原子核・ハドロン物理

核子（陽子、中性子）　　原子核の構成要素
中間子　　　　　　　　　陽子と中性子を結びつける糊

＝＝＝＞　これらはいずれもクォークからできている
クォークを結びつけるのはグルーオン

・原子核は原子の土台となる、物質を形成する最も基本的な要素
・４つの力すべてを感じる：
　強い相互作用、電磁気相互作用、弱い相互作用、重力
　これら力の性質を解明する際に重要な役割を果たした（果たすであろう）
・強い相互作用のダイナミックスはそれ自体が興味深い
　SU(3) ゲージ理論としての量子色力学（ＱＣＤ）
　クォークの閉じ込め　　比誘電率は 1 より小さい（電磁気では 1 より大きい）
　カイラル対称性と自発的な破れ　＝＞　質量ゼロの粒子の出現
・大局的な（グローバルな）対称性の自発的な破れ
　南部ーGoldstone 粒子（質量がゼロ）の出現
　フェルミオンの質量生成機構

ＱＣＤのカイラル対称性

クォークの種類　$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{s} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$　～　質量　$\begin{pmatrix} 1.5\sim 5 & 1{,}200 & 170{,}000 \\ 3\sim 9 & 60\sim 170 & 4{,}000 \end{pmatrix}$ in MeV

u, d, s は比較的軽いので、この３種類のあいだで対称性を考えることができる
＝＞　フレーバー対称性

もしクォーク（フェルミオン）の質量が厳密にゼロだったら．．．
　ヘリシテイープラス（右巻き）の粒子はどこから見てもプラス
　ヘリシテイーマイナス（左巻き）の粒子はどこから見てもマイナス
すなわち、
　右巻きの粒子と左巻きの粒子をおのおの独立に考えることができる
　　カイラル対称性がある
もしクォークの質量が有限ならば
　右巻きの粒子は見方によって左巻きに見える
　　カイラル対称性は破れている
逆に：　カイラル対称性が破れれば質量が生成される

適当な相互作用（ＱＣＤの場合はグルーオンを介した力）によって、
カイラル対称性を破ることができる＝＞　対称性が自発的（力学的）に破れる

右巻き・左巻き成分への分解

自由な（相互作用を受けない）核子のラグランジアン（質量 m ）

$$\boldsymbol{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \ , \qquad \partial\!\!\!/ = \partial_\mu \gamma^\mu$$

ガンマ行列は Dirac 表示で $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Euler-Lagrange の運動方程式（ψについてのみ記す。$\bar{\psi}$についても同様）

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \boldsymbol{L}(\psi,\partial_\mu\psi)}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = \frac{\partial \boldsymbol{L}(\psi,\partial_\mu\psi)}{\partial\bar{\psi}} \quad => \quad (i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$$

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = \left(i\partial_t\gamma^0 + i\vec{\nabla}\cdot\vec{\gamma} - m\right)\psi = \begin{pmatrix} i\partial_t - m & i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} \\ -i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} & -i\partial_t - m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} = 0$$

もし、$m = 0$ ならば、 $\begin{pmatrix} i\partial_t & i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} \\ -i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} & -i\partial_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} = 0$

これから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\partial_t & i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} \\ -i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} & -i\partial_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i\partial_t & i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} \\ -i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} & -i\partial_t \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i\partial_t + i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} \\ -i\partial_t - i\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (u+l)/\sqrt{2} \\ (u-l)/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

すなわち、ユニタリ変換 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ によって、４成分 Dirac 方程式は、２つの２成分方程式に分離することができる（Weyl 表示）：

$$(-i\partial_t - i\nabla\cdot\sigma)\psi_R = 0\,, \qquad (-i\partial_t + i\nabla\cdot\sigma)\psi_L = 0、 \qquad \boxed{\psi_{R,L} = \frac{u \pm l}{\sqrt{2}} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}\psi}$$

問　Weyl 表示のガンマ行列を求めよ。

問　Weyl 表示でラグランジアンが

$$\boldsymbol{L} = i\psi_R^\dagger(\partial_0 + \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\psi_R + i\psi_L^\dagger(\partial_0 - \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla})\psi_L + m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L)$$

と書けることをしめせ。この式は、$m = 0$ならば、R と L の成分が分離すること、また質量項はそれらを混ぜることを示している。

カレント（ネーターの定理）

系（ラグランジアン）に対称性があると、
それに対応した保存流（カレント）が存在する

ややー般的な説明

$\phi=(\phi_1,\phi_2,\ldots)$ に対して、線形変換 $\phi\to\boldsymbol{U_t}(\alpha)\phi=\exp(\boldsymbol{i}\alpha\boldsymbol{t})\phi\sim(1+\boldsymbol{i}\alpha\boldsymbol{t})\phi$ を考える。
ここに、$\boldsymbol{t}$ は変換の生成元、α は変換パラメータ。

位相変換では $\boldsymbol{t}=1$ $\quad \boldsymbol{U_t}(\alpha)=\exp(\boldsymbol{i}\alpha)$

xy 平面の２成分ベクトルの回転の場合には $\phi=(\phi_1,\phi_2)$

$$\boldsymbol{t}=\begin{pmatrix}0 & -\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{i} & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{U_t}(\alpha)=\exp(\boldsymbol{i}\alpha\boldsymbol{t})=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

ラグランジアンが不変とは $\boldsymbol{L}(\phi',\partial_\mu\phi')=\boldsymbol{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$、 $\quad\phi'=\boldsymbol{U_t}(\alpha)\phi$
無限小変換に対する変分を計算すると

$$\delta\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(\phi',\partial_\mu\phi')-\boldsymbol{L}(\phi,\partial_\mu\phi)\sim\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial\phi}\boldsymbol{i}\alpha\boldsymbol{t}\phi+\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\boldsymbol{i}\alpha\boldsymbol{t}\partial_\mu\phi=0$$

運動方程式 $\quad\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}^\mu}\dfrac{\partial\boldsymbol{L}(\phi,\partial_\mu\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)}=\dfrac{\partial\boldsymbol{L}(\phi,\partial_\mu\phi)}{\partial\phi}$ を使うと

$$\alpha\partial_\mu\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\boldsymbol{t}\phi\right)=0$$

すなわち、カレントを $\quad\boldsymbol{J}^\mu=-\boldsymbol{i}\dfrac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\boldsymbol{t}\phi$ と定義すれば、保存することがわかる

問 核子のラグランジアン $\boldsymbol{L}=\overline{\psi}(\boldsymbol{i}\boldsymbol{\partial}-\boldsymbol{m})\psi$ は、位相変換 $\psi\to\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\alpha}\psi$ に対して不変である。対応するカレントが $\boldsymbol{J}^\mu=\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ であることを示せ。

問 このカレントを Weyl 表示で表すと、R と L の和になることを示せ。

$$\boldsymbol{J}^\mu=\overline{\psi}\gamma^\mu\psi=\overline{\psi}_{\boldsymbol{R}}\gamma^\mu\psi_{\boldsymbol{R}}+\overline{\psi}_{\boldsymbol{L}}\gamma^\mu\psi_{\boldsymbol{L}}\equiv\boldsymbol{R}^\mu+\boldsymbol{L}^\mu$$

問 $\boldsymbol{m}=0$ ならば、$\psi_{\boldsymbol{R}}$ と $\psi_{\boldsymbol{L}}$ のそれぞれに対する位相変換 $\psi_{\boldsymbol{R,L}}\to\exp(\boldsymbol{i}\alpha_{\boldsymbol{R,L}})\psi_{\boldsymbol{R,L}}$ のもとで、R と L のラグランジアンが不変であること、したがって、それぞれに対するカレント $\boldsymbol{R}^\mu$ と $\boldsymbol{L}^\mu$ がおのおの独立に保存することを示せ。

$$\partial_\mu\boldsymbol{R}^\mu=0,\quad\partial_\mu\boldsymbol{L}^\mu=0$$

R、L場$\psi_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}}$の物理的な意味

$$\psi_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}} = \frac{1\pm\gamma_5}{2}\psi = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}}\psi$$

（1） $\boldsymbol{P_R} \equiv \dfrac{1+\gamma_5}{2}$, $\boldsymbol{P_L} \equiv \dfrac{1-\gamma_5}{2}$ は射影演算子で、次の性質を満たす：

$$\boldsymbol{P_R}^2 = \boldsymbol{P_R}, \quad \boldsymbol{P_L}^2 = \boldsymbol{P_L}, \quad \boldsymbol{P_R}\boldsymbol{P_L} = 0, \quad \boldsymbol{P_R} + \boldsymbol{P_L} = 1$$

（2） $\psi_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{L}}$ はγ_5の固有状態

$$\gamma_5\psi_{\boldsymbol{R}} = \gamma_5\boldsymbol{P_R}\psi = +\psi_{\boldsymbol{R}}, \quad \gamma_5\psi_{\boldsymbol{L}} = \gamma_5\boldsymbol{P_L}\psi = -\psi_{\boldsymbol{L}}$$

（3） $\psi_{\boldsymbol{R}}$，$\psi_{\boldsymbol{L}}$ はパリティー変換のもとでお互いに移り変わる：

$$\psi_{\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\boldsymbol{P}} \gamma_0\frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \frac{1-\gamma_5}{2}\gamma_0\psi = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi' = \psi'_{\boldsymbol{L}}$$

（4）カイラリティー正・負（右巻き・左巻き）の状態は質量ゼロの場合に、ヘリシティーの固有状態と等価である。

このことを確かめるために質量ゼロの粒子が z 方向に光速度（$\boldsymbol{c}=1$）で運動している場合を考える： $\boldsymbol{p}=(0,0,1)$。このときヘリシティープラス、すなわち spin $\boldsymbol{s_z}=+1/2$ の Dirac スピノルは

$$\psi_+ = \begin{pmatrix}1\\ \vec{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix}\chi_\uparrow = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\chi_\uparrow$$

とかける。ここで$\chi_\uparrow = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$で、最後の辺の 1 は$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$である。
同様にヘリシティーマイナスの Dirac スピノルは

$$\psi_- = \begin{pmatrix}1\\ \vec{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix}\chi_\downarrow = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\chi_\downarrow$$

と書ける。これらを用いて、次の式を容易に示すことができる：

$$\boldsymbol{P_R}\psi_+ = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\chi_\uparrow = \psi_+$$

$$\boldsymbol{P_L}\psi_- = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\chi_\downarrow = \psi_-$$

$$\boldsymbol{P_R}\psi_- = \boldsymbol{P_L}\psi_+ = 0$$

これらの関係式は、質量を持たないフェルミオンの場合、$\psi_{\boldsymbol{R}}$ は正のヘリシティー、$\psi_{\boldsymbol{L}}$ は負のヘリシティーの状態であることを示している。