらにこの両辺を積分すると

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \tag{30}$$

もし初速を v_0 さらに最初の位置を h と書き、さらに x を y と書くと、覚えている形が得られる。

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h \tag{31}$$

つまりは高校の時に覚えている方程式は簡単な微分方程式の解として得られる。この式に数字を入れて無味乾燥な計算をするより、何故この式が出てくるのかを理解する方がもっと面白い。もとは簡単なニュートンの微分方程式である。これを知っているだけで何でも出せるという気分は最高である。

これを一般化した次の方程式を勉強することにする。

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{32}$$

この形の方程式を二階の微分方程式と呼ぶ。この式のように係数が x にも y にも依存しない場合には簡単に解が求まる。このような方程式を数学の言葉では２階の線形微分方程式という。この方程式の代表的な例はバネの運動である。この場合にはニュートンの方程式を使うが、バネを x だけ引き延ばしたときの復元力は $F = -kx$ と書けるので

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{33}$$

が解くべき微分方程式である。この式を書き直すと

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{34}$$

であり、一般の形とくらべて一階の微分の項がない、二階の微分方程式になっている。このようにみてみると物理の問題として出てくる基礎的な微分方程式は簡単な形をしている。

この線形2階微分方程式の一般形の場合には次のように解く。$y = e^{\lambda x}$ とおく。このようにおくのは対数関数の微分は対数関数なのでこの形の解になることが分かるからその答えを先取りしているのである。微分方程式は解く方法を知っているから解けるのである。色んな場合に方程式を解く練習をしておくゆえんである。この式を微分方程式に代入することで、λ の満たすべき方程式を求める。微分方程式は次のように書ける。

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0 \tag{35}$$

この式が x によらずに成り立つためにはその係数がゼロでないといけない。

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{36}$$

この2次方程式から λ を解いて次の式を得る。

$$\lambda = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) \tag{37}$$

従って一般に解はこれらの解の足し算で書ける。すなわち、

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{38}$$

ただし λ_1 と λ_2 は上の二つの二次方程式の解である。一般型の場合には二つの積分定数を必要とする。ここまでは一般の式の形であるが、λ は平方根を持っているので実数の場合もあるし虚数の場合がある。

この一般の解の形を知った上でバネの問題に戻る。

$$\begin{aligned} a &= m \\ b &= 0 \\ c &= k \end{aligned} \tag{39}$$

をいれると、

$$\lambda = \pm\frac{1}{2m}\sqrt{-4mk} \tag{40}$$

となる。ここでもう一つのことを頭に入れておく必要がある。虚数の概念である。虚数は次の式で定義される。

$$\sqrt{-1} = i \tag{41}$$

つまりは虚数とは2乗すると負の数になる数字である。こんな数字は日常世界には出てこない。しかし，物理の問題では良く登場する。バネのように日常的に見かける運動は実は今回の問題のように、この虚数が登場するのである。この虚数の概念を使うと上の式の答えは

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i = \pm\omega i \tag{42}$$

と表現される。ここで角速度と呼ばれる量であるオメガは $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と与えられる。したがって、この際の解は次のように書ける。

$$y = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \tag{43}$$

この対数で書かれた解と三角関数との関係を付けておく。対数の係数が虚数の場合には三角関数が出てくる。数学的には次の関係が成り立つ。

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{44}$$

したがって、対数の足し算をすることで三角関数を得ることが可能である。

$$\begin{aligned} e^{ix} + e^{-ix} &= 2\cos x \\ e^{ix} - e^{-ix} &= 2i\sin x \end{aligned} \tag{45}$$

従って、バネのように振動する運動の解はその係数が虚数になっている対数関数でも表現出来るし、三角関数でも表現できるのである。それを示すために上の式を次のように変形する。

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{1}{2}(C_1 - C_2)(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \\ &= A\cos\omega t + iB\sin\omega t \end{aligned} \tag{46}$$

最後の式を得るのに $A = C_1 + C_2$ および $B = C_1 - C_2$ と不定の定数を別の定数で表現した。その上で最後にチェックして欲しいのは本当にこの解を微分方程式に代入するとこの解がバネの微分方程式を満たすことを証明することが大事である。

これらの微分方程式の議論にもっとなれるために問題を出しておく。
問題：次の微分方程式を解け。

1. $5\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 3y = 0$

2. $3\frac{d^2y}{dx^2} + 6y = 0$

3. $6\frac{d^2y}{dx^2} + 7\frac{dy}{dx} = 0$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 5y = 0$

5. $10\frac{d^2y}{dx^2} = 5y$

これらの方程式を解くことで２階の微分方程式になれて欲しい。

非常に興味深いのは，数学で中学の時に三角関数，高校で対数やロッグ関数が登場する。これらは日常生活ではほとんどお目にかからない。しかし，物理の世界では微分方程式そのものは簡単な形をしているのにその解が三角関数やロッグ関数などを使って表現されるのである。科学者の言葉で有ると言える。その意味では虚数の概念を通して対数と三角関数が関係しているのも非常に興味深い。量子力学の世界に突入したいが，この微分方程式の解の表現法が新しい微分方程式を生み出す所を見て欲しい。

ここまでに登場した微分方程式は次の形を持っている。

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = -\lambda y(x) \tag{47}$$

これは物理では、寿命がある個体がどれだけ生き残っているかを表現する方程式であり、放射線が適当な距離走った時に生き残っている量を表す方程式でもある。

さらには、線形の方程式は常に登場する。

$$a\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} + b\frac{\partial y(x)}{\partial x} + cy(x) = 0 \tag{48}$$

これはニュートンの方程式に良く表れる。振動の問題でも良く登場する。したがって、これらの方程式を解くことができれば物理学の古典力学の所まではなんとかなると思う。次は量子力学で出てくる微分方程式を見てみよう。

3 量子力学

量子力学を導入するには、二つのことを準備する必要がある。一つは波動の方程式と後一つはエネルギーは保存し、粒子の運動を記述するエネルギーは運動エネルギーと位置エネルギーであることである。波動方程式を理解する必要があるのは量子力学に従う粒子は波の性質を持っていることに起因する。

これらは日常経験していることなので是非きっちりと把握して欲しい。これらが分かることによって、量子力学の特徴であるエネルギーがとびとびになることが理解出来るし、エネルギーがとびとびとはどんなことかが理解出来る。エネルギーがとびとびになる（離散的になる）ので特性X線が原子から飛び出してくるのである。

3.1 エネルギーと量子化

物理現象を理解するにはエネルギーという概念が存在することを学ぶことが一番大切である。物理学者は難しい方程式を解く前に，エネルギーを勘定してそれが最小になる状態が自然界では実現されていることをまず頭に描く。その意味では現象を理解する際に、系のエネルギーが最小になるということを考えることがほぼ全てといえる。全ての物理系ではエネルギーが最小の状態になる。例えばブランコにのっていてブランコをこがないでいるとしばらくして静止する。それは位置エネルギーが最小になっている。運動エネルギーが0になって位置エネルギーだけが生き残るのである。即ち，運動していない状態（静的な状態）が一番エネルギーが低いのである。地球上では全ての物体は下に落ちていく方がエネルギーが低いのである。この授業ではエネルギーとして二つの概念を導入する。一つは運動エネルギーである。ニュートンの方程式からこのエネルギーという概念が出てくるがここでは単純にその概念を導入することにする。逆にこのエネルギー最小の原理からニュートンの方程式が導出される。また，エネルギーの概念を量子化すると量子力学の基本方程式であるシュレディンガーの方程式が導出される。

物体が運動していると有限のエネルギーを持つ。そのエネルギーを運動エネルギーと呼ぶ。

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 \tag{49}$$

ここで、m は物体の質量であり、v はその物体の速度である。従って，エネルギーを最小にするということは運動を停止させることである。

もう一つのエネルギーは位置エネルギーと呼ばれる。重力の働いている所では位置エネルギーは次のように表される。

$$E_P = mgh \tag{50}$$

ここで、g は重力の定数で $g = 9.8m/sec^2$ である。h は地球表面から計った高さである。従って，重力の働いている系でのエネルギーが低い状態と言うのはより地球に近い所，即ち地球の表面である。物体は地球の表面に居る方が空間に浮いているよりエネルギーが低いのである。

バネの場合を考える。バネを引っ張っておいて離すと振動する。引っ張った際にバネに生じる位置エネルギーは次のように書ける。

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 \tag{51}$$

ここで、k はバネの定数であり，x は平衡の点から伸ばした変位である。バネの場合の一番エネルギーが低いのはバネの自然の長さの時である。全然引っ張らない位置に必ず運動は落ち着く。これらのエネルギーだけが量子力学の世界では使われる。

さらに知っておいて欲しいのは閉じた系ではエネルギーが保存する。系が閉じていると言うのはその世界にエネルギーのやり取りが無いと言うことである。即ち，ここで現れる運動エネルギーと位置エネルギーの足し算は全エネルギーと言いその量は保存する。つまり常に一定である。

$$E = E_K + E_P \tag{52}$$

量子力学ではこの全エネルギーと言う概念を使って量子力学の基礎方程式を作る。その辺りの議論を紹介したい。

このエネルギー保存則と力学エネルギーの形はニュートンの運動方程式を解くのと同じ結果を与える。その練習問題をやることにする。

例題１：高さが $20m$ の所から質量 $10gr$ の石を落とす。地面に到着する時の速度はいくらか。
答え高さが $20m$ の時の位置エネルギーは

$$E_P = mgh = 10 \times 9.8 \times 20 = 1960 \tag{53}$$

この時は石は動いていないので運動エネルギーは 0 である。最初の位置エネルギーの全てが運動エネルギーに変換するとするとする。

$$E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}10 \times v^2 \tag{54}$$

したがって、速度は

$$v = \sqrt{2 \times 196} \sim 20m/sec \tag{55}$$

問題１：ブランコに人が乗って、ブランコを揺すっている。その時に位置エネルギーと運動エネルギーはどのようになっているかを考察したい。
１。一番速度が最も速いのはどの点か。
２。一番速度の遅いのはどの点か。
３。速度を速くするにはどのようにすれば良いか。

3.2 波動方程式

波動方程式は波の伝搬を表現している。一番分りやすい例題は縄の端を持って上下に振ると上下の振動がもう一方の端の方に伝わっていく現象である。これは次のような方程式で表現される。この形の微分方程式を見た人がいるかもしれない。光の伝搬の方程式や，太鼓の音が空間を伝わる時もこの方程式を用いる。この方程式がとりもなおさず量子力学の微分方程式になる。勿論この方程式もニュートンの方程式から導出出来る。

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{56}$$

この方程式は 2 変数であり、しかも 2 階の微分方程式になっている。ここで、微分の書き方が少し違っていることに注意をして欲しい。通常の小さい量をあらわす d の代わりに ∂ が使われている。この記号は偏微分の記号である。小さい量であると言う意味は代わらないが微分する際に二つの変数があることに起因する。つまりは、一つの変数で微分する時には他の変数は動かさないでとめておくという意味である。したがって、当然のことながらこれまでの一変数のものに比べるともっともっと難しい微分方程式である。しかし、特別の場合には簡単な形に書き直すことができる。書き直しが出来ないときの方程式は難しく通常は計算機を使って数値的に方程式を解く必要がある。すなわち、この微分方程式は変数が左辺は t であり、右辺は x の微分になっており変数が分離されている。従って変数分離型の微分方程式といわれる。

この変数分離型の微分方程式の場合には $y(x,t) = f(x)g(t)$ と変数が分離される。この解の形を微分方程式に代入すると独立した微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} f(x) = a\frac{d^2 f(x)}{dx^2} g(t) \tag{57}$$

この際に、∂ の記号から d の記号に変化していることに注意して欲しい。まさしく，一変数の微分になっているので通常の微分記号で良いのである。これは変数が分離できたことからそれぞれの関数は一つの変数で表現されることからこのようにできるのである。この方程式の両辺を $f(x)g(t)$ で割り算すると次の方程式が得られる。即ち，微分方程式を説く際の常道である変数を辺毎にそろえるのである。

$$\frac{\frac{d^2 g(t)}{dt^2}}{g(t)} = a\frac{\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}{f(x)} \tag{58}$$

この両辺はお互いに別の変数で書かれているので定数と等しくなる。それを λ と書く。すると独立の二つの微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} &= \lambda g(t) \\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{\lambda}{a} f(x) \end{aligned} \tag{59}$$

このそれぞれはバネの場合と同じ方程式になっている。即ち，それぞれの解は次のように虚数を使った対数の形で表現される。

$$\begin{aligned} g(t) &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \\ f(x) &= C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} \end{aligned} \tag{60}$$

と一般的に書くことができる。これをまとめて書いてみたものの一つが次の形をしている。

$$y(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} \tag{61}$$

この解は明らかに波動の式になっていないといけない。そのことを確かめよう。そのためにまずは $x = 0$ での解の振る舞いを見てみよう。

$$y(x = 0, t) = Ae^{i\omega t} \tag{62}$$

これは時間とともに角速度が ω で振動する関数を与えている。これはこの関数の実部を取れば $A\cos\omega t$ になっていることで確かめることができる。つまりは縄の端っこの所で手を角速度が ω で縄を振っている状態である。次には時間が $t = 0$ での解の振る舞いを見てみよう。

$$y(x, t = 0) = Ae^{-ikx} \tag{63}$$

これはまた実部を取れば分かるように三角関数になっている。つまり周期的に振っている。その時の波長は $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ である。さて今度はムービーを作ってみよう。$t = 0$ の波の形を x の関数で書いておく。次に物理学者の得意とする、少し時間が経過した時の図を書くことにする。$\omega t = \delta$ を入れてやると少し波の形が右にずれる曲線が書けるであろう。したがって、時間が経つと右の方に波が移っていく様子が表現されている。

ここで練習問題をやってみよう。偏微分方程式で変数が分離型の微分方程式を考える。

例題１：次の形の微分方程式を解け。

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 5\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \tag{64}$$

答え：

$$\begin{aligned} y &= f(x)g(t) \\ f(x)\frac{dg(t)}{dt} &= 5\frac{df(x)}{dx} \\ \frac{\frac{dg(t)}{dt}}{g(t)} &= 5\frac{\frac{df(x)}{dx}}{f(x)} = \lambda \end{aligned} \tag{65}$$

変数分離型を使って二つの独立な微分方程式を導出する。

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= \lambda g(t) \\ \frac{df(x)}{dx} &= \lambda f(x) \end{aligned} \tag{66}$$

これらの解はそれぞれに次のようになる。

$$\begin{aligned} g(t) &= N_1 e^{\lambda t} \\ f(x) &= N_2 e^{\frac{\lambda}{5}x} \end{aligned} \tag{67}$$

したがって、それぞれの解をあわせると

$$y(x,t) = Ne^{\lambda(t+\frac{1}{5}x)} \tag{68}$$

この際に積分定数は二つで N と λ である。

問１：次の微分方程式を解け。
１。

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 10\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{69}$$

２。

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 10\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \tag{70}$$

この二つめの方程式が量子力学の微分方程式に対応する。

3.3 量子力学の基本方程式

量子力学の重要な動機は電子や原子核のようなミクロの世界の粒子は波動の性質を持つことである。つまりは波が干渉するように電子の運動も干渉する。このように干渉する方程式はニュートンの式では与えることができず、波動の方程式に移る必要がある。その方法を見つけたのがシュレディンガーである。シュレディンガーは波動の性質を持つにはその解は波動の解にならないといけない。しかも、古典力学の条件を満たす必要がある。

電子の運動の解を波動の方程式の解となることを仮定する。これは、非常に面白い考え方である。すなわち、電子は波の性質を持たないと行けない。それではそのような解を与えるべき力学（微分方程式）を考えようという態度である。

$$\psi(x,t) = Ae^{i(\omega t - kx)} = Ae^{i\omega t}e^{-ikx} \tag{71}$$

この解は分離系 (x と t だけの関数の積）になっているので次の方程式の解になっている。

$$a\frac{\partial\psi}{\partial t} = b\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{72}$$

勿論ここで左側で時間に 2 回微分の形になっていても良い。ここからがシュレディンガーのすごいところである。つまりはこれからやろうとしていることは古典力学と何らかのつながりがないといけないと考えるのである。その古典力学とのつながりの所にエネルギー保存則の概念が登場する。

この式とエネルギーの方程式を眺めると一つの法則が見つかる。

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{73}$$

もしこの式において

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ p &\rightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \tag{74}$$

ここで $\hbar$ は量子力学の定数であるプランクの定数である。このように量子の世界に特有な定数を導入することで、どれくらい小さな世界がこの方程式を満たし、我々の世界のようにマクロな世界ではこの方程式を解いてもニュートンの方程式を解いたものと同じ解が出てくることを保証するのである。す

なわち、この式をエネルギーの式に代入し、それが微分型になっているのでそれらの変数の関数である $\psi(x,t)$ を書くとシュレディンガー方程式をえる。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) \tag{75}$$

それでは練習問題をしてみよう。
例題1: 上に書いたシュレディンガーの方程式は波動の解を与えることを示せ。
答え：変数分離型なので $\psi(x,t) = f(x)g(t)$ とおいてシュレディンガーの方程式に代入する。さらにその式を $f(x)g(t)$ で割り算する。

$$i\hbar\frac{\frac{dg(t)}{dt}}{g(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\frac{d^2f(x)}{dx^2}}{f(x)} = \lambda \tag{76}$$

したがって、次の二つの方程式を得る。

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{dg(t)}{dt} &= \lambda g(t) \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2f(x)}{dx^2} &= \lambda f(x) \end{aligned} \tag{77}$$

このそれぞれの微分方程式の解は

$$\begin{aligned} g(t) &= A_1 e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t} \\ f(x) &= B_1 e^{i\frac{\sqrt{2m\lambda}}{\hbar}x} + B_2 e^{-i\frac{\sqrt{2m\lambda}}{\hbar}x} \end{aligned} \tag{78}$$

したがって、波動の解を満たしていることが分かる。空間の方には二つの解が有るが前の方を採用したものを書いてみる。

$$\psi(x,t) = Ne^{-i\frac{\lambda}{\hbar}t + i\frac{\sqrt{2m\lambda}}{\hbar}x} \tag{79}$$

ここで λ などの味けのない定数を少し書き直してみよう。

$$\begin{aligned} \lambda &= E \\ \sqrt{2m\lambda} &= p \end{aligned} \tag{80}$$

このようにすると、$E = \frac{p^2}{2m}$ というかたちが再現される。そうすると解の形は

$$\psi(x,t) = Ne^{-i\frac{1}{\hbar}(Et - px)} \tag{81}$$

即ち、エネルギーと運動量が解の中に現れている波動の関数になっている。すなわち、量子力学の相互作用をしない方程式の解はエネルギーと運動量を含む波動の形をしている。

もし、エネルギーが運動エネルギーと位置エネルギーの和で書けているとすると、

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{82}$$

その時にはシュレディンガー方程式はそれらの運動エネルギーの項と位置エネルギーの項の和として次のように書ける。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x)\psi(x,t) \tag{83}$$

これがシュレディンガーの方程式である。この式が量子力学の基本方程式である。このシュレディンガーの式を使って色んな例題を紹介している量子力学の素晴らしい本はシフの量子力学だと思う。[2]

4 原子核物理

原子核物理や原子物理は量子力学の演習問題になっている。歴史的には原子から放出されるX線（放射線）の理解の過程で量子力学が発展した。原子の場合の類似から原子核物理のシェルモデルが発展した。そこで、原子核物理を理解するための練習問題として3次元の調和振動子の量子力学を計算する。

3次元の調和振動子のポテンシャルはバネの場合に似ている。即ち粒子を中心の位置からずらしたらずれの2乗でポテンシャルが大きくなる。調和振動子はバネの運動の量子力学である。それをシュレディンガーの方程式に入れると次の方程式が得られる。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}kr^2\right)\psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) \tag{84}$$

ここで $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ である。さらにポテンシャルの部分は $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ に比例している。これらのそのまま書くと次のようになる。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) + \frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)\right)\psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) \tag{85}$$

これは素晴らしく難しそうに見える4つの変数を持った2階の微分方程式である。

しかし、ラッキーなことに変数分離の形になっている。まずは時間の部分は右辺だけにあり、左辺にはない。つまりは時間は変数が分離されている。さらに空間部分も変数分離されそうである。それを求めて書き直してみる。

$$\begin{aligned} &[(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}kx^2)+(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}ky^2) \\ &+(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{2}kz^2)]\psi(x,y,z,t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) \end{aligned} \tag{86}$$

このように変数が分離されている際には $\psi(x,y,z,t)=f(x)g(y)h(z)p(t)$ と積の形に書ける。その形を代入しその関数で割り算すると次の形になる。

$$\begin{aligned} &\frac{(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}kx^2)f(x)}{f(x)}+\frac{(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{2}ky^2)g(y)}{g(y)} \\ &+\frac{(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{2}kz^2)h(z)}{h(z)}=\frac{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}p(t)}{p(t)} \end{aligned} \tag{87}$$

それぞれの部分を λ と書くと

$$\begin{aligned} \frac{(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2)f(x)}{f(x)} &= \lambda_x \\ \frac{(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{2}ky^2)g(y)}{g(y)} &= \lambda_y \\ \frac{(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}kz^2)h(z)}{h(z)} &= \lambda_z \\ \frac{i\hbar\frac{d}{dt}p(t)}{p(t)} &= \lambda_t \end{aligned} \tag{88}$$

したがって、それぞれが独立の微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}kx^2)f(x) &= \lambda_x f(x) \\ (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}+\frac{1}{2}ky^2)g(y) &= \lambda_y g(y) \\ (-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}kz^2)h(z) &= \lambda_z h(z) \\ i\hbar\frac{d}{dt}p(t) &= \lambda_t p(t) \end{aligned} \tag{89}$$

　ここで例題を挿入する。
例題１：最後の時間に関する微分方程式を解け。
答え：この式は左辺にある $i\hbar$ で両辺を割り算するとよく見かけている寿命の方程式に似ている。

$$\frac{d}{dt}p(t) = \frac{\lambda_t}{i\hbar}p(t) \tag{90}$$

$i^2 = -1$ なので、そのことを考慮し、さらに $p(t)$ で両辺を割り算すると

$$\frac{\frac{d}{dt}p(t)}{p(t)} = -i\frac{\lambda_t}{\hbar} \tag{91}$$

したがって、これを解くことができる。

$$p(t) = Ae^{-i\frac{\lambda_t}{\hbar}t} \tag{92}$$

問１：空間の微分方程式は少し難しい微分方程式になっている。２階の微分方程式だがその係数に x を含む形になっているのでこれまでのようには解けない。そこで解の候補として

$$f(x) = Ae^{-ax^2} \tag{93}$$

を考える。この関数が x に関する微分方程式の解になっていることを確かめよ。
答：この関数を x に関する微分方程式

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2)f(x) = \lambda_x f(x) \tag{94}$$

に代入する。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(-2a + 4a^2x^2) + \frac{1}{2}kx^2\right)Ae^{-ax^2} = \lambda_x Ae^{-ax^2} \tag{95}$$

この式が x に関係なく成り立つためには次の二つの関係が必要である。

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m}2a &= \lambda_x && (96) \\ \frac{\hbar^2}{2m}(4a^2) &= \frac{1}{2}k \end{aligned}$$

これらの式から次の関係式を得る。

$$a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} \tag{97}$$
$$\lambda_x = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}$$

したがって、このことからガウス関数はシュレディンガーの方程式の解になっていることが言える。

これらの問や例題の答を使ってあの複雑な調和振動子の解は

$$\psi(x,y,z,t) = Ne^{-i\frac{E}{\hbar}t+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{mk}}{\hbar}(x^2+y^2+z^2)} \tag{98}$$

さらにそのエネルギーは

$$E = 3\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{99}$$

となる。この解を古典力学の場合と比較すると面白い。古典力学ではサインやコサイン関数で振動する。その振動の周期は ω でありそれは $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ となる。したがって、量子力学の解においても同じ振動の周期が解を表現している。さらに振り幅はこのエネルギーを入れることにより、$x^2 = \frac{2\hbar}{\sqrt{mk}}$ となり、この点では波動関数は $1/e$ の値を持っている。

原子の場合にはポテンシャルはクーロンのポテンシャルになる。その原子の電荷を Ze と書き、電子の電荷を $-e$ と書くとクーロンのポテンシャルは $V(r) = -\frac{Zq^2}{r}$ となる。したがってこの場合のシュレディンガー方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}\right)\psi(r,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,t) \tag{100}$$

この式は時間は変数分離されるが、空間の方は変数分離形になっていない。したがって、非常に複雑な微分方程式である。その解はシッフの本に書かれている。調和振動子も簡単な場合（基底状態）のみで解が与えられている。これも一般的にはその解は超幾何関数になり、それもシッフの本にその解き方が書かれてある。

5　原子と原子核と放射線

原子核の構造がシェルモデルで理解出来るとすると、そこから放出される放射線の現象がよく理解出来る。そこで、原子の場合のエネルギー順位を図に

する。その時に使われるエネルギー準位は次のエネルギーの形になる。

$$E_N = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 N^2} \tag{101}$$

ここで、m は電子の質量である。N は主量子数と呼ばれている。この主量子数は次のように表現される。

$$N = n + l + 1 \tag{102}$$

n は動径量子数、l は軌道角運動量量子数と呼ばれる。これらの数字は 0 から始まる整数の値を取る。したがって、N は１から始まる整数値を取る。したがって、$N = 0$ の時には $n = 0, l = 0$ であり、$N = 1$ の時には $n = 1, l = 0$ と $n = 0, l = 1$ があり、$N = 2$ の時には $n = 2, l = 0$ と $n = 1, l = 1$ と $n = 0, l = 2$ がある。N はずっと大きな値を取ることが可能である。図では $l = 0$ の時には s、$l = 1$ は p をさらには $l = 2$ は d が使われる。

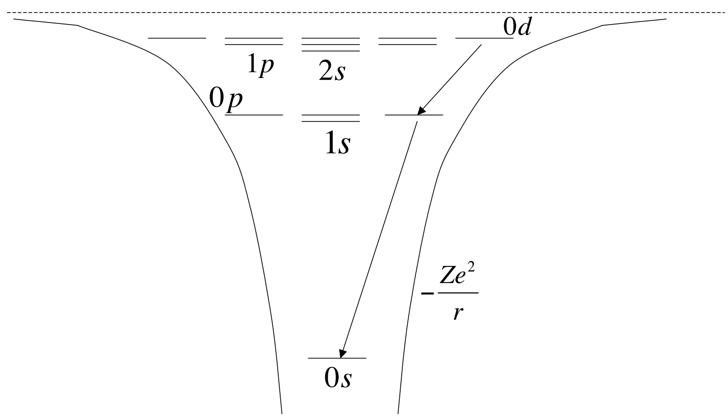

Figure 1: 原子における電子のエネルギー順位

この図からいろんなことがいえる。まずはマジック数である。原子の場合の実験から分かっているマジック数は２と１０と２８である。それぞれは He と Ne と Ar である。これらは希ガスといわれていて、非常に安定な原子である。そのためにはそれぞれの順位に２つずつ入るようにするとこのことが理解出来る。この二つづつ入ることができるのは電子がスピンを持っており、その向きに二通りあることに起因する。まずは 0s 軌道には二つ電子が入る。電子にはパウリ効果と言って同じ量子状態には１つしか入れないという

性質を持っている。したがって、次の電子を入れようとすると上の軌道、つまりは 1s か 0p 軌道に入る必要がある。その時にエネルギーの大きな増加がおこる。したがって、1s に電子が二つはいった状態は特別に安定な原子であるといえる。これは He 原子である。さらに電子の数を増やしていくと 1s に二つと 0p 軌道に６つ入れることができる。したがって、総数で電子の数が１０個で N=1 の軌道がいっぱいになる。これは Ne 原子である。このように希ガスは非常に化学的に安定であると分かっているが、その理由は量子力学によって、説明される。エネルギーがとびとびになっているのがその起因である。

このようにエネルギーがとびとびになっていると、一番エネルギーの低い状態は電子が下から順番に詰まっている状態であることが理解出来るであろう。その原子にレーザーなどでエネルギーを与えてやると励起状態が作れる。それは電子が順番に下から詰まった状態では亡く、上の所に電子が入った状態が出来る。これを励起状態という。この励起状態にある電子は不安定な状態で、ある寿命で基底状態に遷移する。この時に放射されるのが光である。この原子の中での電子の遷移によって発生する光を X 線と呼ぶ。

原子核の場合も原子と同じように議論する。原子核の場合の核子（陽子と中性子）はクーロン力で束縛されていなくて、お互いの間に働く短距離の核力で束縛されている。１９３２年の湯川によるパイ中間子が核子の間に働いて原子核を構成する。この湯川の力を使って原子核を作る研究は今になって盛んに行われるようになったが、１９４９年の段階でメイヤーとヤンセンによって導入されたシェルモデルが原子核物理を考える上での基礎になっている。

シェルモデルは原子物理に習って作られた現象論的な理論である。その際の核子は３次元の調和振動子ポテンシャルによって束縛されていると仮定する。その際のエネルギーは量子力学を解いて次のようになることが分かっている。

$$E_N = \hbar\omega(N + \frac{3}{2}) \tag{103}$$

さらにこの主量子数は

$$N = 2n + l \tag{104}$$

と書かれている。ただし、原子の場合と同じように n, l は 0 から始まる整数である。この時のポテンシャルとエネルギー準位を図にしたものが図２に書かれている。この場合には原子の場合のスペクトルと大きく違っていることが見受けられる。そのためにマジック数は変更される。即ち 1s 軌道にスピン

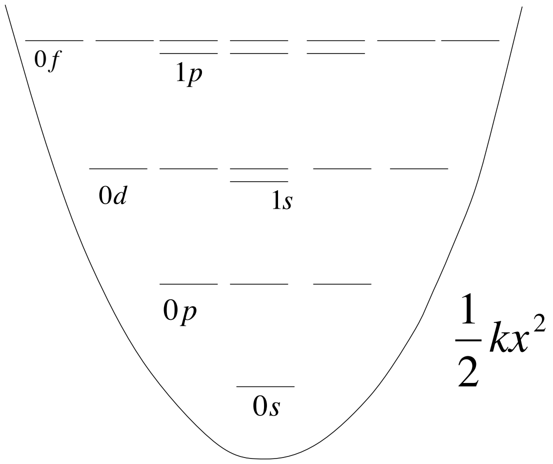

Figure 2: 原子核における核子のエネルギー順位

の自由度まで考えると２つはいることができる。陽子が二つはいれるし、中性子も二つはいれる。陽子だけに話しを限ると原子と同じように２がマジック数になる。次には 1p には 3×2 個入ることができる。したがって、その軌道までを満たした場合には８個の陽子が入ることが可能である。したがって、８が次のマジック数になる。原子の場合と変更を受けていることが分かる。次には 1s に２つさらには 0d に１０個は入れるので合計として２０個の陽子が入ると満杯になる。その数は２０である。原子核では２、８、２０などがマジック数で原子の場合とは明らかに変わっている。この規則性を見つけてシェルモデルが原子核物理での基本的な概念となった。

　その上で原子核の場合でも原子の場合と同じように原子核が構成される。すなわち、核子がエネルギー準位の下の方から順に詰まっていたった状態が一番エネルギーが低く、それが基底状態になる。したがって、励起状態はいくつかの核子が上の状態に飛び上がった状態ということになる。その状態はエネルギー的に不安定であり、光を放出して下のエネルギーを持った状態に遷移する。原子核の場合の光のエネルギーは X 線とは大きく異なっており、γ 線と呼ばれる。

問題１：原子の場合の電子のエネルギー準位は

$$E_N = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2 N^2} \tag{105}$$

と与えられる。その際の取るべき値は、量子力学により、$N = n + l + 1$ と与

えられる。原子のマジック数を下から順番に4つ述べよ。X線の遷移が $N=1$ のレベルまで順番に落ちてくる時のX線のエネルギーを表現せよ。X線のエネルギーは遷移する二つの順位間のエネルギー差で与えられる。

問題２：原子核の場合には核子のエネルギー準位は

$$E_N = \hbar\omega(N + \frac{3}{2}) \tag{106}$$

と与えられる。その際の取るべき値は、量子力学により $N = 2n + l$ と与えられる。原子核のマジック数を下から順番に4つ述べよ。

6　微分方程式を知った上での放射線

ご苦労様でした。物理学の発展にいかに微分方程式が貢献しているかが理解出来たとすると嬉しい限りです。私の伝えたかったのは世の中には色んな能力を持った人がいること、さらには得意、不得意もあるもので、自分が何が得意かを是非考えて欲しい。その上で自分の得意なことで人に評価されることがまずは大事で次ぎには、人が得意なものがある時にはそれをしっかりと評価して共に歩んでいくことが大事だと思う。是非、教えあう精神を持つことで良い仕事をしてくれることを願っている。

6.1　何故、放射線が原子核や原子から放出されるのか

量子力学によればエネルギーはとびとびである。それは粒子をある空間に閉じ込めるとかならずその振動数はとびとびになるからである。音波の場合は良く経験しており、波の性質としてある長さの空洞に音を入れるととびとびの振動数を持つことが知られている。これは波動の性質である。量子力学も波動の方程式に従うので、とびとびのエネルギー（振動数）を持つことになる。したがって、励起状態もとびとびのエネルギーを持ち、そこから下のエネルギーを持った状態に光を放出してより安定な状態に変化していく。この放出される光はそのエネルギーが大きく違っており、原子の場合にはX線と呼ばれ、原子核の場合にはγ線と呼ばれている。

6.2　何故、放射線には光以外に粒子があるのか

原子の物理では光のみが放出される。それは、原子の場合には電子が抗生物質になっており、その電子は光との相互作用しかしないからである。光を物

質に当てるとそのエネルギーを吸い取って電子が励起される。この電子に与えるエネルギーが電子を束縛しておけるエネルギーにくらべて大きな場合には電子が放出される。この方法を利用して電子を作り出してこれを放射線として使うこともできるし、また、この電子を加速器を使って加速をして、物質に照射してやると原子を励起しそこから光を取り出すことが可能になる。X 線はこのようにして人工に作ることができる。

原子核も原子と電磁相互作用については同じであるが、エネルギーの大きさが違う。原子の大きさは $1A = 10^{-8}cm$ である。この長さの単位をオングストロームという。一方で原子核の大きさは $1fm = 10^{-13}cm$ である。この単位をフェントメーターと呼ぶ。後は不確定性原理のことを考えると、

$$\Delta x \Delta p = \hbar \tag{107}$$

その動く運動量は長さに逆比例するので、約 10^5 倍大きなエネルギーになる。電子の場合には $eV \sim keV$ であるが、原子核の場合には $MeV \sim GeV$ になる。したがって、原子核から放出される放射線はエネルギーが大きく非常に危険であるということが言える。

次に原子核の場合には別の放射線が可能である。電子（β線）やヘリウム原子核（α線）である。核分裂の場合には非常に重い原子核が放射線として放出される。原子核の構成粒子は陽子や中性子であるが、構成粒子でない電子が放出されるのは陽子と中性子の間ではお互いに遷移を起こすことが知られていることによる。この際にはかならず電子が伴う。この反応を弱い相互作用と呼ぶ。したがって、電子が放出される場合には原子核は陽子の数が変化することになる。ヘリウム原子が放出されるのは非常に重い原子核の場合であり、重くなってくると原子核の束縛エネルギーが陽子間のクーロン力のためにどんどんと小さくなり、ヘリウム原子核を放出する方がエネルギーが得するこに起因する。

これらの性質をしっかりと理解すれば、原子核から放出される放射線を安全に使うことが可能になる。しかも、エネルギーが高いので危険だが使い方をしっかりと確認しながら使えば人類に取って大きな力を得ることになる。今後の人類の発展には欠かせないエネルギーである。

6.3　我々は原子核反応で生きている

我々が存在するのはこの原子核反応のお陰である。この原子核反応を使って、太陽は成長し続けており、そのさいに放出されるエネルギーを使って我々の日常生活は成り立っている。その意味では星は水素をヘリウムなどのより重い原子核に変換しながらエネルギーを作り、自らが重力で押しつぶされない

ように必死に働いている。これは自らを守るために星がやっている活動である。我々はその恩恵で生命活動を行っている。

宇宙に存在する星達の全てがこの活動をしている。したがって、自然界では放射線が充満している。放射線に対する充分な知識を持つことが自然と共生するテクニックといえる。

長い間、この講義につき合ってくれたことに感謝します。科学は人類が培って来た重要な財産です。これらを充分に理解することは人類の生活にかならず役に立ちます。さらには、このような知識を生み出している科学者に感謝の念を持つことも必要です。人はそれぞれに役割を持って生活しています。一人一人で全てが出来るものではありません。だからこそ、お互いを尊敬しあい、協力しあって、より良い社会を作っていくことが重要だと思います。

なお、このノートは土岐の HP に掲載されています。その url は
http://www.rcnp.osaka-u.ac.jp/ toki/medicalphysics.pdf

References

[1] 土岐博「解いて分かって使える微分方程式」共立出版（1997）

[2] L.I. Schiff, ”Quantum Mechanics”:シッフ「量子力学」井上健訳（1970）吉岡書店