２．線形シグマ模型

σ－ω模型（Walecka）

$$L_{\sigma\omega} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi + g_\sigma \sigma \bar{\psi}\psi + g_\omega \omega_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$$
$$+\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma^2 + \tfrac{1}{4}(\partial_\mu \omega^\nu - \partial_\nu \omega^\mu)^2 + \frac{m_\omega^2}{2}\omega_\mu{}^2 + \ldots \qquad (1)$$

各項の意味

$\bar{\psi}(i\partial - m)\psi$　　質量mの核子が自由に運動する項

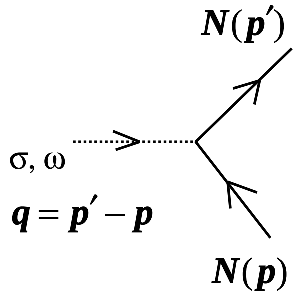
$g_\sigma \sigma \bar{\psi}\psi$　　σNN の結合、強さはg_σ

$g_\omega \omega_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi$　　ωNN の結合　　”　g_ω

$\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 + \frac{m_\sigma}{2}\sigma^2$　　質量m_σの σ 粒子の運動項

$\tfrac{1}{4}(\partial_\mu \omega^\nu - \partial_\nu \omega^\mu)^2 + \frac{m_\omega}{2}\omega_\mu{}^2$

質量m_ωの ω 粒子の運動項



問　図のように σ、ω 粒子が核子と結合する湯川結合を考える。非相対論的な近似の主要項はいずれも、スピンに依存しない（スカラー）結合になることを示せ。

$$N(p) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma \cdot p/(E+M) \end{pmatrix} \chi$$　（χ は２成分スピノル）を用いるとよい。

問　非相対論的な近似の２番目の項から、スピン軌道力が出てくることを示せ。

問　核子に働く力が、スカラーσ粒子を交換する場合には引力、ベクトル ω 粒子を交換する場合には斥力になることを示せ。

？？模型は、原子核を相対論的に記述する現象論的な模型として、成功してきた。たとえば

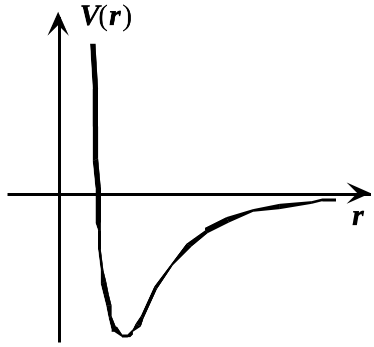
核物質の束縛エネルギーを再現

$$E_B \sim 15\ MeV \quad \text{at} \quad \rho_0 = 0.16\ fm^{-1}$$

核力の中心力成分を定性的に再現

中間距離の引力と近距離の斥力

スピン・軌道力の自然な導出



足らないもの：

パイ中間子　＝　もっとも軽いハドロン（中間子）で、核力の重要な成分のはず

高エネルギー核子・原子核の反応でもっとも多く生成される粒子

知識：　$m_{\pi\pm}=139.57$　$m_{\pi 0}=134.98$　平均して　$m=138$　MeV

これは他の粒子と比べ（$m_\rho=770$　$m_N=938$　MeV など）ずっと軽い

$\tau(\pi^\pm\to\mu^\pm\bar{\nu}_\mu)\sim 2.6\times 10^{-8}\,\mathrm{sec}$　weak decay

$\tau(\pi^0\to 2\gamma)\sim 8.4\times 10^{-17}\,\mathrm{sec}$　EM decay

スピンとパリティーは　$J^P=0^-$

これらをどのようにしてとりいれていくか？

キーワードはカイラル対称性　＝　右巻きと左巻きの独立な対称性

強い相互作用はこの対称性を、全体として満たしている

しかし、自発的に破れているという

（弱い相互作用はこれをあからさまに破る＝＞パリティー非保存）

カイラル対称性があれば、パイの存在を認めればσ粒子の存在が自然に予言される

対称性を原理にした理論の拡張

基本的な考え方

（１）理論に含まれる粒子は対称群 G の適当な表現に属していると仮定する

$\phi_a\ (a=1,\ldots,N)$：ある対称群の N 次元表現

線形変換ならば

$$\phi_a\to\sum_b g_{ab}\phi_b$$

の様に変換する

（２）ラグランジアンは、これらの適当な組み合わせで、

変換に対して不変なものから構成する

g がユニタリ変換ならば $\phi^\dagger\phi$ は変換に対して不変

復習：　π は擬スカラーなので核子の方も擬スカラー $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ でないといけない

$\bar{\psi}\psi$	スカラー	
$i\bar{\psi}\gamma_5\psi$	擬スカラー	
$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$	ベクトル	
$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$	擬（軸性）ベクトル	
$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$	テンソル	合計１６個

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]$$

問　上の双１次形式はすべて実の量であることを示せ

線形？模型の構成の仕方

・必要な場は核子ψと中間子(σ,π)

$$\psi \quad \boldsymbol{nucleon} \quad \boldsymbol{J^P} = 1/2^+$$

$$\sigma \quad \boldsymbol{sigma\, meson} \quad \boldsymbol{J^P} = 0^+ \quad (\boldsymbol{scalar\ particle})$$

$$\pi \quad \boldsymbol{pi\ meson} \quad \boldsymbol{J^P} = 0^- \quad (\boldsymbol{pseudoscalar\ particle})$$

簡単のために、核子は陽子か中性子の１方を考える（アイソスピンは無視）

・対称性はカイラル対称性：

右巻き左巻き成分　$\psi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}} = \dfrac{1\pm\gamma_5}{2}\psi$　に対する独立な位相変換

$$\psi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}} \to \exp(\boldsymbol{i}\theta_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}})\psi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}} \qquad \theta_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}}\text{は独立なパラメータ}$$

相互作用項

ためしに核子とパイ中間子の湯川相互作用を考える：$\boldsymbol{i}\overline{\psi}\gamma_5\psi\pi$

$\boldsymbol{i}\overline{\psi}\gamma_5\psi\pi = \boldsymbol{i}\left(\psi_{\boldsymbol{l}}^\dagger\psi_{\boldsymbol{r}} - \psi_{\boldsymbol{r}}^\dagger\psi_{\boldsymbol{l}}\right)\pi$　なので

この結合はこのままではカイラル不変ではない

カイラル位相変換に対して、$\psi_{\boldsymbol{l}}^\dagger\psi_{\boldsymbol{r}}$等は複素数の様に振る舞うので、

中間子の方でも実数？の他にもうひとつの実数？を用意するとよさそう。

そこで

？と？を導入し$\boldsymbol{z} = \sigma + \boldsymbol{i}\pi$ として複素数の位相変換を考える

$$\boldsymbol{z} \to \exp(\boldsymbol{i}\theta_{\boldsymbol{l}})\,\boldsymbol{z}\,\exp(-\boldsymbol{i}\theta_{\boldsymbol{r}}) \quad \text{あるいは}$$

$$\begin{pmatrix}\sigma\\ \pi\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\cos(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}}) & -\sin(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}})\\ \sin(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}}) & \cos(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ \pi\end{pmatrix}$$

これから組み合わせ$\psi_{\boldsymbol{l}}^\dagger\boldsymbol{z}\psi_{\boldsymbol{r}}$は、カイラル変換に対して不変であることが一目瞭然

この量は実ではないので、エルミート共役を足して

$$\psi_{\boldsymbol{l}}^\dagger\boldsymbol{z}\psi_{\boldsymbol{r}} + \psi_{\boldsymbol{r}}^\dagger\boldsymbol{z}^\dagger\psi_{\boldsymbol{l}} = \psi_{\boldsymbol{l}}^\dagger(\sigma+\boldsymbol{i}\pi)\psi_{\boldsymbol{r}} + \psi_{\boldsymbol{r}}^\dagger(\sigma-\boldsymbol{i}\pi)\psi_{\boldsymbol{l}}$$

を考えれば、これは実でしかもカイラル不変。

問　この式を Dirac 表示に戻すと

$$\psi_{\boldsymbol{l}}^\dagger(\sigma+\boldsymbol{i}\pi)\psi_{\boldsymbol{r}} + \psi_{\boldsymbol{r}}^\dagger(\sigma-\boldsymbol{i}\pi)\psi_{\boldsymbol{l}} = \overline{\psi}(\sigma+\boldsymbol{i}\pi\gamma_5)\psi$$

と書けることを示せ

問　ベクトル$\left(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}i\gamma_5\psi\right)$がカイラル変換でどのような変換を受けるか計算せよ

問　上記のラグランジアンはカイラル変換のもとで同じように変換するベクトル
$\left(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}i\gamma_5\psi\right)$と$(\sigma, \pi)$の内積の形をしていることを示せ

問　？粒子は正のパリティーを持たないといけないことを示せ

以上から、カイラル不変の相互作用項として

$$\boxed{L_{\rm int} = g\bar{\psi}(\sigma + i\pi\gamma_5)\psi}$$

を考えることができる。

運動項、ポテンシャル項を加えて線形？模型として

$$\begin{aligned} L_\sigma &= \bar{\psi}\left(i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi)\right)\psi \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 + V(\sigma^2 + \pi^2) \end{aligned}$$

を考えることにする。ここでVは１変数関数でその引数が$\sigma^2 + \pi^2$である。

問　運動項$\bar{\psi}i\partial\psi$はカイラル不変であることを示せ