南部ーGoldstone の定理と質量生成

考えるべきラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
L_\sigma &= \overline{\psi}(i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi))\psi + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 \\
&\quad -\frac{\mu^2}{2}(\sigma^2+\pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\pi^2)^2
\end{aligned}
$$

ハミルトニアンは

$$
\begin{aligned}
H_\sigma = \int d^3x \Big[&\overline{\psi}(-i\alpha\cdot\nabla + g(\sigma + i\gamma_5\pi))\psi \\
&+ \tfrac{1}{2}(\Pi_\sigma^2 + (\nabla\sigma)^2) + + \tfrac{1}{2}(\Pi_\pi^2 + (\nabla\pi)^2) \\
&+ \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2+\pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\pi^2)^2 \Big]
\end{aligned}
$$

問　線形？模型の運動方程式（ψ, σ, π の連立）を求めよ。

注意すべき点

（１）パラメータ λ は理論の安定性から正でなければならない。

（２）質量パラメータ μ^2 は正にも負にもなり得る。
　　　その符号に応じて、真空の相構造が変わる。
　　　μ^2 が正または負の場合のポテンシャルの形を以下の図に示す。

（３）フェルミオンの期待値はゼロの場合を考える（核子は存在しない）。

（４）時間に依存しない場合がエネルギーは最も低そう＝＞　$\Pi_\sigma = \Pi_\pi = 0$

（５）場所によらない一様な配位がエネルギーは最も低そう＝＞　$\nabla\sigma = \nabla\pi = 0$

結局：　ポテンシャルの最低点とその近傍を考えれば良い

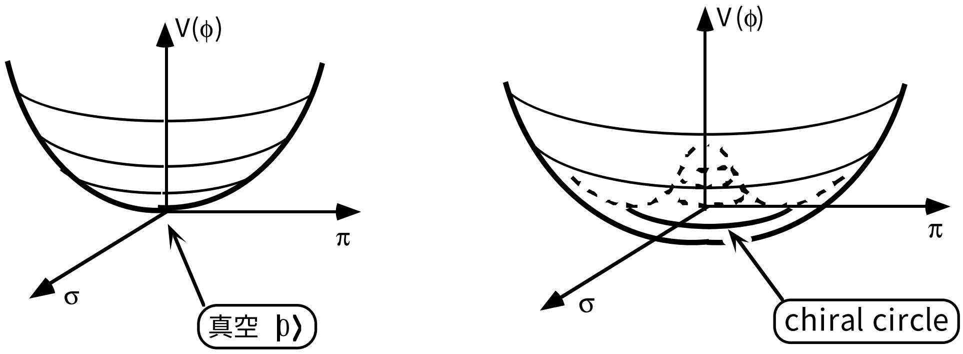
ポテンシャル

$$
V(\sigma^2+\pi^2) = \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2+\pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\pi^2)^2
$$

を展開し、粒子（π、σ、ψ）の質量を調べる。そのためには、真空（エネルギーを最小にする場の配位）のまわりで、場の微小振動について展開し、その２次の項の係数を調べれば良い：

ボソンϕの場合：　$\dfrac{m^2}{2}\sigma^2$

フェルミオンの場合：　$M\overline{\psi}\psi$



$\mu^2 > 0$ の場合　　　　$\mu^2 < 0$ の場合

線形σ模型のポテンシャル

$\mu^2 > 0$の場合：

・真空（ポテンシャルの最も低い点）$|0\rangle$は原点$(\sigma, \pi) = (0,0)$。

・その周りの場の揺らぎから、σ、π ともに同じ質量μ を持つことがわかる。

・カイラル変換のもとで真空$(\sigma, \pi) = (0,0)$は不変。

このほとんど自明な真空に基づい世界を Wigner 相という。

$\mu^2 < 0$の場合：

ポテンシャルの最小点はカイラルサークル（図）上で無限に縮退し、これらのどの点もが真空になり得る。そこで、カイラルサークル上の任意の１点を選び、それを真空と定義してみる。この点では、場の値（これは古典場の値で、量子論では真空期待値）が有限なので、量子場が凝縮していると解釈する。

ところが、真空のパリティーは正で、擬スカラーの π が凝縮してはならない。この問題を回避するためには、先程真空に選んだ点と原点を結ぶ方向を σ 軸と再定義すればよい。系がカイラル対称性を持つ場合、このような選択が可能になる。すなわち、真空ではスカラー場 σ が凝縮しているという。

問　カイラルサークル上の任意の点$(\sigma, \pi) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{f}_\pi^2$は、カイラル変換によって、$(\sigma, \pi) = (\boldsymbol{f}_\pi, 0)$に変換されることを理解せよ。

すなわち、真空は$(\sigma, \pi) = (\sqrt{-\mu^2/\lambda},\ 0) \equiv (\boldsymbol{f}_\pi,\ 0)$である。ここで、 $\boldsymbol{f}_\pi = 93\ \boldsymbol{MeV}$ はπの崩壊定数という物理的に意味のある定数になる。このとき、π 軸は σ 軸に直交する方向にとられる。場の期待値がゼロでない値を持つ真空に基づいた世界を南部ーGoldstone 相という。

この真空の周りで微小振動を考えると、動径方向、すなわちσ方向にはポテンシャル壁を登っていくので、有限質量のσ粒子が励起されることになる。一方、それに直交する、カイラルサークル方向への揺らぎは、平らな面の上の移動となり、エネルギーを必要としないモード、すなわち質量ゼロの粒子が励起される。これを 南部ーGolstone 粒子とよび、非常に良い近似でπ中間子とみなすことができる。

問　ポテンシャルを真空$(\sigma,\pi)=(\sqrt{-\mu^2/\lambda},\ 0)\equiv(\boldsymbol{f}_\pi,\ 0)$の周りで展開し

・σ^2の係数を読み取って、σの質量が$\boldsymbol{m}_\sigma{}^2=2\lambda\boldsymbol{f}_\pi{}^2$

・π^2の項がないこと、したがってπの質量がゼロ

・核子の質量は$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{g}\boldsymbol{f}_\pi$

となることを示せ。

このことは、カイラル対称性が自発的に破れた世界では、質量がその破れによって引き起こされることを示している。

カレントの構造

$$\psi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}}\to\exp(\boldsymbol{i}\theta_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}})\psi_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{l}}$$

変換則
$$\begin{pmatrix}\sigma\\ \pi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\cos(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}}) & -\sin(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}})\\ \sin(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}}) & \cos(\theta_{\boldsymbol{r}}-\theta_{\boldsymbol{l}})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ \pi\end{pmatrix}$$

から、ネーターの定理を使ってカレントを求める

右カレント（$\theta_{\boldsymbol{r}}=\theta_{\boldsymbol{l}}$）：　$\boldsymbol{R}_\mu=\psi_{\boldsymbol{R}}^\dagger\gamma_\mu\psi_{\boldsymbol{R}}-\frac{1}{2}\left(\sigma\partial_\mu\pi-\pi\partial_\mu\sigma\right)$

左カレント（$\theta_{\boldsymbol{r}}=-\theta_{\boldsymbol{l}}$）：　$\boldsymbol{L}_\mu=\psi_{\boldsymbol{L}}^\dagger\gamma_\mu\psi_{\boldsymbol{L}}+\frac{1}{2}\left(\sigma\partial_\mu\pi-\pi\partial_\mu\sigma\right)$

これらの和、差をとって、Vector カレント、axial vector カレントを定義する：

Vector カレント：　$\boldsymbol{V}_\mu=\boldsymbol{R}_\mu+\boldsymbol{L}_\mu=\psi_{\boldsymbol{R}}^\dagger\gamma_\mu\psi_{\boldsymbol{R}}+\psi_{\boldsymbol{L}}^\dagger\gamma_\mu\psi_{\boldsymbol{L}}=\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$

Axial vector カレント：

$$\boldsymbol{A}_\mu=\boldsymbol{R}_\mu-\boldsymbol{L}_\mu=\psi_{\boldsymbol{R}}^\dagger\gamma_\mu\psi_{\boldsymbol{R}}-\psi_{\boldsymbol{L}}^\dagger\gamma_\mu\psi_{\boldsymbol{L}}=\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi-\left(\sigma\partial_\mu\pi-\pi\partial_\mu\sigma\right)$$

（注意）パイオンがアイソスピン１を持つ場合には、Vector カレントに
$\boldsymbol{V}_\mu^{\boldsymbol{a}}\sim\varepsilon_{\boldsymbol{abc}}\pi^{\boldsymbol{b}}\partial_\mu\pi^{\boldsymbol{c}}$が加わる。

問　上記の、右・左カレントをネーターの定理を使って導出せよ。

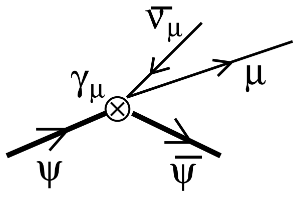
問　ラグランジアンが$\boldsymbol{L}=\overline{\psi}(\boldsymbol{i}\partial-\boldsymbol{M})\psi$で与えられる自由核子の場合、運動方程式を使って、Vector カレントは保存するが、axial vector カレントは保存しないことを示せ。

$$\partial_\mu\boldsymbol{V}^\mu=0,\ \partial_\mu\boldsymbol{A}^\mu\neq0$$

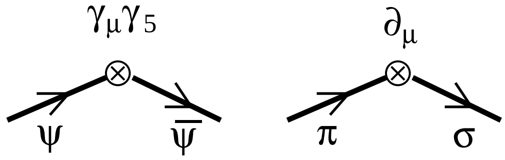
問　線形？模型の場合、運動方程式を使って Vector および axial vector カレントのいずれもが保存することを示せ。

カレントのプロセス

Wigner 相



Vector カレント



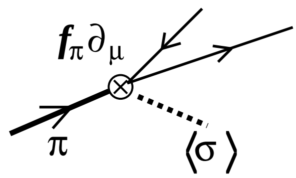
Axial vector カレント

通常のカレントと同じ。すなわち、相互作用の前後で粒子が存在している。若干違うのは、axial カレントの場合πとσの遷移が起こること。

南部ーGoldstone 相

Axial vector カレントの１項が、$\boldsymbol{A}_\mu \sim \sigma\partial_\mu\pi \to -\boldsymbol{f}_\pi\partial_\mu\pi$ となり

$$\langle 0|\boldsymbol{A}_\mu(\boldsymbol{x})|\pi(\boldsymbol{q})\rangle = \boldsymbol{i}\boldsymbol{f}_\pi\boldsymbol{q}_\mu \exp(-\boldsymbol{iqx}) \neq 0$$



すなわち、πの崩壊が起こる。粒子間の遷移という観点からは、πが真空に凝縮しているσ（$\langle\sigma\rangle$）に遷移していく、と解釈することができる。

問　線形σ模型の３つのパラメータ$\boldsymbol{g}$、μ、λを、核子の質量$\boldsymbol{M} = 938\boldsymbol{MeV}$、？の質量$\boldsymbol{m}_\sigma \sim 600\boldsymbol{MeV}$、$\pi$の崩壊定数$\boldsymbol{f}_\pi = 93\boldsymbol{MeV}$を用いて決定せよ。

問　前問の数値を使って、ポテンシャルの原点での値（単位体積 1 fm^3 あたりのエネルギーMeV）を計算せよ。これをバッグ模型の、体積エネルギーと解釈することができる。