

相对論的多体系としての原子核
– 相对論的平均場理論とカイラル対称性 –

土岐 博、保坂 淳

平成 19 年 4 月 6 日

まえがき

この本は阪大で物理学を専攻しようとする学部4年と修士1年の学生を対象に行っている授業をもとにして書かれてある。原子核物理の話題は数多く多岐にわたっているが、最近とくに強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (Quantum Chromodynamics = QCD) に基づいた研究が活発に行われている。強い相互作用の基礎理論が QCD であることが認識されたのがすでに 1970 年代であるので、以前よりこのような研究はなされてきたが、強い相互作用の法則が思いのほか難しく、原子核の問題で十分成果が得られるに至っていなかった。この状況は、現在でも完全に解決された訳ではなく、今日に至るまで多くの研究者が研究を続けている。

最近になり、面白い発展の方向付けがなされようとしている。カイラル対称性という、QCD の最も重要な側面を原子核物理でまじめに取り入れようとした研究である。この際、パイ中間子の導入が不可欠になる。元々パイ中間子は 1934 年に湯川秀樹によって、強い相互作用をする核力を説明しようと導入された粒子である。その後素粒子物理学の発展において、非常に重要な役割を果たしてきたにもかかわらず、原子核物理においてはそれほど重視されてこなかった。多くの核子から構成される原子核において、電荷とスピンを交換しながら相互作用をするパイ中間子を正確に扱うことは非常に難しく、その効果を陽に扱うことは多くの場合避けられてきた。これを、再度見直そうというのである。近年の計算機性能の向上により、複雑な系に対しても厳密な計算が可能になってきたという事情も手伝っている。

パイ中間子とカイラル対称性の問題を扱おうとすると、相対性理論に基づいた量子力学が不可欠になる。これは相対論的量子場の理論の分野であるが、今日、原子核より小さな系を研究しようとする際には必要不可欠の道具である。これを修得するのはそれほどたやすいことではなく、多くの学生そして研究者が相当の時間を費やしてようやく使えるようになっていく。それ相応の努力が必要であるが、一旦それなりの理解に到達すると、驚くほどに自然法則を探求するのに便利な道具であることがわかる。

この教科書は、この相対論的量子場の理論に基づいて、最近の原子核物理学がどのように理解されていくかを紹介したものである。およそ各章が1回分の授業内容になるように構成した。1回の授業で説明できる量は限られてくるので、他の関連授業や自学自習に委ねる部分も多々あるかと思う。しかしこの本を読み通すことによって、上で述べたような雰囲気は伝わるのではないかと思う。各章の終わりには、簡潔なまとめと問題を用意した。まとめには、最低限その章で学ぶべきことのキーワードが書かれてある。

著者には各章の印象を絵にしてみたいという願望が強くあった。何かを理解し議論する

際には、多かれ少なかれそれなりのものをイメージしているはずである。そこでこの本では試みとして、各章にそれぞれの内容をイメージしたイラストを挿入した。著者の共同研究者である門田英子氏に内容の一読をお願いし、実際にイメージしたものを描いてもらった。著者の方からも多少の注文をつけた。門田氏に感謝したい。

2007年3月 土岐 博、保坂 淳

参考書

この本を執筆するにあたって、いくつかの教科書を参考にした。またこの本のスタイルとして、通常の教科書のように基礎からの過程をすべて記述するというようにしなかった。あえて、手短にすましたところが多々ある。以下の参考書はこれらの点を補ってくれる。

1. J.D. Bjorken and S.D. Drell 著

”Relativistic Quantum Mechanics”および”Relativistic Quantum Fields” (McGraw-Hill Book Company, 1965 年および 1965 年)

相対論的量子力学、場の理論の古典的な名著。ディラック方程式がどのように導出され、どのように応用されるかがいろいろな例とともに詳しく説明されている。

2. 杉本健三、村岡光男 著

原子核物理学 (共立出版、1988 年)

多くの実験データをもとに、原子核物理の説明がなされている。

3. A. Hosaka and H. Toki 著

”Quarks, Baryons and Chiral Symmetry” (World Scientific, 2001 年)

カイラル対称性を大学院の学生や分野の若い研究者のために紹介した本である。ハドロン物理で実際にどのようにカイラル対称性が使われているかが記述されている。

4. L.N. Sabushkin and H. Toki 著

”The Atomic Nucleus as a Relativistic System” (Springer, 2004)

原子核を相対論的平均場近似で記述するのに必要な数学を説明した本である。相対論的方法で原子核を記述している研究を紹介してある。

目次

第 1 章	序：強い相互作用する系の面白さ	1
第 2 章	原子核の常識	5
2.1	原子核の質量	5
2.2	原子核の飽和性	7
第 3 章	マジック数とスピン軌道力	11
3.1	マジック数	11
3.2	強いスピン軌道力	15
第 4 章	相対論的量子力学	21
4.1	シュレーディンガー方程式	21
4.2	クライン・ゴールドン方程式	22
4.3	ディラック方程式	23
4.4	ディラック方程式のスピン軌道力	26
4.5	自然単位系と共変的に書かれたディラック方程式	27
4.6	ディラックの方程式から導出されるカレント	29
第 5 章	場の理論における核子と中間子	35
5.1	古典粒子の運動と古典場の理論	35
5.2	場の量子論におけるラグランジアン	38
5.3	実スカラー場の理論の正準量子化	39
5.4	場の理論における相互作用	40
5.5	アイソスピンとフレーバー	41
第 6 章	原子核の相対論的記述	47
6.1	原子核の σ - ω 模型	47
6.2	第二量子化	49

6.3	核物質の性質	51
6.4	中性子星	54
第 7 章	原子核の構造	59
7.1	σ - ω 模型の平均場理論による有限核	59
7.1.1	有限核での計算結果と実験との比較	62
第 8 章	カイラル対称性	65
8.1	パイオンの基本的な性質	65
8.2	カイラリティー	67
8.3	対称性と保存カレント	70
8.4	カイラル変換	73
第 9 章	線形シグマ模型	79
9.1	核子と中間子のラグランジアン	79
9.2	湯川型相互作用	82
第 10 章	南部-Goldstone の定理と質量生成機構	89
10.1	線形シグマ模型のラグランジアン	89
10.2	カレント	93
第 11 章	南部-ヨナラシニオ (Nambu-Jona-Lasinio) 模型	99
11.1	平均場近似と質量生成	100
11.2	南部-Goldstone の定理	103
第 12 章	原子核におけるカイラル対称性	109
12.1	原子核の線形 σ 模型での記述	109
第 13 章	結：原子核と量子色力学	115
13.1	カイラル対称性の申し子であるパイオン	115
13.2	パイオンの原子核における働き	116
13.3	まとめ	116

第1章 序：強い相互作用する系の面白さ

現在ナノテクノロジー・ナノバイオロジーが脚光を浴びている。1ナノは10オングストローム (\AA) であるが、 1\AA は原子の大きさなので、我々は現在原子10~1000個からなる物質のコントロールを目指していると言える。原子としては約100余りの種類が存在している。その原子の中心に位置し全系を支えているのは原子核である。原子核は陽子と中性子で出来ており、その中でも陽子が電荷を持っていることから、原子核中の陽子の数が、原子における電子の数を決定している。原子の中にある原子核はどんな性質を持っているのであろうか。原子核はどのように作られたのであろうか。原子核は我々が自由にコントロールできるのであろうか。興味深い質問である。

原子を反応させるのに必要なエネルギーは1電子ボルト (1 eV^1) 程度であるのに対して、原子核を反応させるのに必要なエネルギーはその10の6乗倍のメガ電子ボルト (MeV) の大きさになる。これらのエネルギーは温度に換算すると、原子の場合には1万 (10^4) 度くらいだが、原子核の場合は100億 (10^{10}) 度くらいで人間の力では到達が不可能である。しかし、太陽は我々地球に住む生物のために核融合反応を使ってエネルギーを作り出し、そのエネルギーを我々に供給してくれている。この原子核の反応に必要なエネルギーは非常に大きいので、いくら原子核を理解しても、原子核を加工することは出来ないであろう。原子核物理は星 (天体物理) と非常に深い関係にあるのはこのエネルギーのスケールが一致しているからである。この事実が原子核や素粒子の研究者をして謙虚に自然に耳を傾ける気持ちにさせてくれる理由になっていると思う。だからこそ、自然が与えてくれる情報に対して、総合的に自然を理解する機会を与えてくれるところが魅力であると思っている。

陽子と中性子の質量はほぼ同じであり、違いがあるのは陽子が電荷を持っていることだけで同種の粒子と考えられている。これらの粒子は原子核を構成しているので総称して核子と呼ぶ。これらの核子が集まって原子核を構成することになるが、それは当然これらの粒子が相互作用していることによる。つまり、核子はお互いに相互作用して、単独でいるより多く集まるほうが安定になれるのである。その原子核を作り出す相互作用を強い相互

¹1電子ボルト = 1 electron volt は、電子1個が1ボルトの電位差にあるときのエネルギーであり、 1 eV と書く。ジュールとは $1\text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{ J}$ の関係にある。

作用と呼ぶ。この教科書では原子核の性質を理解することから始めて、それを説明するのに何がキーポイントになっているかを理解する。次にはそれを記述する方法を説明する。その上で、強い相互作用の本質を理解することに努め、これらをもとにして原子核の真の姿を導く。

創立間もない大阪大学では湯川が原子核を構成するのに必要な相互作用についての考察を重ねていた。電磁力と重力しか知らない時に有限の到達距離を持つ粒子の導入を行った。宇宙線の中に見つかった核子と電子の間の重さを持つ粒子はパイ中間子と呼ばれる湯川粒子であった²。その後の研究からこのパイオンは非常に奇妙な性質を持っていることがわかった。擬スカラー粒子であるパイオンは核子とスピン相互作用する。電磁相互作用の類似では、磁気双極子同士の相互作用に似て、やや複雑な構造をしている。原子核物理において、パイオンが重要な働きをするのには非常に深い意味がある。それは原子核を構成する核子（陽子・中性子）の質量そのものが強い相互作用を通じて生じるものであり、その証拠として非常に強く相互作用するパイオンが存在しているのである。この素粒子物理の重要な課題が原子核物理の本質になっているところが強い相互作用の面白い所である。この核子の質量の問題や小さな質量を持つパイオンの物理はカイラル対称性の物理と呼ばれる。この教科書ではこのカイラル対称性とはどういうものなのか、何故原子核物理で重要な概念なのかの議論を行う。

20世紀の初期に原子の中に原子核が存在することは、阪大初代阪大総長であった長岡の土星模型で明快に予言された。この概念は量子力学の発展に大きな役割を果たした。原子核物理は1949年の殻模型から始まったと言われるがその段階ではパイオンは直接には殻模型には現れていない。21世紀の初期にある現在、パイオンの役割が脚光を浴びている。原子核物理は真の原子核の描像を導き出す面白い段階にあると言える。

²パイ中間子はこの本の中で最も中心的な役割を果たす中間子である。そこで、これ以降研究者の間で最も良く使われる「パイオン＝(pion)」という呼び方を採用することにする。



不思議がいっぱい、原子核

第2章 原子核の常識

原子核は原子の中心にあり陽子と中性子で出来ている。大きさは $(1 - 6) \times 10^{-15}$ m くらいでその大きさを表すのにフェルミ、もしくはフェムトメートル (fm) の単位を使う。1 fm は 10^{-15} m である。原子の大きさが1 オングストローム ($1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ m) なののでいかに小さいかがわかるであろう。

原子核のようなミクロの世界と我々の世界を結びつける数字はアボガドロ数である。アボガドロ数は 6×10^{23} である。水素原子をアボガドロ数集めると 1g になるので、原子一つの重さは 1g をアボガドロ数で割った程度であり、いかに我々の日常から見ればちっぽけなものかがわかるであろう。陽子はそれでも素粒子の中では重い部類に属しておりバリオン (重粒子) と呼ばれる粒子の種族の一つである。

一方原子核の周りを回って原子を構成している電子はもっと軽く、陽子の約 2000 分の 1 の質量でレプトン (軽粒子) の一種である。原子核の一方の構成粒子である中性子は陽子とほぼ同じ質量を持っておりバリオンの一種である。陽子と中性子は原子核を構成する粒子なので総称して核子と呼ばれる。

この章では原子核の基本的な性質を原子核の常識として列挙し、その定性的な説明を与える。原子核を応用に使う研究者は、これらの知識だけは蓄えておいてもらいたい。

2.1 原子核の質量

陽子の数 Z と中性子の数 N で出来ている原子核の質量を $M(Z, N)$ と書く。核子の質量を、陽子については M_p 、中性子については M_n と書くことにする¹。質量に光速 c の 2 乗を掛けるとエネルギーの単位になる。核子は原子核を構成するほうが安定なので、そのエネルギーを束縛エネルギーと呼び、 $B(Z, N)$ と書くことにすると、これらの物理量の関係は次のように書ける。

$$M(Z, N)c^2 = ZM_p c^2 + NM_n c^2 - B(Z, N) \quad (2-1)$$

¹ p は陽子 (= proton)、 n は中性子 (neutron) を表す。

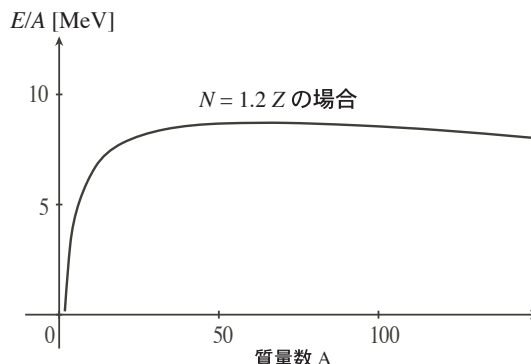


図 2.1: 核子 1 個あたりの束縛エネルギー (B/A) と核子数 (A) との関係。

原子核は複数の陽子と中性子で構成されているが、それぞれの核子数 ($A = Z + N$) の中で一番束縛エネルギーが大きな原子核が存在する。まずは原子核を理解するための常識として束縛エネルギーを質量数で割った量、核子あたりの束縛エネルギー B/A を核子数 A の関数で図にしたものが図 2.1 に示されている。

原子核の常識としてまず覚えてほしいのは、1 核子あたりの束縛エネルギーは約 8 MeV であるということである。核子の質量に c^2 を掛けた数字は 940 MeV であることを考えると質量の約 1% の束縛エネルギーを持っている。次に、 B/A は質量数が小さいところではほぼ単調に増加し $A = 54$ で最大になり、さらに質量数が増えていくと単調に減少していることである。 $A = 54$ の一番安定な原子核は鉄 ^{54}Fe であり、すべての原子核は ^{54}Fe になるのが安定であるということをこの図は示している。何故 A が余り大きくも小さくもないこのような値で最も安定になるのかは次のように考えるとわかる。強い相互作用の観点からはより多くの核子が集まるほうがより強く引力を感じエネルギー的に得をする。一方で、陽子は電荷を持っているので、電磁相互作用の斥力のためにたくさんの核子が集まるとクーロン相互作用による斥力が無視できなくなり、よりエネルギーを損する。この2つの性質が競合して ^{54}Fe がもっとも安定な原子核になる。さらには、この性質により安定な原子核が存在する範囲ができる。最も大きな原子核は質量が約 300 くらいである。

原子核を応用する立場の人はこの性質を知っていることで十分であろう。原子核からエネルギーを取り出すには鉄までの核を融合させて鉄に近づけることによりエネルギーを得ることができる。これを核融合という。核融合を起こさせるにはクーロンの障壁を超える必要がある。このクーロン障壁を乗り越えることは難しく、現在人口的に核融合を実現するには至っていない。しかし例えば星は重力の助けを借りて核融合を起こし、さらにそこから得られたエネルギーを利用する過程を繰り返すことによって、軽い原子核の集合から進化し、鉄の集合に向かい続ける。鉄より重い原子核は逆に分裂してより鉄に近づこうと

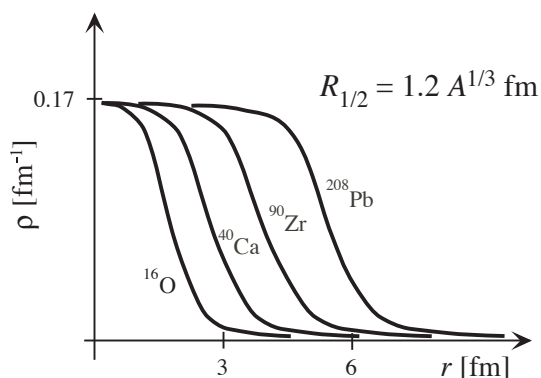


図 2.2: 質量数の異なる原子核における、中心からの距離 r の関数としての核子密度。 $R_{1/2}$ は原点における密度の半分を取る中心からの距離である。

する。これを核分裂という。この場合には中性子を重い原子核に吸収させることによって、核分裂を引き起こすことが可能になる。

2.2 原子核の飽和性

もう一つの原子核の常識は原子核中の核子の分布密度である。分布密度（以下単に密度という）を異なる原子核ごとにプロットすると図 2.2 のようになる。特徴的なことは原子核の中心付近で密度は原子核の種類によらずほぼ一定であることで、その値は $\rho_0 \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$ である。すなわち、一辺が約 1.8 fm の立方体の中に核子が 1 個あるくらいの密度である。したがって、原子核の半径はおよそ $R \sim 1.2A^{1/3} \text{ fm}$ となり、核子数の 1/3 乗で増えていく。この事実は興味深い帰結を得る。すなわち、核子数を無限大にしても、中心部の核子密度は増えることなく一定の値 ρ_0 にとどまることである。この現象を核物質の飽和性と呼ぶ。

クーロン力による反発力を無視すれば、このように強い力のみで束縛する無限に広がった「核物質」を考えることができる。核物質の 1 核子あたりの束縛エネルギーは、密度の関数になっていて、 $\rho_0 \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$ のときに、16 MeV になることが知られている（質量公式 (2-2) の第 1 項）。原子核理論では核子間の相互作用を使ってこの値を再現することが大きな課題である。

要約

1. 原子核の束縛エネルギーは1核子あたり約8 MeVである。1核子あたりの束縛エネルギーが一番大きな原子核は ^{54}Fe である。
2. 原子核の密度分布は原子核の中心部ではほぼ一定で $\rho \sim 0.17\text{fm}^{-3}$ である。

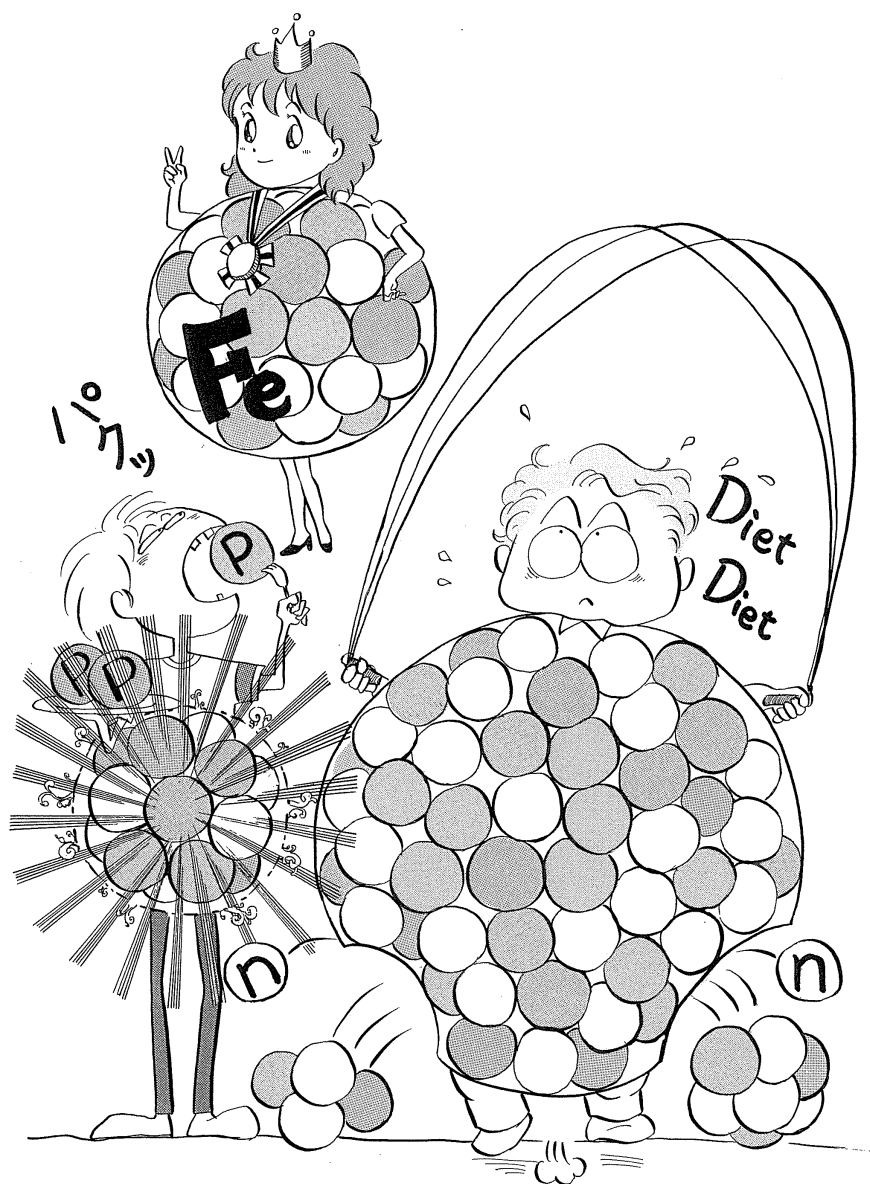
問題

1. 陽子数が Z 、中性子数が N の原子核の束縛エネルギー $B(Z, N)$ は、ベーテ-ワイゼッカーの質量公式によって近似的に

$$B(Z, N) = aA - bA^{2/3} - cZ^2A^{-1/3} - d(Z - N)^2/A \quad (2-2)$$

のように与えられる。ただし $A = Z + N$ である。ここで定数はそれぞれ $a = 15.7$ MeV, $b = 17.8$ MeV, $c = 0.712$ MeV, $d = 23.6$ MeVである。この公式を使って ^{54}Fe ($A = 54, Z = 26$) および ^{208}Pb ($A = 208, Z = 82$) の原子核の束縛エネルギーを求めよ。

2. 電子に比べて陽子や中性子は非常に大きな質量を持っている。水素が1モルで1グラムの重さを持つことから、陽子はどれくらいの質量を持つか概算せよ。さらに水は1モルで約 1cm^3 の体積を持つことから原子の大きさはどれくらいかを答えよ。原子核はその 10^{-5} 倍の大きさである。



目指せ！理想のフロポーション！！

第3章 マジック数とスピン軌道力

キュリー (Marie Cury) のラジウムの発見 (1898 年) 以来、原子核 (原子) から各種の粒子 (アルファ線、ベータ線、ガンマ線) が放出されていることが分かっていた。原子核の質量についてもかなりの情報が得られていた。1934年に湯川 (Hideki Yukawa) の中間子論も提案されてはいた。しかし、原子核をどのように記述するべきかの手がかりはなかった。そのような中、1949年にメイヤー (Meyer) とヤンセン (Jensen) が原子核の殻模型 (shell model) を提案した。現在でほぼ50年の歴史を持つ原子核物理はこの殻模型から始まったと考えられている。そのきっかけとなったのが原子核のマジック数の発見である。

3.1 マジック数

マジック数を理解するために、まず初めに原子の場合を議論する。原子はその中心に陽電荷を持つ重い原子核から生じるクーロン力により、電子が束縛された系である。水素型原子のエネルギー準位は図3.1のようになっていて、量子力学の最も基本的な応用例となっていることにはなじみ深いと思う。一般の原子のエネルギー準位は、多数の電子間の相互作用によって変更を受けやや複雑な構造になるが、その特徴は水素原子の場合と共通点が多い。原子から一つの電子を取り出すのに必要なエネルギー (イオン化エネルギー) を原子数の関数でプロットしたものを図3.2に示す。この図から伺えるのは He から電子を取り出すには大きなエネルギーが必要だが、次の Li から電子を取り出すにはあまり大きなエネルギーを必要としない。このようにイオン化エネルギーが大きくなっている原子は Ne, Ar, Xe, と化学的に非常に安定な希ガスと呼ばれる。即ち、電子の数が 2, 10, 18, 36, ... の所でイオン化エネルギーが大きくなっている。この数を原子のマジック数とよぶ。この現象が何故起こるのかに答えを与えるのが量子力学である。

大きな電荷を中心を持つ原子の中における電子の運動はシュレーディンガー (Schrödinger) 方程式を解くことにより記述される。相互作用は原子核と電子間の電磁気的な相互作用である。上で述べたように、厳密には多数存在する電子の問題を解く必要があるが、ここでは、原子核に一つ一つ電子を加えていきながら原子核と電子の合計の電荷数が Z となった

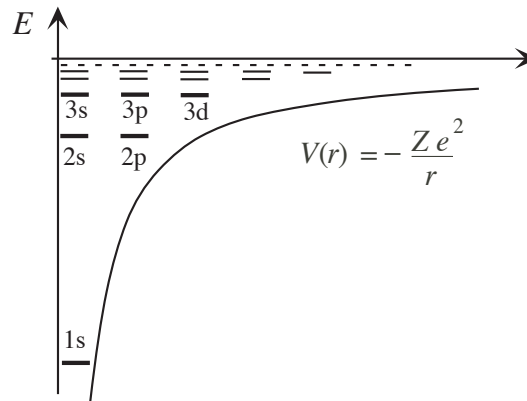


図 3.1: クーロンポテンシャル内で運動する粒子のエネルギー準位。

ところで、新たに付け加えられる電子の運動が以下の簡単な式で表されるとしよう：

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}). \quad (3-1)$$

ここで、 $\psi(\vec{x})$ は電子の定常状態の波動関数、 $r = |\vec{x}|$ である。この方程式を解くとエネルギーは $E = -a/N^2$ (a は定数) と与えられる。このとき主量子数 N は $N = n + l + 1$ で与えられる整数であることが量子力学によって知られている。ここで n はノード (節) 量子数で、負でない整数の値 ($n = 0, 1, 2, \dots$) をとる。 l は軌道核運動量と呼ばれ、やはり $l = 0, 1, 2, \dots$ という負でない整数値を取る。さらに与えられた角運動量数 l に対して、 m でラベルされる量子状態が $2l + 1$ 個存在する ($m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$)。さらにそれぞれの状態にはスピンの上向きと下向きの 2 つの量子状態がある ($s_z = \pm 1/2$)。

先に説明したように、多くの原子の場合エネルギー準位は多数の電子の影響でこのような簡単な形にはならないが、定性的に原子の性質を理解するには役に立つ。エネルギー準位を 1s, 2p などのように、主量子数 ($N = 1, 2, 3, \dots$) と角運動量 ($s(l = 0), p(l = 1), d(l = 2), \dots$) で表すことにする。図 3.1 に従ってそれぞれの状態に下から電子を詰めていくと、最低状態 (1s) に電子 2 個、少しエネルギー間隔をおいて次の状態 (2s, 2p) に 8 個などと順次入っていく。その次の準位に (3s, 3p, 3d) の 3 つが縮退しているとする 18 個が順次入っていくことになるが、実際には (2s, 2p) の対 8 個分と、2d の 10 個分とで縮退が解ける。10 個はスカンジウム Sc から始まる遷移元素になる。このように 1 粒子のエネルギー順位が離散的にはっきりと存在するとマジック数が理解できる。

原子核の場合はどうなっているだろうか。イオン化エネルギーに対応する物理量は陽子や中性子の分離エネルギーである。中性子の分離エネルギーを図 3.3 に示す。原子の場合に比べてそれほどはっきりとはしていないが、核子数が 8, 20, 28, 50, 82 というところ

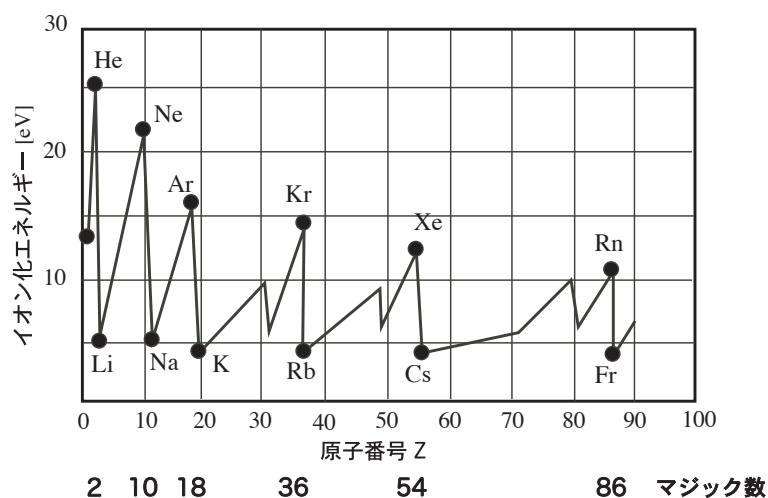


図 3.2: 原子のイオン化エネルギーの概略図

ここで分離エネルギーが極大になっていることが見てとれる。これらの数字を原子核のマジック数とよぶ。

原子核のマジック数がどのように出てくるか考えてみよう。そのために三次元の調和振動子の中で核子が運動していると仮定してみよう。その場合のシュレーディンガー方程式は以下のようにかける：

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{1}{2}kr^2 \right) \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}). \quad (3-2)$$

この固有エネルギーは $E = \hbar\omega(N + 3/2)$ 、 $\omega = \sqrt{k/m}$ である。また $N = 2n + l$ であり、ノード量子数は ($n = 0, 1, 2, \dots$) という整数値をとり、また、軌道角運動量は水素原子の場合と同じく $l = 0, 1, 2, \dots$ という整数を取る。電子の場合と同じようにエネルギー準位をプロットすると図 3.4 のようになる。この場合には図に示すように 2, 8, 20, 40, 70, ... でマジック数が現れる。実験との比較では 20 まで的一致している。しかし、28, 50, 82 は簡単な調和振動子モデルでは説明できない。20 の上に 8 個詰める、40 の上に 10 個埋める、70 の上に 12 個詰めることができるエネルギー状態を作ることが出来れば実験で得られているマジック数を再現することが可能になる。数字の 8, 10, 12 は二つずつ増えていくという規則性がある。

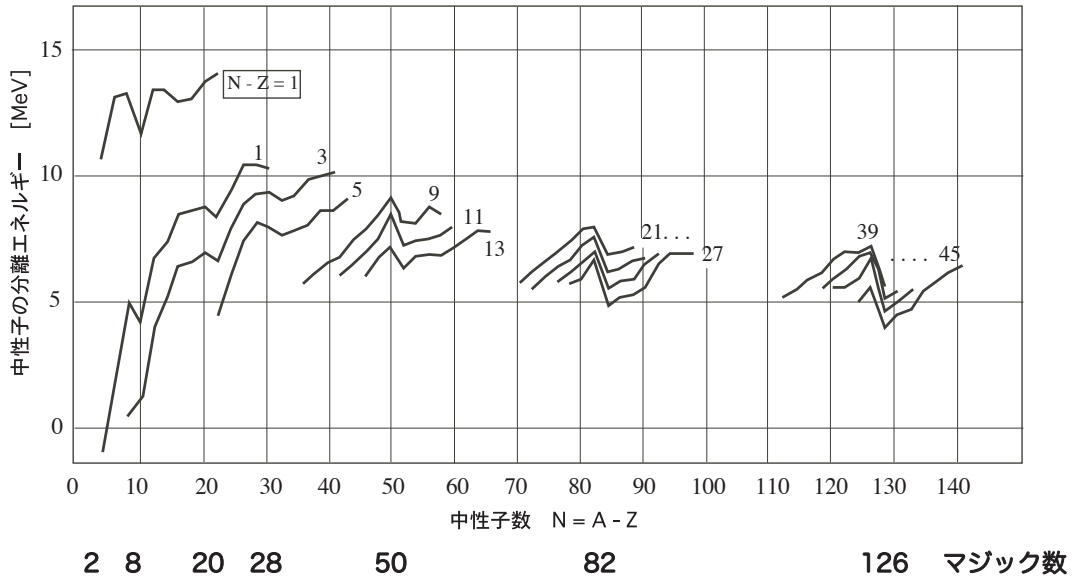


図 3.3: いろいろな原子核の中性子の分離エネルギーを、中性子数の関数として示した。

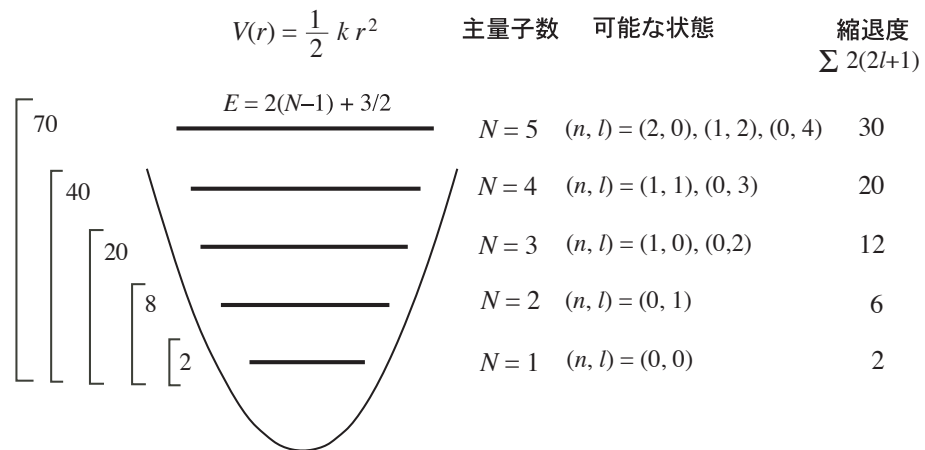


図 3.4: 調和振動子ポテンシャル内で運動する粒子のエネルギー準位

3.2 強いスピン軌道力

この二つずつ増える数字はどのようにすれば出てくるのであろうか。核子はフェルミオンでスピンを持っている。そのスピン(自転)と軌道回転運動(公転)が相互作用すれば、スピン軌道力が出てくる。その相互作用ポテンシャルは次のように書ける：

$$V_{ls} = b\vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (3-3)$$

ここで、 b は場所に依存したポテンシャル関数である。スピンを \vec{s} とし軌道角運動量を \vec{l} とすると、 \vec{s} と \vec{l} を足した物理量を全角運動量と呼び、 $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ と書くと、この \vec{j} は $\vec{l} \cdot \vec{s}$ と交換することがわかる(問題1)。したがって、 $\vec{l} \cdot \vec{s}$ の相互作用のもとで j は良い量子数、すなわち運動の保存量であることがわかる。そこで $\vec{l} \cdot \vec{s}$ の期待値を書くと

$$\langle (ls)jm | \vec{l} \cdot \vec{s} | (ls)jm \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) \right). \quad (3-4)$$

この式で $l = 3$, $j = 7/2$ の場合にはその軌道の中に $2j + 1 = 8$ 個の量子状態に1つずつ、合計8個の核子を入れることが可能になる。したがって、このスピン軌道力があり、高いほうの j の状態のエネルギーを下げるように相互作用の強さを選ぶと20+8で28のマジック数を得ることが可能になる。

この考えを推し進めると $l = 4$ で $j = 9/2$ を採用すると10という数字を作ることが出来、 $40 + 10 = 50$ のマジック数を作ることができる。このように考えると次のようなハミルトニアンを採用すると原子核のマジック数を再現できるモデルを作ることが可能であろう：

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} k r^2 + b\vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (3-5)$$

この期待値は次のように書くことができる：

$$\langle (ls)jm | H | (ls)jm \rangle = a \left((N-1) + \frac{3}{2} \right) + \frac{b}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) \right). \quad (3-6)$$

この式の中に適当な数字を導入すると図3.5にあるようなエネルギー準位を得、その結果実験から期待されるようなマジック数を得ることができる。この図を示すにあたって、現実のポテンシャルは調和振動子のものとは異なることを考慮した。これらの準位は必ずしも実際の計算で用いられる値を正確に反映してはいないが、定性的な様子を見るのには役に立つ。特に、もともと縮退した調和振動子のエネルギー準位のうち、一番高い角運動量 j を持った状態が大きく下がることによって、エネルギー間隔が広がりマジック数28, 50, 82を説明することに注意して欲しい。

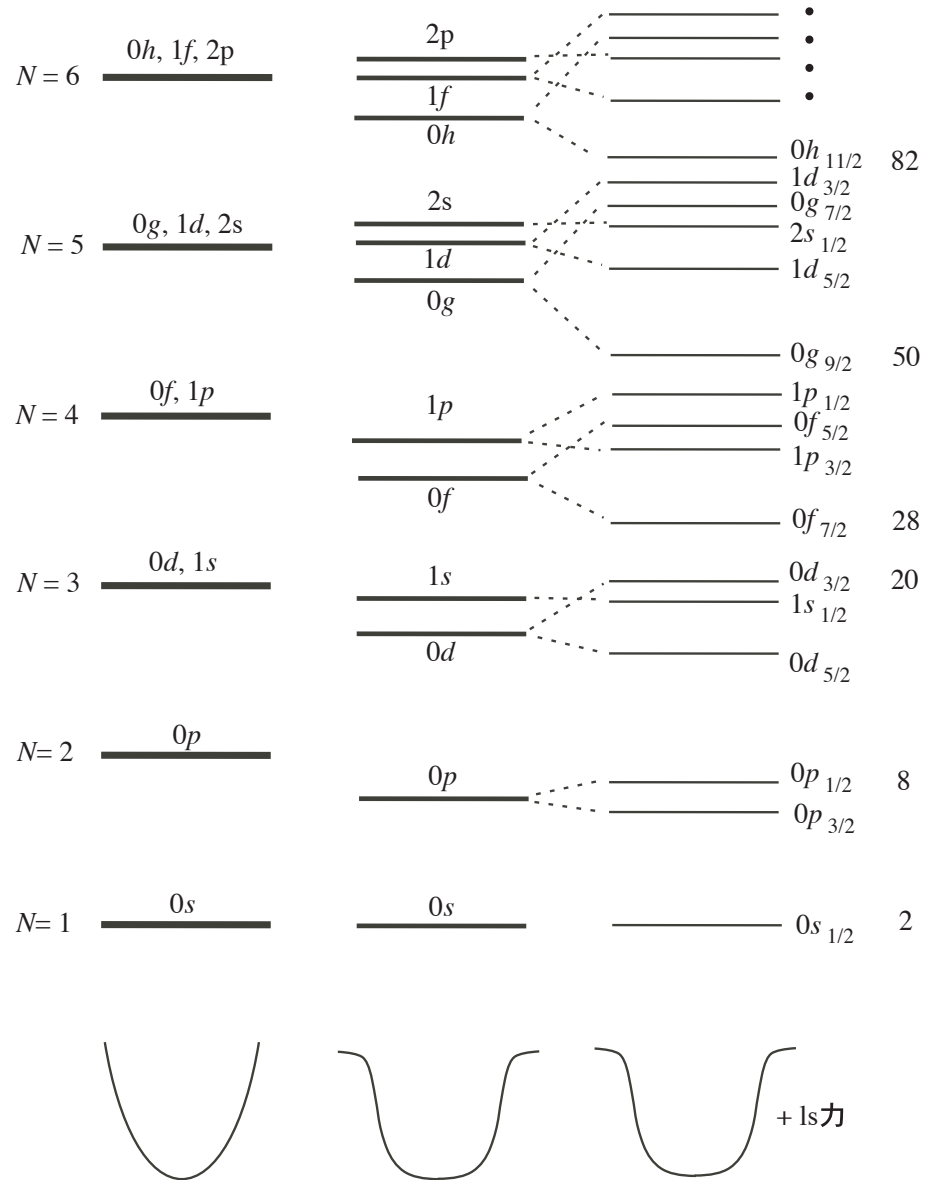


図 3.5: 左：調和振動子ポテンシャルのエネルギー準位、中央：現実に近いポテンシャル中のエネルギー準位、右：スピン軌道力を加えた場合の単一粒子のエネルギー準位。右の数字は、準位間隔が広がることで現れるマジック数を示している。

原子核物理では、当初現象論的に導入されたスピン軌道力の起原を解明することが大きな目標になる。最初の試みは、相対論的な理論を用いてなされた。この後の章でみるように、最も自然にスピン軌道力を導入することができる。1990年代に詳しい研究が展開され、一定の理解が得られたと考えられた。ところが、そこでは、核子の有効質量が現象とあわないことが知られていた。しばらくして、最近新たな発展が全く異なる観点からなされた。それが、パイオンの物理と関係しているのである。パイオンは、強い相互作用を支配する法則 QCD が現在の我々の世界にもたらす、最も重要な要素である。カイラル対称性の自発的な破れという、自然の多様性を作り出す原理とも密接に関係している。ようやくこれまで現象論的に頼るところが多かった原子核物理に、QCD という基本原理との接点を見いだすことができそうな状況になってきた。その一端を紹介するのが、この本の重要な目標である。

要約

1. 原子核では質量の異常な変化が特別な個数で起こる。それをマジック数と呼ぶ。マジック数は 2, 8, 20, 28, 50, 82 である。
2. 理論的には三次元の調和振動子のポテンシャルを用いるとマジック数は 2, 8, 20, 40, 70 である。
3. この違いは強いスピン軌道力を導入することで説明された。

問題

1. 全角運動量 \vec{j} は軌道角運動量 \vec{l} とスピン角運動量 \vec{s} の和で定義される。このとき、 \vec{j} は $\vec{l} \cdot \vec{s}$ と交換することを証明せよ。
2. $\vec{l} \cdot \vec{s}$ スピン軌道力の演算子である。その行列要素が (3-4) のように書けることを示せ。
3. 3次元の調和振動子に関して以下の問いに答えよ。
 - (a) シュレーディンガー方程式を書け。

- (b) x, y, z の3方向について変数分離をすることによって、エネルギーが $E = (n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$ と書けることを示せ。
- (c) $N = n_x + n_y + n_z$ とおいたときに、 $N = 0, 1, 2, 3$ の状態のパリティと縮退度を求めよ。
- (d) 同じ問題を角運動量を用いて解くことができる。このとき状態は、角運動量子数 l, m と節の量子数 n とで分類できる。 $N = 0, 1, 2, 3$ の場合にどのような角運動量と節の状態が許されるかを求め、その方法で求められる縮退度が前問で得られた縮退度と一致することを確認せよ。

4. (a) 中心からの距離 r のみに依存する等方的（球対称）なポテンシャルを $V(r)$ と書くと、ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) = -\hbar^2 \frac{\nabla^2}{2m} + V(r)$$

と書くことができる。極座標で変数分離した後に角度方向の波動関数を球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ で表し、角運動量 l をもつ動径方向の波動関数が満たすシュレーディンガー方程式を導け。

- (b) 動径方向の波動関数が原点付近で r^l の様にふるまうことを示せ。また、これは何を意味しているか考えよ。



自転しながら公転するもの

第4章 相対論的量子力学

原子核のマジック数を説明するためには強いスピン軌道力を導入することが必要であった。そこでどのように考えればスピン軌道力を無理なく理論に導入できるかを議論したい。そのために核子の従うべき相対論的量子力学の方程式であるディラック (Dirac) の方程式を導出する。

4.1 シュレーディンガー方程式

古典的には相互作用が $V(r)$ で与えられている場合のハミルトニアン (Hamiltonian) は

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \quad (4-1)$$

と与えられる。シュレーディンガー方程式は次の量子化の手続きで得ることができる。

1. まず (4-1) において、

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (4-2)$$

の置き換えをする。

2. 次に (4-1) は、

時間 t と場所 \vec{x} に依存する波動関数 $\psi(t, \vec{x})$ に作用して成り立つ式とする：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = H\psi(t, \vec{x}). \quad (4-3)$$

3. その関数の絶対値の2乗が確立分布であると解釈する。

以上の規則を古典方程式 (4-1) に応用すると次のシュレーディンガー方程式を得ることができる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right] \psi(t, \vec{x}). \quad (4-4)$$

その性質を知るために次の連続の方程式を導く：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (4-5)$$

ここで電荷密度 ρ と電流密度 \vec{j} は ψ を使って次のように書かれる：

$$\rho = \psi^*\psi, \quad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*). \quad (4-6)$$

この方程式は連続の方程式と呼ばれ、解釈としては密度の時間的変化は粒子の移動によって引き起こされるということを表している。

4.2 クライン・ゴールドン方程式

シュレーディンガー方程式は非相対論的な速さで運動する粒子に対して成り立つ量子力学の運動方程式である。これの相対論版はどのようなものか考えたい。まず相対論におけるエネルギーと運動量の関係を書くと

$$E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4. \quad (4-7)$$

古典論にならってハミルトニアンを書こうとすると

$$H = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + m^2c^4} \quad (4-8)$$

のように平方根の形で表現する必要があり、どのように平方根の中の微分を扱えばよいかという問題が生じる。また符号の不定性も残る。そこで2乗の形のままで量子化の手続きを試みる。シュレーディンガー方程式では $H\psi$ を時間の1次微分 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ としたので、 H^2 の場合にはその2乗をとることによって次の方程式を得る：

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(t, \vec{x}) = (-\hbar^2c^2\vec{\nabla}^2 + m^2c^4)\psi(t, \vec{x}). \quad (4-9)$$

この方程式をクライン・ゴールドン方程式と呼ぶ。この方程式の意味をつかむために、再度連続の方程式を確認してみる。ただし、密度と電流は(4-6)のものと異なり次のようになる：

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \\ \vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*). \end{aligned} \quad (4-10)$$

この式を導く最も直接的な方法は、後でみるようなクライン・ゴールドンのラグランジアン(5-16)に対してネーター (Noether) の定理(9章を参照)を適用することである。シュレー

ディンガー方程式では、(4-6) から、その密度 ρ は必ず正の値をとることが保証されていたが、今の場合には関数の微分がはいついて必ずしも正の値をとることは保障されない。これは量子力学の方程式としては即座には受け入れることができない。歴史的には、この式が導出された当時は受け入れられなかったが、その後多体系を取り扱うための第2量子化の手続きとともに解釈が可能となり、クライン・ゴルドン (Klein-Gordan) 方程式と呼ばれ、中間子の方程式として使われるようになった。

4.3 ディラック方程式

必ずしも正の確率を得ることができない原因を手繰ると、微分方程式の中に時間の2次の微分がはいついていたからであることが予想できる。そこでディラックは相対論的な量子力学の方程式として時間の1次微分を含むものを考え、そのためにハミルトニアンを運動量の1次の関数として表すことから出発した。

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2. \quad (4-11)$$

ここで $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, β は運動量に依存しない”数”である。この式は $\vec{p} \rightarrow 0$ のとき、粒子の静止質量に帰着することがわかる。これに量子化の手続きを応用すると次の方程式を得る。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right) \psi(t, \vec{x}). \quad (4-12)$$

この式で左辺は時間の1次微分なので確率は正であることが保障される。その代わりに未知の量 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と β が導入されている。ディラックはこの $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ と β を決めるために、古典的なエネルギーと運動量の関係が出ることを条件とおいた。すなわち、時間の2乗の方程式を得るために (4-12) の両辺に再度左辺に $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 、右辺に H を乗じた。その結果次の式を得る。

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi(t, \vec{x}) = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right)^2 \psi(t, \vec{x}). \quad (4-13)$$

この式がクライン・ゴルドン方程式になることを条件にした。したがって、 α と β の満たすべき方程式は次のようになる。

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad (4-14)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0, \quad (4-15)$$

$$\beta^2 = 1. \quad (4-16)$$

この段階で α_i と β は普通の数ではないことがすぐに理解できる。しかもこれらがゼロではない意味のある”数”である為には、これらは行列である必要がある。そこで、どのような行列になるべきかで、さらに条件を求めたい。まずハミルトニアンはエルミート (Hermite) であるという条件から α_i, β はエルミート行列である。さらに交換関係からこれらの行列のトレースはゼロであることが証明できる。即ち

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \text{tr } \alpha_i = 0, \quad \alpha_i^2 = 1, \quad (4-17)$$

$$\beta^\dagger = \beta, \quad \text{tr } \beta = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (4-18)$$

この条件から行列の次元 N は偶数であることがわかる。 $N = 2$ は上記の条件を満たすことが出来ない。従って、 $N = 4$ になることが必要である。この場合には α と β として多くの可能性が考えられる。従って、物理 (自然) の要請から、それらの具体的な行列を採用することになる。そこでディラックが採用した行列は次のようになる。

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4-19)$$

ここで σ_i はパウリ行列で次のように定義されている：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4-20)$$

また、(4-19) の β の成分中 1 と書かれてあるのは 2×2 の単位行列である。

これでディラックの方程式 (4-12) が完成したことになる。(4-12) の右辺で α_i と β が 4×4 の行列であるということは、波動関数 ψ は 4 成分の縦ベクトルになっていることが必要である。すなわち、波動関数は一つの粒子を表現するものであるにもかかわらず、4 つの成分を持った波動関数になってしまった。一つの粒子の運動は一つの波動関数で表現できるべきだが、ディラックの方程式は一つの粒子につき 4 つの自由度があることを要請している。核子はスピン 1/2 を持っているので、2 つの成分はスピンの異なる状態に対応させることを思いつくが、4 つというのはそのままでは理解できない。そこで、波動関数を

$$\psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} F(t, \vec{x}) \\ G(t, \vec{x}) \end{pmatrix} \quad (4-21)$$

のように上成分と下成分で表現し、ディラック方程式を二つの結合した微分方程式の形に書く：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} F(t, \vec{x}) \\ G(t, \vec{x}) \end{pmatrix}$$

$$= \left(-i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mc^2 \right) \begin{pmatrix} F(t, \vec{x}) \\ G(t, \vec{x}) \end{pmatrix}. \quad (4-22)$$

この式は時間と空間座標について変数分離形をしているのでまず、時間の部分をその固有値を使ってあらわす。すなわち、

$$F(t, \vec{x}) \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) F(\vec{x}), \quad G(t, \vec{x}) \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et\right) G(\vec{x}) \quad (4-23)$$

として (4-22) を次の連立方程式の形に表す：

$$\begin{aligned} EF(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x}) + mc^2 F(\vec{x}), \\ EG(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) - mc^2 G(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4-24)$$

ここで E は粒子のエネルギーである。そこで下成分を消去して上成分に代入すると次の方程式を得る：

$$EF(\vec{x}) = \left(\frac{-\hbar^2 c^2}{E + mc^2} \vec{\nabla}^2 + mc^2 \right) F(\vec{x}). \quad (4-25)$$

E を求めるために、一定の運動量をもった平面波の解 $F(\vec{x}) = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar)$ 等を代入すると

$$E = \frac{c^2 \vec{p}^2}{E + mc^2} + mc^2, \text{ or } E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (4-26)$$

興味深いことに、この式からもエネルギーとして正の状態と負の状態が可能であることがわかる。すなわち、

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (4-27)$$

したがって、1個の核子を記述するためには、その座標空間における運動状態が同じでも、正のエネルギー状態として2つのスピン状態と、負のエネルギー状態として2つのスピン状態が存在することを意味している。この負のエネルギー状態の持つ物理的な意味は、ディラック方程式が考案され80年経った今日でもしばしば議論・研究の対象になるが、当初ディラックは負のエネルギー準位が核子で完全に詰っている状態を我々の真空であると定義した。したがって、この負のエネルギー状態に穴が開くとそこに一つの正エネルギー状態があることを意味している。この状態をディラックは反粒子の状態だと解釈した。したがって、全ての粒子は反粒子を持つという予言を行った。

4.4 ディラック方程式のスピン軌道力

スピン軌道力の議論のために中心力を導入する。クーロン力の際には次のようにディラック方程式が書ける。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(t, \vec{x}). \quad (4-28)$$

このクーロン力の部分を $V(r)$ と書いて式の変形を行いたい。(4-22)で行ったのと同様に、変数分離をして

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp(-iEt/\hbar) \begin{pmatrix} F(\vec{x}) \\ G(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

と書いて $F(\vec{x})$ と $G(\vec{x})$ に対する連立微分方程式を書くと

$$\begin{aligned} EF(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x}) + mc^2 F(\vec{x}) + V(r)F(\vec{x}), \\ EG(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) - mc^2 G(\vec{x}) + V(r)G(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4-29)$$

したがって、下成分の波動関数 G は上成分の波動関数 F を使って次のように書ける。

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{E + mc^2 - V(r)} (-i\hbar c) \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}). \quad (4-30)$$

この G を上の微分方程式に代入すると G が消去されて、次の F だけの2回の微分方程式を得る。

$$-\hbar^2 c^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) + (mc^2 + V(r))F(\vec{x}) = EF(\vec{x}). \quad (4-31)$$

非常に興味深い方程式になるがこの後の処理のためには次の関係式を使う：

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B}, \quad (4-32)$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{r} \frac{d}{dr} f(r). \quad (4-33)$$

ただし、 $\hat{r} = \vec{x}/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で \vec{A} と \vec{B} は適当なベクトル量である。これらの関係式を代入すると次の式を得る。

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\hbar^2 c^2}{E + mc^2 - V(r)} \nabla^2 - \hbar^2 c^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \right) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{x} \times \vec{\nabla}) \right. \\ \left. + mc^2 + V(r) \right] F(\vec{x}) = EF(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4-34)$$

さらに

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}, \\ \vec{l} &= \vec{x} \times \vec{p} = -i\hbar\vec{x} \times \vec{\nabla}\end{aligned}\quad (4-35)$$

を導入すると次のような微分方程式を得る：

$$\begin{aligned}- \left[\frac{\hbar^2 c^2}{E + mc^2 - V(r)} \nabla^2 - c^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \right) (\hbar^2 \vec{r} \cdot \vec{\nabla} - 2\vec{l} \cdot \vec{s}) \right. \\ \left. + mc^2 + V(r) \right] F(\vec{x}) = EF(\vec{x}).\end{aligned}\quad (4-36)$$

この式から次のようなことが言える。第1項は $E - V \sim mc^2$ とするとシュレーディンガー方程式の運動エネルギーの項になる。第2項目はディラックの方程式から出てくるまったく新しい項であり、ダーウィン (Darwin) 項と呼ばれる。 $\vec{l} \cdot \vec{s}$ を含む第3項はスピンと軌道角運動量が相互作用しているのでスピン軌道力と呼ばれる：

$$U_{so} = 2c^2 \frac{1}{r} \frac{V'(r)}{(E + mc^2 - V(r))^2} \vec{l} \cdot \vec{s}.\quad (4-37)$$

したがって、ディラックの方程式ではスピン軌道力が自動的に現れる。

このスピン軌道力が現象論的には非常に大きな量になるというのがメイヤーとヤンセンが発見したことであるが、逆の意味ではスピン軌道力が大きいことから原子核でも相対論の効果をきっちりと取り扱う必要があることを意味している。原子核物理は殻模型の導入以来、多くの現象を理解するために非相対論で理論的に議論されてきたが、最近では相対論効果の重要性が指摘されている。

4.5 自然単位系と共変的に書かれたディラック方程式

物理学では単位は非常に重要である。通常は方程式を書くときには常に単位が右辺と左辺で等しいかどうかをチェックしながら方程式を書いていく。しかし、常に同じような定数を方程式の中に書き込んで計算するのも面倒な仕事である。特にディラック方程式では規約されたプランクの定数 $\hbar = h/(2\pi)$ と光の速度 c が随所に出てきて方程式が煩雑になっている。そこで熟練した物理学者 (特に理論研究者) は非常に大胆な単位系を導入する。それは量子力学の定数である \hbar を 1 にし、相対論の定数である c を 1 にする単位系を導入する。こうすることにより煩雑な方程式をすっきり表現することができる。

速度の単位を 1 と書くということは長さの単位と時間の単位を同等にするということである。さらに \hbar を 1 と書くということはエネルギーと時間の逆数の単位が同等であるということである。自然単位系で数値を計算する際に、以下の数値を書いておく。

$$\begin{aligned} c &= 2.998 \times 10^8 \text{m/s} = [\text{L}]/[\text{T}], \\ \hbar &= 6.582 \times 10^{-22} \text{MeV} \cdot \text{s} = [\text{E}][\text{T}], \\ \hbar c &= 197.3 \text{MeV} \cdot \text{fm} = [\text{E}][\text{L}]. \end{aligned} \quad (4-38)$$

特に最後の関係式を使うことにより必要な数値を得ることが可能である。たとえば陽子の質量を表現するのに $m = 5 \text{fm}^{-1}$ のように書かれることがある。これを我々の言葉で表現するには

$$\hbar c = 1 \quad (4-39)$$

なので、 $1 \text{fm}^{-1} = 197 \text{MeV}$ となる。これでも質量がエネルギーの単位になっているので気持ち悪いと思う人はさらにはこの量に c^2 をかけると、本当にグラムの単位で表現できる。自然単位系は最初のうちは分かりにくいだが、慣れればこんなに便利なものは無い。

たとえばディラックの方程式を自然単位系で書くと

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi(t, \vec{x}) \quad (4-40)$$

となり、 \hbar と c が方程式に書かれていない分、式の本質が見えやすい。理論研究者はこの方をずっと好むが、実験研究者と話をするときにはすべての計算が終わった後で \hbar と c を含む形に表現しておくが良い。

次は、相対論の要請を考慮したい。そのために 4 元の長さ と 4 元の運動量を導入する。そのためにアインシュタインのエネルギーと運動量の関係を自然単位系で書く。

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (4-41)$$

この式で p^2 を左辺に持っていくと

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (4-42)$$

となるので。質量はローレンツ変換のもとでスカラー量であるため、 $E^2 - p^2$ もスカラー量となる。 E と p は相対論的には同等の物理量となり、4 元の運動量を次のように導入するのが自然である：

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}). \quad (4-43)$$

ここで μ を上付きの添字で書くのは下付きの 4 元の運動量もあり、空間成分が負の符号を持つ。

$$p_\mu = (p^0, -p^1, -p^2, -p^3) = (E, -\vec{p}). \quad (4-44)$$

このように書くと上付きの運動量と下付きの運動量を掛けて μ で足し算すればスカラー量になる。

$$p^2 \equiv \sum_{\mu} p^\mu p_\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^2, . \quad (4-45)$$

多くの場合、上下対の添字が現れると和をとることになるので、今後は足し算の記号を書かないで内積を表すことにする： $p^2 = p^\mu p_\mu$ 。

同様に時間と位置座標も 4 元の座標という形で導入する： $x^\mu = (t, \vec{x})$ 。その上で運動量の量子化の際に現れる 4 元の微分を次のように書く：

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (4-46)$$

さらに 4 元の γ 行列を次のように定義する。

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = (\beta, \beta\vec{\alpha}). \quad (4-47)$$

これらを使うとディラックの方程式は次のように非常に見やすい形に書かれる。この形を共変形のディラック方程式とよぶ。

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0. \quad (4-48)$$

このとき、下付の 4 元ベクトルは上付きの 4 元ベクトルとミンコフスキー計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて次の関係で与えられる。

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4-49)$$

4.6 ディラックの方程式から導出されるカレント

共変的な形に書かれたディラック方程式から連続の方程式を導く。通常の方法に従って連続の方程式を導くと次のような簡単な形に書ける。

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4-50)$$

ここでベクトルカレント (電流) は

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (4-51)$$

とかける。ここで γ^μ は 4×4 の行列であるが、 $\bar{\psi}$ と ψ ではさむことで1成分の数となる。ただしそれらはローレンツの足 ($\mu = 1, \dots, 4$) をもち、四元ベクトルを構成する。一般に $\bar{\psi}$ と ψ から構成される量を双スピノル (bispinor) と呼び、上のベクトルカレントを $j^\mu \equiv j_V^\mu$ を含めて、以下の16個の量を考えることが多い:

$$\begin{aligned} j_S &= \bar{\psi}\psi, \\ j_V^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \\ j_T^{\mu\nu} &= \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \\ j_{PV} &= \bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi, \\ j_P &= \bar{\psi}\gamma_5\psi. \end{aligned} \quad (4-52)$$

これらはそれぞれ、スカラー、ベクトル、テンソル、軸性ベクトル、擬スカラーと呼ばれる。

要約

1. シュレディンガー方程式を導出し、電流の保存を導いた
2. 時間の1次の微分方程式を使うことによりディラック方程式を導いた。
3. 量子力学と相対論を使う時の便利な単位系として自然単位系を導入した。
4. ディラック方程式のカレント (電流) を導いた。全部で5種類の電流がある。

問題

1. ディラック方程式に関する以下の問題に答えよ。
 - (a) 量子化の手続きを使ってシュレディンガー方程式を導出せよ。

- (b) ディラックの方程式を使って電流の保存則を導出せよ。
- (c) ディラックの方程式は波動関数が成分 ψ_i を持っているために、次のような連立の1階の偏微分方程式になっている。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_i = \sum_j M_{ij} \psi_j, \quad (4-53)$$

$$M_{ij} = (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2)_{ij}. \quad (4-54)$$

この式に

$$\psi_i = f(t) \phi_i(\vec{x}) \quad (4-55)$$

を代入し、両辺を $f(t) \phi_i(\vec{x})$ で割ると、時間の微分方程式を空間の微分方程式と分けることができる。このことにより、次のような空間だけの微分方程式を得ることを証明せよ。

$$\sum_j M_{ij} \phi_j(\vec{x}) = E \phi_i(\vec{x}). \quad (4-56)$$

- (4) 式 (4-32) と (4-33) の関係式を証明せよ。

2. 相対論ではエネルギーと運動量の関係は

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4-57)$$

によって与えられる。以下の問いに答えよ。

- (a) 量子化の手続き $E \rightarrow i\hbar \partial / \partial t$, $\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$ を行うことにより、クライン・ゴルドンの方程式 (以下 KG 方程式と書く)

$$\left(-\partial^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0, \quad \partial^2 = -\vec{\nabla}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4-58)$$

を求めよ。

- (b) $\psi = N_0 \exp \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)$ は平面波の波動関数である。これが KG 方程式の解である為の \vec{p} と E の関係を求めよ。
- (c) KG 方程式から連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (4-59)$$

を求めよ。その時

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \\ \vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right)\end{aligned}\tag{4-60}$$

となることを確かめよ。

3. 相対論的量子力学の方程式として作られた KG 方程式は、1) 負エネルギー解をもつ、2) 確率密度 ρ が正定値にならない、という困難を持つ。ディラックはこの困難を避ける為に時間・空間微分について1階の微分方程式を考えた。

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= H\psi, \\ H &= c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2.\end{aligned}\tag{4-61}$$

- (a) 量子化の手続きで微分方程式の形に表せ。
(b) ディラック方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{imc}{\hbar} \beta \psi = 0\tag{4-62}$$

の左側から

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \frac{imc}{\hbar} \beta\tag{4-63}$$

を作用させた式が KG 方程式と同一である為には

$$\begin{aligned}\alpha_i^2 &= \beta^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 0 \quad (j \neq k) \\ \alpha_j \beta + \beta \alpha_j &= 0\end{aligned}\tag{4-64}$$

である必要がある。この事を示せ。

- (c) $\vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha}$, $\gamma^0 = \beta$ として導入した $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ は

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{4-65}$$

を満たすことを示せ。

- (d) γ 行列の積の一次独立な数は 16 個である。そのことから γ 行列は 4×4 の正方行列であると言える。 γ 行列が

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (4-66)$$

で、それぞれは 2×2 の行列で

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする時 α^i 及び $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ を書け。



一皮むけば見えてくるものもある

第5章 場の理論における核子と中間子

原子核のような多粒子系を扱うには場の理論を使うことが便利である。さらには、場の理論を使うことにより、核子の従うディラック方程式から帰結される負のエネルギー状態をどのように取り扱うか、又クライン・ゴルドン方程式に現れる負のエネルギー状態をどのように扱うかも理解できる。この章では最初に古典粒子の場合を扱い、次に場の量子論で扱う運動方程式を与えるラグランジアンを導入する。

5.1 古典粒子の運動と古典場の理論

この節では場の理論を導入する。そのためには、お互いに連結された多くの（最終的に連続無限個の）粒子系を考えるのが便利である。粒子はお互いに相互作用を及ぼし合いながら、平衡点の周りで振動運動をするものとする。このときある点の粒子の振動が隣の粒子に次々に伝わっていく現象が波動に他ならない。そしてこの波動を量子化することが場の量子論の問題である。

そこで、まず1粒子の振動運動を記述するラグランジアンを導入しよう。簡単のために、振動は1方向のみとしてその変位を表す変数を1個、 $\phi(t)$ という記号で表すことにする。これは時刻 t の関数である。この粒子のラグランジアンは次のように書ける：

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}k\phi^2. \quad (5-1)$$

このラグランジアンを時間で0から t まで積分した量を作用 (action) とよび

$$S = \int_0^t L dt \quad (5-2)$$

その変分 $\delta S = 0$ を最小にする条件によってニュートン (Newton) の方程式を得る。これは最小作用の原理 (またはハミルトン (Hamilton) の原理) とよばれ、解析力学の基本的な概念になっている。すなわち

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad (5-3)$$

を使うと

$$m\ddot{\phi} = -k\phi \quad (5-4)$$

の良く知られた、調和振動のニュートンの方程式を得る。

次にひもに等間隔 a で配置された多数の粒子の運動に着目しよう。ひもは張力 T で張られ各粒子はこの張力を受けるものとする (図 5.1 を参照)。また、ひもは伸びに対してフックの法則に従う復元力を与えるものとする。このとき、 i と $i+1$ 番目に着目して、その間のひもの長さを l とすると $l^2 = a^2 + (\phi_{i+1} - \phi_i)^2$ なので、この伸びによって余分に蓄えられたエネルギーは $(k/2)(\phi_{i+1} - \phi_i)^2$ と表すことができる。ここで $k = T/a$ は変位 ϕ に対する復元力の比例定数である。従って、系のラグランジアンとしては

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\phi}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} k (\phi_i - \phi_{i+1})^2. \quad (5-5)$$

この式で ϕ_i についての作用の変分を取ると

$$m\ddot{\phi}_i = -k[(\phi_i - \phi_{i+1}) + (\phi_i - \phi_{i-1})] \quad (5-6)$$

となる。これは、各粒子に対する運動方程式である。

さて、ラグランジアン (5-5) を次のように書き直す：

$$L = \sum_i a \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\phi}_i^2 - \sum_i a \frac{1}{2} k a \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{a} \right)^2. \quad (5-7)$$

ここで粒子の間隔を短くしながら粒子の数を増やす操作を行う。このとき、密度 $m/a \equiv \rho$ が一定になるように増やしていき、最終的に $a \rightarrow 0$ の連続極限をとる。そして粒子を識別するラベルとして場所の変数 x を用いる。和を積分に変えることによって、最終的に次のラグランジアンを得る：

$$L = \int dx \left(\frac{\rho}{2} \dot{\phi}(t, x)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (5-8)$$

ここで $T = ka$ を使った。その上で作用の変分を取ると連続的に並んだ粒子の運動方程式を得る：

$$\rho \ddot{\phi}(t, x) = -T \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2}. \quad (5-9)$$

この方程式はひもを自由に伝わる波動の方程式に他ならず、場の理論の最も簡単な例になっている。

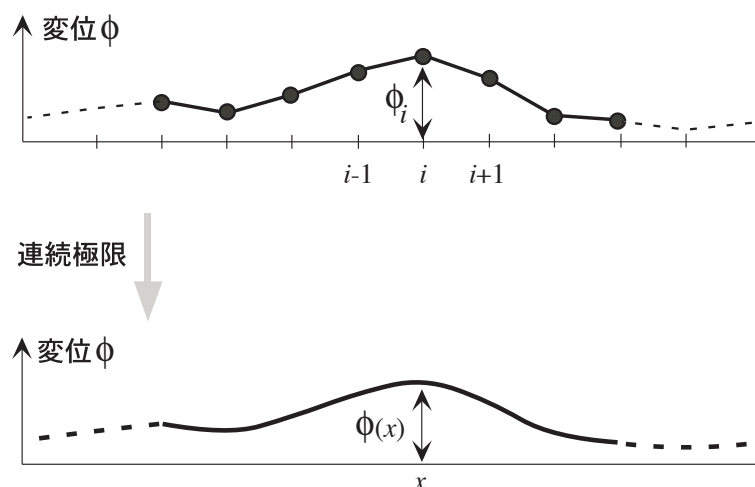


図 5.1: ひもにつけられた粒子の運動とその連続極限

一般にひものように連続的に広がった系のラグランジアンは次のように表現される：

$$L(t) = \int_0^L dx \mathcal{L} \left(\phi(t, x), \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right). \quad (5-10)$$

\mathcal{L} の x -積分をしてラグランジアン $L(t)$ が得られるので、 \mathcal{L} はラグランジアン密度と呼ばれる。

この1次元のひもの運動を任意の次元に一般化することができる。例えば太鼓の表面を伝わる振動を扱うには、2次元の座標が必要になる。我々の空間は3次元なので、その空間を伝わる振動の場合には3次元の座標が必要がある。したがって、3次元空間を考えるならそこでラグランジアン密度を使って、ラグランジアンは次のように書ける：

$$L(t) = \int_0^x d^3x \mathcal{L} \left(\phi(t, \vec{x}), \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial t}, \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial x}, \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial y}, \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial z} \right). \quad (5-11)$$

ラグランジアンを時間で積分して作用は次のように書ける：

$$S = \int dt L(t) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (5-12)$$

ここで、4つの時間・空間微分 $\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial\vec{x}$ をまとめて $\partial_\mu\phi$ と書いた。この作用の変分 ($\delta S = 0$) をとると場の変数 $\phi(t, x)$ に対する次のオイラー・ラグランジュ (Euler-Lagrange) 方程式を得ることができる：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (5-13)$$

5.2 場の量子論におけるラグランジアン

前節で古典力学の波動方程式がラグランジアンを与えることにより得ることができることを見た。波動方程式の特徴は、変位が時間と場所の関数であるということである。一方で量子力学の方程式も空間の各点での波動関数を与える方程式になっている。古典力学の場合と同様に、量子力学の場合でもラグランジアンを使って運動方程式を導出することが可能である。

例えばディラック方程式を与えるラグランジアン密度は次のように書ける：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (5-14)$$

ただし、これからは自然単位系を使って方程式などを書いていく。実際にこのラグランジアンにオイラー・ラグランジュ方程式を適用することでディラック方程式が得られる（問題1）：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (5-15)$$

後の議論で登場するのでさらにクライン・ゴールドン方程式を与えるスカラー粒子のラグランジアンを与えておくと次のようになる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (5-16)$$

このラグランジアンから次のクライン・ゴールドン方程式が得られる：

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (5-17)$$

さらに電磁場の方程式はマックスウェル（Maxwell）方程式だが、その方程式を与えるラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5-18)$$

と書くことができる。このラグランジアンから得られるのはマックスウェルの方程式である：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5-19)$$

ここに現れる $F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソルと呼ばれており、電磁場の4元ベクトルポテンシャル A^m_u を用いて次のように書ける：

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (5-20)$$

このゲージ場から作られる反対称テンソルと電場・磁場の関係は次のように与えられる：

$$F^{0i} = -E_i, \quad (5-21)$$

$$F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k. \quad (5-22)$$

このゲージ理論を扱うにはゲージ固定を行う必要があるが、この本の主題ではないので別の教科書に細部を譲る。

5.3 実スカラー場の理論の正準量子化

この節では場の量子化を解説する。場の方程式の導入では、系を多数の振動子の集合として扱ったので、それぞれの振動子を量子化すれば良いことが想像できる。実際そのようにすることが可能であり以下そのことを見ていく。一方で、波動といたら1点のみの振動をみることはなく、代わりに全体が一定の周波数で振動する固有モードを扱うのが便利である。これは一定の速さ、一定の周波数で伝わる振動であり、特定の場所のみが振動するモードをフーリエ変換したモードになっている。量子論では、これは一定の運動量をもった状態である。

これらの事柄を具体的にみるために、まず、最も簡単なクラインゴールドン場の場合を考えることにする。ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 \quad (5-23)$$

と書ける。場 $\phi(x)$ をパラメータ \vec{x} を含んだ一般座標（正準座標）と考える。それに正準共役な運動量は次のように得ることができる：

$$\pi(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(t, \vec{x})}. \quad (5-24)$$

従って、正準運動量は次のようになる：

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x). \quad (5-25)$$

量子力学の手続きは、まず初めにこの正準座標 $\phi(x)$ と正準運動量 $\pi(x)$ の間に同時刻の正準交換関係を設定することである：

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (5-26)$$

この正準座標と正準運動量のままで量子力学の方程式を扱うのは難しく、通常はこれらの座標を平面波解で展開する：

$$\phi(x) = \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{E_k}} [a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}]. \quad (5-27)$$

ここで $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$, $kx = k^\mu x_\mu = E_k t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ である。この方程式では ϕ はエルミートであり $\phi^\dagger = \phi$ を満足している。さらに正準運動量は $\pi = \dot{\phi}$ なので、

$$\pi(x) = \int d^3k \frac{-ik^0}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} [a(\vec{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}] \quad (5-28)$$

となり、この場合も $\pi^\dagger = \pi$ である。

従って、演算子の $a(\vec{k})$ と $a^\dagger(\vec{k})$ は ϕ と π で表現できる：

$$a(\vec{k}) = \int d^3x \frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2k^0}} [k^0 \phi(0, \vec{x}) + i\pi(0, \vec{x})], \quad (5-29)$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int d^3x \frac{e^{+i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2k^0}} [k^0 \phi(0, \vec{x}) - i\pi(0, \vec{x})]. \quad (5-30)$$

交換関係を使って

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (5-31)$$

従って、 $a(\vec{k})$ と $a^\dagger(\vec{k})$ は運動量 k でエネルギーが $E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ を持つ粒子の消滅と生成演算子と解釈する。このようにして粒子描像を導いたことになる。真空は

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad (5-32)$$

で定義する。

5.4 場の理論における相互作用

この段階でディラック粒子と電磁場の相互作用を導入する。現在の物理学において最も重要な概念はゲージ原理である。この原理の基本的な考え方の出発点は、粒子の運動は量子力学で記述され、物理量は波動関数の絶対値の2乗で与えられるということである。したがって、波動関数に位相をかけても物理量は変化しない：

$$|\psi|^2 = |e^{i\theta} \psi|^2. \quad (5-33)$$

しかもその位相変換を場所ごとに独立に行うことが可能である。この場所に依存したゲージ変換をディラックのラグランジアンに対して行う。結果は次のようになる：

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^\mu \partial_\mu \theta - m)\psi. \quad (5-34)$$

したがって、このラグランジアンはゲージ変換で変化する。すなわちゲージ不変性が成り立たない。そこで、次のように変化するゲージ場を導入する：

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \frac{1}{e} \partial^\mu \theta. \quad (5-35)$$

このゲージ場を使ってディラックのラグランジアンを書くと次のようになる：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi. \quad (5-36)$$

このゲージ場はベクトル粒子であり、電磁場のラグランジアンを付け加えることにより、電磁場を与えるゲージ場という解釈を与えることが可能になる。この全体のラグランジアンはゲージ理論の典型的なものである：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (5-37)$$

このなかで、 $-e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ はディラック粒子と相互作用を媒介するボソンとの結合を示すラグランジアンが、どのように書かれるべきかを示す具体例となっている。すなわちディラック粒子のベクトル（電）流 $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ と光のベクトル場 A^μ とが内積の形で結合し、全体としてスカラー量を作っている。このような例の2つ目は、スカラー流 $\bar{\psi}\psi$ とスカラー粒子 σ が結合することによりできる。これらの他に3つ、従って合計5つの相互作用の形を考えることができる。これらのまとめると表 5.1 のような相互作用を得ることができる。

5.5 アイソスピンとフレーバー

原子核の理論を作るにはアイソスピンという概念を理解する必要がある。原子核は陽子と中性子で出来ている。これらの粒子は電荷だけが違っており、質量はほとんど変わらない。核力を媒介するパイオンも3種類の電荷 (+, -, 0) の違う粒子があるが、それらの質量も近似的にほぼ同じと見なせる。質量が同じということから、それらの粒子を同一粒子の別の状態として扱うことができる。同一粒子に異なるスピン状態があるのと同様に、同一粒子に異なる荷電状態があるとする。このときスピンの類似で、異なる荷電状態を区別するためにアイソスピンという概念を導入する。そしてスピンは系に回転対称性がある

ことの帰結であるのと同様に、アイソスピンは系に（内部）荷電対称性があることの帰結であると考えられる。以下では、荷電対称性のことをアイソスピン対称性とよぶ。陽子と中性子はアイソスピンの大きさを $1/2$ として、その z 成分を $+1/2, -1/2$ として区別することができる。同様にパイオン (π^+, π^0, π^-) はアイソスピンの大きさを 1 として、その z 成分を $+1, 0, -1$ として区別することができる。

アイソスピン対称性は、数学的にはスピンの同様の代数で表現することが出来る。スピンの代数は $SU(2)$ のリー代数と言われて、スピン演算子（群論の言葉では生成元）の間に成り立つ次の交換関係で特徴づけられる：

$$[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (5-38)$$

スピン演算子 s_i は一般に行列で表現することができるが、最も次元の低い簡単なものは 2×2 の場合で、それらはパウリのスピン行列に他ならず、その行列はスピン $1/2$ の状態（2成分スピノル）に作用する。

スピン演算子の固有状態は、全てのスピン成分と可換であるカシミア（Casimir）演算子である \vec{s}^2 と s_z の固有値で分類できる ($j = 1/2, m = \pm 1/2$)：

$$\vec{s}^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle = \frac{3}{4}|jm\rangle \quad (5-39)$$

$$s_z|jm\rangle = m|jm\rangle. \quad (5-40)$$

スピンの大きさが $1/2$ のとき、その z -成分が $1/2$ の状態が上向きスピン状態で、 $-1/2$ の状態が下向きスピン状態を表す。

核子のアイソスピンもスピンと同じように扱うことができる。アイソスピンの演算子は $SU(2)$ のリー代数で次の交換関係を満足する：

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk}t_k. \quad (5-41)$$

アイソスピン $1/2$ （陽子と中性子）に対して、 \vec{t} はアイソスピン空間に演算するパウリ行列と $\vec{t} = \vec{\tau}/2$ で関係づけられる。核子の場合、その固有値としてアイソスピンの大きさが $1/2$ 、その成分が $+1/2$ と $-1/2$ の状態を陽子と中性子に対応させる。パイオンの場合にはアイソスピン演算子の固有値が 1 でその3つの成分が π^+, π^- および π^0 に対応する。

アイソスピンという概念は原子核や素粒子の世界でしか登場しない。そこには強い相互作用をする基本的な粒子として、6種のクォークが存在することが知られている。アイソスピンという概念は、この6種類を分類するフレーバーという内部自由度の一部であると考えられている。

このアイソスピンという自由度まで導入すると、原子核物理で必要な全ての数学的な道具がそろったことになる。パイオンはアイソスピンの1の粒子であるが、他にアイソスピンの0の中間子も存在する。一般的に中間子は、スピンとアイソスピンによって区別することができる。同様に、核子から作られる各種の電流にもアイソスピンが0もしくは1、スピンの0もしくは1のものを構成することができる。スピンの0もしくは1のスカラー流もしくはベクトル流を構成するには、すでに見たように、1もしくは γ^μ を $\bar{\psi}$ と ψ ではさんでやればよい。同様に、アイソスカラー流やアイソベクトル流を構成するには、アイソスピン演算子（パウリ行列）を $\bar{\psi}$ と ψ ではさんでやればよい。これら全ての中間子とその性質、さらにそれらが核子と相互作用する形（相互作用ラグランジアン）を表5.1に示す。これらをもとに、核力を構成することができる。その方法は6章で詳しく見ることにする。

表 5.1: 核力に寄与する重要な中間子の性質と相互作用の形。

中間子	スピン	アイソスピン	質量	相互作用の形
σ	0^+	0	500 MeV	$\bar{\psi}\psi\sigma$
ω	1^-	0	780 MeV	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\omega_\mu$
δ	0^+	1	980 MeV	$\bar{\psi}\tau^a\psi\delta^a$
ρ	1^-	1	770 MeV	$\bar{\psi}\tau^a\gamma^\mu\psi\rho_\mu^a$
π	0^-	1	139 MeV	$\bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi\pi^a$

要約

1. 古典場の方程式として、1次元の弦、ディラック場、電磁場の方程式を導入した。
2. 場の量子化を行った。
3. 核子（フェルミオン）と中間子（ボソン）の相互作用の形を導入した。核子のカレントの形とその構成法をみた。
4. アイソスピンの概念を導入し、スピンと同じ代数に従うことをみた。

問題

1. ラグランジアンから運動方程式を導きたい。

- (a) ラグランジアン密度が次の様に与えられている：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (5-42)$$

このとき、ラグランジアンと作用はどのように書けるか。また作用の変分が0となることを使ってオイラー・ラグランジュの方程式を導け：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (5-43)$$

- (b) ディラック粒子のラグランジアン密度は次の様に与えられる：

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x). \quad (5-44)$$

ただし $\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^0$ 。このとき、 $\bar{\psi}(x)$ もしくは $\psi(x)$ で変分しそれぞれの場合に同じディラック方程式が導かれることを確かめよ。

- (c) スカラー粒子のラグランジアン密度は次の様に与えられる：

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m_S^2 \phi^2. \quad (5-45)$$

ϕ で変分をとってクライン・ゴールドン方程式を導け

- (d) ベクトル中間子や光子は次のマックスウェル方程式に従う：

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \quad (5-46)$$

ただし $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ はベクトルポテンシャルである。 A_μ で変分を行い運動方程式を導け。これは、相対論的に共変な形で書かれたマックスウェル方程式である。 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を電場 \vec{E} と磁場 \vec{H} で表し、4つのマックスウェル方程式を導け。

2. 平均場近似をするとボソン場は古典場として簡単に扱えるが、フェルミオン場は量子効果を正確に取り込む必要がある。その取り扱いには正規積展開 (Normal Product Expansion) と呼ぶ方法で行う。フェルミオン場を

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) = & \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(A_{\vec{k}, \lambda} U(\vec{k}, \lambda) \exp(-i\epsilon^{(+)}t + i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right. \\ & \left. + B_{\vec{k}, \lambda} V(\vec{k}, \lambda)^\dagger \exp(-i\epsilon^{(-)}t - i\vec{k} \cdot \vec{x}) \right) \end{aligned} \quad (5-47)$$

として、以下の問いに答えよ。ここで ψ はフェルミオン場、 U, V は正または負のエネルギーに対応するディラック方程式の平面波解（スピノル）、 A, B^\dagger は展開係数であり、これらが第2量子化の主演となる。

- (a) ψ は力学における正準座標とみなせ、それに共役な運動量 π_ψ はラグランジアンを使って次の様に得ることができる：

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}. \quad (5-48)$$

ラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - mg_\sigma \sigma - g_\omega \gamma^\mu \omega_\mu) \psi \quad (5-49)$$

で与えられるとき π_ψ を求めよ。

- (b) 量子化は次の交換関係を課することによって行うことができる：

$$\{\psi(t, \vec{x}), \pi_\psi(t, \vec{y})\} = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (5-50)$$

ただし $\{\cdot, \cdot\}$ は反交換関係である： $\{A, B\} = AB + BA$ 。この時

$$\begin{aligned} \{A_{\vec{k}, \lambda}, A_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ \{B_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} &= \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ \{A, A\} &= \{A^\dagger, A^\dagger\} = \{B, B\} = \{B^\dagger, B^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (5-51)$$

を証明せよ。

- (c) 演算子 A, B が決まったので、状態を導入する必要がある。真空 (vacuum) を次の様に定義する：

$$\begin{aligned} A_{\vec{k}, \lambda} |\text{vac}\rangle &= 0, \\ B_{\vec{k}, \lambda} |\text{vac}\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (5-52)$$

このようにすると $|\text{vac}\rangle$ は粒子も反粒子も無い状態である。その時核物質の基底状態は、ある運動量 k_F (Fermi 運動量) までエネルギーの低い状態から粒子が入っているとす。その状態を演算子 $A_{\vec{k}, \lambda}$ を使って表現せよ。

- (d) $|\text{vac}\rangle$ が分かったので、一粒子状態、二粒子状態を作れ。さらに、二粒子状態では同じ量子状態に二つの粒子が入った状態が作れないことを示せ。



電磁場の荒波乗り越えて

第6章 原子核の相対論的記述

第5章までで原子核物理を記述するのに必要な全ての概念を導入した。この章では原子核を実際に記述することを試みる。特に原子核を相対論的な量子力学が支配する系として記述する。このようにする強い動機は原子核の構造を記述するのに強いスピン軌道力を必要とすることである。また、たくさんの粒子を扱うことも必要となるからである。

6.1 原子核の σ - ω 模型

原子核を相対論的に記述するために必要最小限の中間子を含む原子核物理のラグランジアン密度を導入する：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - g_\sigma\sigma - g_\omega\gamma^\mu\omega_\mu)\psi \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu. \end{aligned} \quad (6-1)$$

このラグランジアン密度で核子 ψ はフェルミオンでディラックの方程式に従う粒子、シグマ中間子 σ は実スカラー粒子でクラインゴールドン方程式に従う粒子、オメガ中間子 ω_μ は質量を持ったベクトル粒子でマックスウェルの方程式に従う粒子である。これらの粒子がお互いに相互作用しているが、その際にそれぞれの中間子の性質と核子で作られるカレントとが一致している。そして全体としてローレンツスカラーの形のラグランジアンになっている（表 5.1 を参照）。

この模型ではシグマ中間子とオメガ中間子が核子と相互作用する形になっているので σ - ω 模型と呼ばれる。最終的に原子核の質量や半径などを忠実に記述するためにはさらにこのラグランジアンに新しい項を付け加える必要があるが、この σ と ω の入ったラグランジアンで原子核物理のほとんどの概念を理解することが可能である。この式で、オメガ中間子の2つめの項（質量項）の符号がシグマ中間子の項のそれと逆になっていることに注意してほしい。問題1で見ると、 σ の粒子数が一つ増えるとエネルギーがその分だけ増える。一方で ω の場合には4つの成分のうち実の粒子として意味があるのは空間成分で、確かにその場合に粒子数がひとつ増えるごとにエネルギーが増えるようになっている。

問題を量子力学的に扱うには、ラグランジアン密度の中に現れる場を量子力学的演算子とみなす必要がある。その自由度は座標 \mathbf{x} でラベルされるように連続無限個あり、それらすべてを量子化する必要がある。このような系の量子化を定式化したのが場の量子論である。原子核の場合、非相対論的な枠組みでは原子核の核子数 A 個の有限多体系の問題として取り扱うことができる。一方相対論的に記述しようとする、真空を占有する負エネルギー状態を扱う必要性から、無限個の自由度を扱うことになる。従って一般的に問題の扱いが非常に難しくなる。

このような多体系の場の理論を簡便に取り扱う方法として、平均場の方法がしばしば用いられる。特に基底状態を求める際には有効である。この方法を σ - ω 模型の場合に見てみる。対象は A 個の核子からなる原子核である。まずボソン場に対して、量子力学的な揺らぎを平均化した「平均場」を用いる。すなわち、次の置き換えをする：

$$\begin{aligned}\langle\sigma\rangle &= \sigma, \\ \langle\omega^\mu\rangle &= \delta^{\mu,0}\omega.\end{aligned}\tag{6-2}$$

この式でブラとケットは原子核の基底状態における期待値を表し、原子核中ということで、スカラーとオメガ中間子の4元ベクトルの時間成分が有限の値をとり得る。その空間成分は、空間の対称性から有限な値をとることはない。量子論では、場の演算子に有限の期待値を与える状態はコヒーレント状態といわれて複雑な形になる。簡単な場合を10章で簡単に議論するが、この章では、場の演算子を期待値である定数に置き換えるということだけで十分である。

期待値 σ と ω が従うオイラー・ラグランジュの運動方程式は

$$\begin{aligned}(-\nabla^2 + m_\sigma^2)\sigma &= -g_\sigma\langle\bar{\psi}\psi\rangle, \\ (-\nabla^2 + m_\omega^2)\omega &= g_\omega\langle\bar{\psi}\gamma^0\psi\rangle\end{aligned}\tag{6-3}$$

で与えられる。これらの方程式で ψ を含む項が現れるが、それについても基底状態の期待値を取る。そこでこれらの期待値をどのように計算したらよいか問題になる。そのためにもまず ψ が満足する運動方程式を考える：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - g_\sigma\sigma - g_\omega\gamma^0\omega)\psi = 0.\tag{6-4}$$

この式は、 $\bar{\psi}$ で変分をとったオイラー・ラグランジュ方程式として得られる。これらの方程式において σ と ω は (6-2) 式の平均場であるとする。この方程式を満足する演算子 ψ を求め、それによって構成される量 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 等を原子核に対して計算するために、場の量子化(第二量子化)の方法を次の節で説明する。

6.2 第二量子化

核子のようなフェルミオンを扱う場合の第二量子化の手続きの話をする。通常量子力学では座標 x を時間の関数として量子化し、その x を変数とする波動関数を導入する。この際、粒子数は常に 1 個と決まっていますその数が変化することはない。ところが原子核や素粒子の問題では、多粒子の関わる現象や粒子の生成消滅を伴う現象が日常茶飯事に起こる。これらの扱いを可能にするのが第二量子化の方法である。

この方法の本質は、場の量子化である。量子力学では 1 粒子の運動を量子化するのに対して、場の量子化では無限個ある場の自由度を量子化する。その際粒子数の変化という概念が自然に導入されることになる。歴史的には電子の波動関数（場）を再度量子化し多電子の問題を扱うことになったので、第 2 量子化とよばれる。

場の量子化の方法をディラックのフェルミオン場の場合にみってみる。まずディラック方程式の解（エネルギー固有状態）を ψ_i とする。これは次の方程式を満足する：

$$(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta(m + U) + V)\psi_i(x) = E_i\psi_i(x). \quad (6-5)$$

ここで ψ_i は完全性と直交性を満足する。この完全性を張っている ψ_i を用いて、場の演算子である ψ を展開する。この際に正のエネルギーを持っている状態を $\psi_i^{(+)}$ 、また負のエネルギーを持っている状態を $\psi_i^{(-)}$ と書くことにする：

$$\psi(x) = \sum_i \left[A_i \psi_i^{(+)}(x) + B_i^\dagger \psi_i^{(-)}(x) \right]. \quad (6-6)$$

ψ に共役な場を π とかく。それは次の式により ψ で表現することができる：

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger. \quad (6-7)$$

従って、

$$\pi(x) = i \sum_i \left[A_i^\dagger \psi_i^{(+)}(x)^\dagger + B_i \psi_i^{(-)}(x)^\dagger \right]. \quad (6-8)$$

この π と ψ は共役な量なので量子化の条件を課することが可能である。通常は交換関係を使うが、フェルミオンということで反交換関係を導入する：

$$\{\psi(x), \pi(y)\}_{\text{equal time}} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (6-9)$$

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{\text{equal time}} = 0, \quad (6-10)$$

$$\{\pi(x), \pi(y)\}_{\text{equal time}} = 0. \quad (6-11)$$

これらは同時刻 (equal time) における交換関係である。すなわち、 $x^\mu = (t_x, \vec{x})$, $y^\mu = (t_y, \vec{y})$ において $t_x = t_y$ のときに成り立つものとしている。この反交換関係を使うと、展開係数の間に次の反交換関係を得ることができる：

$$\{A_i, A_j^\dagger\} = \delta_{i,j}, \quad (6-12)$$

$$\{A_i^\dagger, A_j^\dagger\} = \{A_i, A_j\} = 0. \quad (6-13)$$

これと同様の関係が B に対しても成り立つ。この反交換関係で与えることができる演算子は粒子の生成や消滅の意味を持つ。そこでこれらの演算子が演算する状態を次のように定義する。まずは真空状態を

$$\left. \begin{aligned} A_i|0\rangle &= 0 \\ B_i|0\rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for all } i \quad (6-14)$$

と定義する。真空に粒子消滅の演算を行おうとしてもそこには粒子も反粒子も存在しないので「粒子を消す」という演算ができない。このように演算が不可能な場合には右辺を 0 と書く。一方、真空に粒子を 1 個加えることは可能で 1 粒子状態を作る：

$$A_i^\dagger|0\rangle = |i\rangle. \quad (6-15)$$

2 粒子状態を作るにはもう一度粒子を生成する演算子を演算する：

$$A_j^\dagger|i\rangle = |j, i\rangle. \quad (6-16)$$

ここで先ほどの量子化の手続きが重要な意味を持つ。すなわち 2 粒子の量子数が等しいとき ($i = j$) にはゼロとなる。2 粒子が同じ量子状態に入れないというパウリ効果をこのようにして表現することができる。これはフェルミオン場の量子化を反交換関係で定義したことによる。当然この生成の演算を逐次に行っていくとどんな粒子の多体状態も作ることが可能である。

原子核の基底状態は次のように作る。核子は一番エネルギーの低い準位から下から順に入って行って、与えられた粒子数を満たす準位まで入る。その一番上の状態のエネルギーをフェルミエネルギーといい E_F で表す。したがって、原子核の基底状態はフェルミレベルまで核子が詰った状態といえる (図 6.1)。その状態を $|\Psi_0\rangle$ とかく：

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{i=1}^A A_i^\dagger|0\rangle. \quad (6-17)$$

$|\Psi_0\rangle$ は生成演算子と消滅演算子を作用させたときに次の性質を満足する：

$$A_i|\Psi_0\rangle = 0 \text{ for } E_i > E_F, \quad (6-18)$$

$$A_i^\dagger|\Psi_0\rangle = 0 \text{ for } E_i < E_F. \quad (6-19)$$

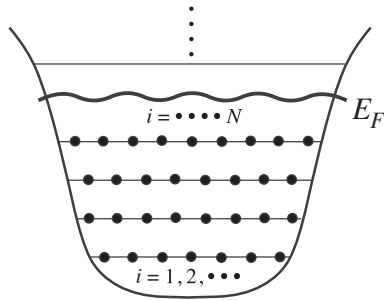


図 6.1: N 個の核子が下の軌道から順に占有して原子核状態を作る様子。一番上の準位をフェルミ準位といい、そのエネルギーを E_F で表す。

これですべて必要な道具がそろったことになる。次の章では実際に原子核の束縛エネルギーを計算してみよう。

6.3 核物質の性質

平均場近似の範囲で原子核の性質を計算する。まず最初に核物質の性質を、 σ - ω 模型で計算する。核物質は無限に大きな系であり、その特徴は σ と ω の平均場は場所によらない一定の値をとるということである。無限系のエネルギー密度を計算するためにラグランジアン密度から次の関係式に従って、ハミルトニアンを計算する：

$$\mathcal{H} = \sum \pi \dot{\psi} - \mathcal{L}. \quad (6-20)$$

この関係式によって得られるハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \psi^\dagger (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m + \beta g_\sigma \sigma + \beta g_\omega \gamma^\mu \omega_\mu) \psi + \frac{1}{2} \partial_0 \sigma \partial^0 \sigma + \frac{1}{2} \vec{\nabla} \sigma \vec{\nabla} \sigma \\ & + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2} (\partial^0 \omega^i - \partial^i \omega^0)^2 + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^0 \omega^0 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_i \omega^i. \end{aligned} \quad (6-21)$$

である。このハミルトニアンに平面波で展開した ψ を代入する。これにより生成・消滅演算子でハミルトニアンが表現される。この段階で興味深いことがわかる。即ち、負のエネルギー状態の全てのエネルギーを足し合わせることを要請している。これはディラック方程式を核子の従うべき方程式と仮定したことによる必然的な結果である。全ての状態のエネルギーを足し上げるので無限大の値になる。この負のエネルギーの足し合わせは真空のときでも同じように起こる。全てのエネルギーを真空のエネルギーを基準として表現することにする。この事情は密度に関しても同じである。この定式化は可能であり物理量の規格化をきっちりと行う必要がある。しかしこの本では話を単純にするためにこのエネルギーの差を無視することにする。このような取り扱いを、負のエネルギー状態を考慮しな

い相対論的平均場近似と呼ぶ。これまでの原子核の状態の計算にはこの近似がよく使われてきた。

正のエネルギー状態だけを扱う近似と平均場近似のもとで、核物質のハミルトニアン密度を核子と反核子の生成演算子と消滅演算子を使って書くと次のようになる：

$$\mathcal{H} = \sum_i E_i (A_i^\dagger A_i - B_i^\dagger B_i) + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2. \quad (6-22)$$

ここで σ と ω を求める方程式は次のように書ける：

$$\sigma = -\frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (6-23)$$

$$\omega = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle. \quad (6-24)$$

そこで σ と ω を計算する為には上式右辺にあらわれる密度 $\langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle$ 等を計算する必要がある。それらは次のように書ける：

$$\rho = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = 4 \sum_i 1 = 4 \int_0^{k_F} \frac{1}{(2\pi)^3} d^3 k, \quad (6-25)$$

$$\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle = 4 \sum_i \frac{m^*}{E_i} = 4 \int_0^{k_F} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{E} d^3 k. \quad (6-26)$$

ここで有効質量とフェルミ運動量は $m^* = m + g_\sigma \sigma$, $k_F = \sqrt{E_F^2 - m^{*2}}$ で定義した。さらに無限系の場合には運動量が良い量子数になるので、足し算を連続の極限として積分に置き換えてある。この密度とフェルミ運動量の関係を書くと

$$\rho = 4 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3. \quad (6-27)$$

従って、 $\rho = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ のときにはフェルミ運動量は $k_F = 280 \text{ MeV}$ となる。

この際に無限系を議論するために空間に長さが L の立方体を考え、質量 m の粒子がそこに詰まっていると考える。箱の中では運動量が良い量子数となり、次のように飛び飛びの値をとる：

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x. \quad (6-28)$$

さらにはそのエネルギー（固有値）は次の値をとる：

$$E(k) = E_{n_x, n_y, n_z} = \sqrt{m^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (6-29)$$

従って、運動量としてフェルミ運動量 k_F の準位まで粒子が詰まっている状態の足し上げは、 L が無限に大きいとして積分に置き換えることが可能である：

$$\sum_i = L^3 \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \quad (6-30)$$

さらに無限系では単位体積あたりで表現することが適当であるので、上の置き換えで L^3 で割るとエネルギー密度や核子密度を得ることができる。上記の密度の計算ではこの手法を使ってある。従って、無限系の場合の足し合わせは次の置き換え $\sum_i \rightarrow \int_0^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ を行う。これで全ての準備が整ったので最後のエネルギー密度 E の表現を行う：

$$E = E_N + \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega^2, \quad (6-31)$$

$$E_N = 4 \int \frac{E(k)}{(2\pi)^3} d^3k. \quad (6-32)$$

この表現を使って無限系である核物質のエネルギーを計算することができる。この結果を適当なパラメータ値を採用して計算すると次の図9のようになる。この際にラグランジアンの中のパラメータとして密度が 0.17 fm^{-3} でそのときの束縛エネルギーが 16 MeV になるように決めてある。この際のパラメータの値は $g_\sigma = 10.5$ ($m_\sigma = 520 \text{ MeV}$) と $g_\omega = 13.8$ ($m_\omega = 783 \text{ MeV}$) である。図から見て取れるのは密度が低いところは相互作用が効かないことから核子の運動から生じ、密度の $2/3$ 乗で最初は増加する。その後、密度が増加し核子間の距離が相互作用の領域に入った段階でエネルギーが負になり、さらに飽和密度のところからより大きな密度になれば核子あたりのエネルギーは増加し正の値に転じる。この増加するメカニズムは下で見るように相対論的な起源を持っている。従って、密度が 0.17 fm^{-3} の所で一番核子あたりのエネルギーが小さくなる。

この結果は原子核を理解する上で次の重要な意味を持っている。密度が原子核の中心部の大きさとなるところで核子あたりのエネルギーが一番低くなる。その値は 16 MeV である。質量数 A が無限に大きな原子核はこの飽和密度をとるということになる。実際の原子核は表面を持っているので密度は必然的に減少する必要がある。従って、原子核の質量は体積項と表面項があることになる。

次に相対論の効果を見るために核物質中での核子の振る舞いを考察してみたい。そのために、 $g_\sigma\sigma = U = (\text{一定})$ 、および $g_\omega\omega = V = (\text{一定})$ と書く。従って、 ψ を与えるディラック方程式は次のようになる：

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - U - \gamma^0V)\psi = 0. \quad (6-33)$$

この方程式は簡単に解くことが可能である。その解は平面波であり、その固有値は次のようになる：

$$E_{sp} = \pm \sqrt{(m^*)^2 + \vec{k}^2} + V. \quad (6-34)$$

ここで $m^* = m + U$ である。この単一粒子のエネルギーを別の形に変形しておく：

$$E_{sp} = \epsilon + \frac{m}{\epsilon} U + V + \frac{k^2}{2\epsilon^3} U^2 + \dots \quad (6-35)$$

ここで $\epsilon = \sqrt{m^2 + k^2}$ と定義する。この形は興味深い相対論的效果を表現している。即ち、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは一次のオーダーで打ち消し合い ($U < 0, V > 0$ となっている)、次の二次のオーダーではスカラーポテンシャルの項だけが生き残り非常に大きな正の値になる。即ち、この項は相対論の場合のみに出てくるものであり、非常に強い斥力の効果を作り出す。これが核物質のエネルギーの振る舞いで密度が高くなるとエネルギーが負から正に転じることの原因になっている。非相対論ではこのような効果は付加的な項として導入する必要がある、一般的には3体力として表現されている。相対論では3体力をあからさまに導入しなくとも2体力の範囲で核物質の飽和性を再現することができる。

6.4 中性子星

これまでは陽子の数と中性子の数が等しい場合の束縛エネルギーと密度の関係を議論してきた。原子核においては陽子間には斥力のクーロン力が働くため、核子数が増えてくるとエネルギーを最小にしようとして中性子数が陽子数より多くなろうとする。さらに中性子星の場合には星全体で電荷を中性にする必要がある、陽子が存在するためには電子が同数存在する必要がある。電子は質量が核子に比べて $1/2000$ なので運動が相対論的になり、フェルミエネルギーは非常に大きくなり、エネルギーが高くなる。したがって、中性子星では中性子数が陽子数より飛躍的に大きくなる。核子間の相互作用を無視すると陽子数は数%にしかない。

中性子数と陽子数が違う核物質の研究にはアイソスピンに依存する相互作用が重要である。そのためにこれまでのラグランジアンにアイソスピンに依存する項を付け加える。ボソンでアイソスピンが1の粒子としては、ロー (ρ) 中間子が知られている。実験的にもはっきりと測定されていて、その質量は 770 MeV である (表 5.1 を参照)。またスピン・パリティは 1^- であり、従って、上記のラグランジアンに次の項が付け加わる：

$$\mathcal{L}_\rho = \bar{\psi} g_\rho \gamma^\mu \tau^a \rho_\mu^a \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu^a \rho^{a\mu}. \quad (6-36)$$

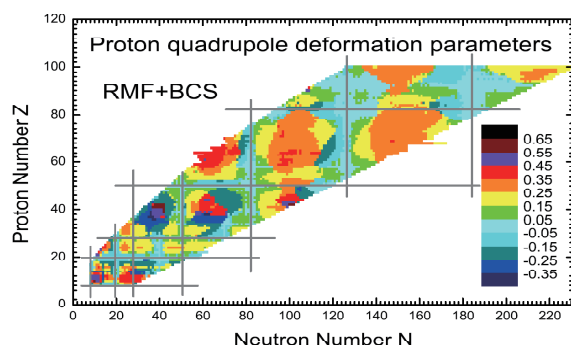


図 6.2: 対称核物質と中性子物質の核物質の状態方程式

この付加された項のうち質量は実験値を使い、ロー中間子と核子の結合定数である g_ρ は対称エネルギーを再現するように決定する。 $g_\rho = 8.1(m_\rho = 770 \text{ MeV})$ を選び、対称エネルギーを計算すると $a_{sym} = 37 \text{ MeV}$ となる。その上で陽子数と中性子数の比である $r_p = \rho_p/\rho$ の関数でプロットすると図 9 のようになる。 $r_p = 0.5$ は陽子数と中性子数が等しい対称核物質で $r_p = 0$ は中性子のみで出来た中性子物質のエネルギーと密度の関係である。

このエネルギーと密度の関係を核物質の状態方程式とよび、中性子星や超新星爆発の物理の研究のためには最も本質的な物理量になる。図 9 で示した状態方程式を使って中性子星の構造を計算すると星の中心密度が原子核の中心の密度（標準原子核密度）の 3 倍位の大きさになり、そのときの陽子数は中性子数の 1% 位の大きさになる。

要約

1. 原子核の相対論的記述を行うため σ - ω 模型を導入した。
2. ボソンを取り扱うためにボソンの量子場を平均場で近似を行う平均場近似を導入した。
3. フェルミオンである核子を扱う方法として第二量子化の方法を導入した。
4. 無限系である核物質の性質を平均場近似の基に計算した。
5. 中性子星を扱うためにアイソスピン項を導入し、中性子物質の性質を計算した。

問題

1. σ - ω 模型のラグランジアン (6-1) のうち、シグマ中間子とオメガ中間子のエネルギーを計算してみる。簡単のために、いずれの中間子も時間によらない場合を考えることにする。

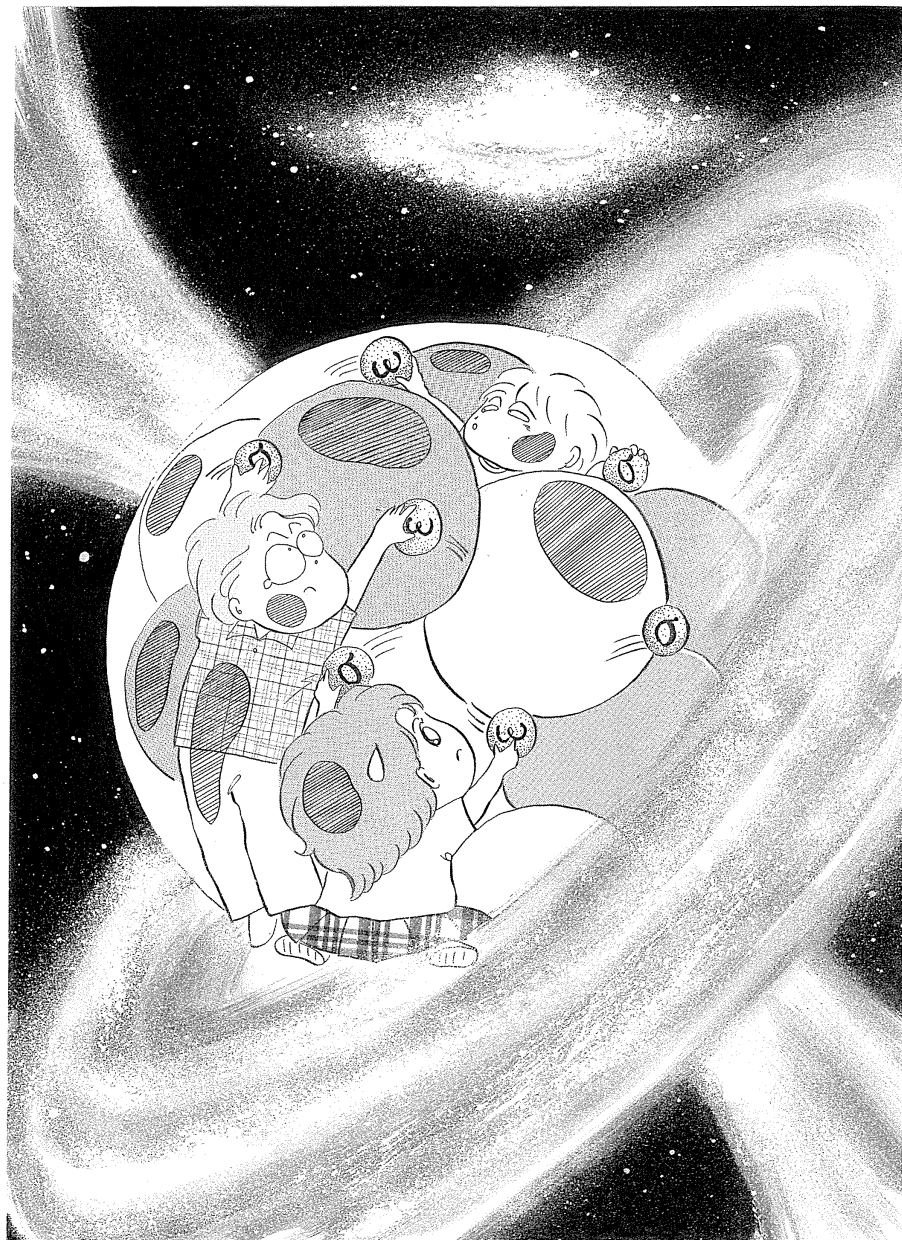
- (a) 粒子が静止している場合には空間微分をゼロにおくことができる。シグマ中間子のハミルトニアン密度が

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi_\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2$$

と書けることを示せ。ここで、 π_σ は σ に共役な運動量である。

- (b) このハミルトニアンは調和振動子のものと等価である。このことからシグマ粒子のエネルギーを量子化し、粒子数表示で表せ。
- (c) 同様の問題をオメガ中間子に対して考える。時間成分と空間成分に対するハミルトニアンが逆符号で、時間成分に対してはエネルギーが負になっていることを確かめよ。

2. σ - ω 模型のラグランジアン (6-1) から、オイラー・ラグランジュの方程式を用いて、式 (6-3) と (6-4) を導出せよ。またハミルトニアンを求めるために (6-20) の関係を使って (6-21) を導出せよ。



中性子星は大変です

