

第7章 原子核の構造

原子核を議論する際に二つの物理量に注意を払う必要がある。それは、原子核の束縛エネルギーを導出できるかということと、原子核の大きさを再現できるかということである。前章では核物質の性質を導出した。その際に適当にパラメータを選ぶことによって、原子核の飽和密度と束縛エネルギーが出るように計算を行った。この同じパラメータを用いると非常に大きな原子核では良い性質を持つ原子核を作ることが可能であることを意味している。従って、有限核の議論には原子核の表面の性質がうまく理論に反映されていることが大事なことと、クーロンの力が入っていることが必要である。

さらには原子核のマジック数が実験で要請される値で再現される必要がある。それにはスピン軌道力が重要であることが相対論的記述の動機となっている。その辺りに注目しながら、実際の原子核では相対論的平均場モデルはどのようになっているのかを紹介する。

7.1 σ - ω 模型の平均場理論による有限核

原子核を記述するのに同じ σ - ω 模型を使う。即ち、有限の大きさを持つ原子核の記述のためにも核物質の場合と全く同じラグランジアンを採用する。唯一の違いは σ と ω の平均場が一定の値をとるのではなく、場所に依存している値をとるところである。即ち $\sigma = \sigma(r)$, $\omega_\mu = \delta_{\mu,0}\omega(r)$ とする。この場所に依存している平均場をディラック方程式 (6-4) に代入すると

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - U(r) - \gamma^0 V(r))\psi(x) = 0 \quad (7-1)$$

ただし、 $U(r) = g_\sigma \sigma(r)$, $V(r) = g_\omega \omega(r)$ とおいてある。この方程式を解く為には $\sigma(r)$ と $\omega(r)$ を求める必要がある。その方程式は式 (6-3) で与えられる：

$$(-\nabla^2 + m_\sigma^2)\sigma(r) = -g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (7-2)$$

$$(-\nabla^2 + m_\omega^2)\omega(r) = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle \quad (7-3)$$

ここで $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ は原子核中の核子のスカラー密度であり、 $\langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle$ は核子の密度である。これらの量は次のように計算できる。

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \sum_i^{i_F} \bar{\psi}_i(x)\psi_i(x) \quad (7-4)$$

$$\langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle = \sum_i^{i_F} \bar{\psi}_i(x)\gamma^0\psi_i(x) \quad (7-5)$$

ここで i_F は、核子を下の準位からつめていったときの一番上の準位で、フェルミ準位と呼ばれる。 $\sigma(r)$ などを得る為には ψ_i を知る必要がある。球形の原子核の場合、球面調和関数を使ってディラック方程式の解は次のように書ける：

$$\psi_i(x) = \psi_{n\kappa jm} = \begin{pmatrix} f_{n\kappa m}(r)Y_{\kappa m}(\hat{r}) \\ g_{n\kappa m}(r)Y_{-\kappa m}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (7-6)$$

ここで

$$Y_{\kappa m}(\hat{r}) = \sum(lm_l 1/2m_s | jm) Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{m_s} \quad (7-7)$$

さらに、 $\kappa > 0$ のとき $j = \kappa - 1/2$ 、 $l = \kappa$ であり、 $\kappa < 0$ のときは $j = -\kappa - 1/2$ 、 $l = -(\kappa + 1)$ である。 j は半奇数を取り全角運動量の意味を持ち、 l は整数値を取り軌道角運動量の意味をもつ。上成分の動径関数 $f_{n\kappa m}(r)$ と、下成分の $g_{n\kappa m}(r)$ は数値計算によって求めることができる。

従って、これら3つの微分方程式を順次に計算機を使って駆使法で解く。この方程式は解析的には解くことは出来ない。この方程式を解くには数値計算を必要とする。現在ではこのような数値計算のプログラムは研究者間では無償で公開されている。

原子核の束縛エネルギーとの比較のためにはもう少しパラメーターを導入する必要がある。そこで、現在最新の論文で使われているラグランジアンを記述する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - g_\sigma\sigma - g_\omega\gamma^\mu\omega_\mu - g_\rho\gamma^\mu\tau^a\rho_\mu^a)\psi \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_\mu^a\rho^{a\mu} \end{aligned} \quad (7-8)$$

これにさらにクーロン力を与える項と少し複雑な項を付け加える。しかし、内容的にはこのラグランジアンで十分である。

原子核の束縛エネルギーとの定量的な比較のためには、さらにいくつかの項を加える必要がある。一つはクーロン力である。このためには電磁相互作用のラグランジアンを加える。さらにはアイソスピンに依存した項を加える必要がある。これは前述のようにロー中間子の項を加える。

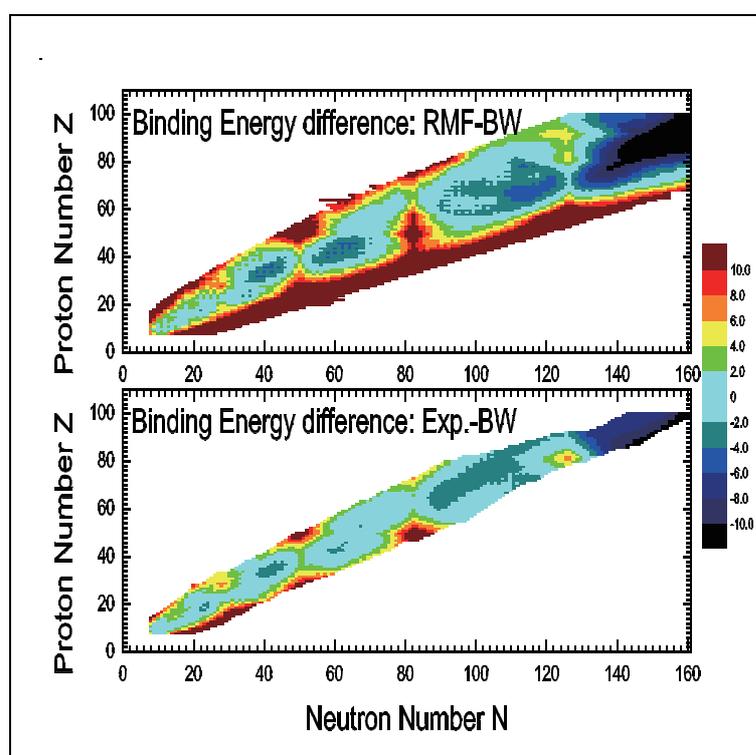


図 7.1: ベーテ-ワイゼッカーの質量公式と原子核の質量の比較

7.1.1 有限核での計算結果と実験との比較

結果としてはまずは実験とベーテ-ワイゼッカーの質量公式 (2-2) との比較を行う。この質量公式は原子核を電荷を持った液滴であるとしてそれぞれの項が導入されている。したがって、この質量公式ではマジック数のところ以外において、実験で得られた質量を再現するようにパラメータが選ばれている。したがって、マジック数以外では非常にうまく質量を再現している。この様子が図7-1の下の方で見ることができる。さらには、相対論的平均場模型を使って計算した質量とベーテワイゼッカーの質量公式と比べたものを図7-1の上の方に表示してある。このように比較すると相対論的平均場模型ではマジック数がうまく表現できていることが分かる。

さらに、原子核は大きな変形をもっていることが知られている。この原子核の変形についても相対論的平均場模型はうまく再現する。この変形の効果を取り込むためには平均場である σ や ω が中心からの距離だけではなく角度にも依存することを考慮する必要がある。したがって、解くべき微分方程式はもっと複雑なものになる。この場合も数値計算のプログラムは公開されており、少しの勉強ですぐに自分で計算が出来るようになっている。

この原子核の変形の様子が図7-2に示されてある。このように変形の大きさを原子核チャート（陽子数と中性子数の平面）に表示すると原子核の多くのことが分かる。陽子数や中性子数がマジック数のところは原子核は丸い形状を持っている。その辺りは白い色になっている。したがって、マジック数の物理の議論のためには丸い系としての議論をすることが可能である。マジック数の所から少し離れると原子核は変形する方がエネルギーが低くなる。この様子が原子核チャート（図7-2）の図には示されている。この図からほとんどの原子核は変形していることが分かる。

この本ではこれ以上は実験との比較は行わないが、相対論的平均場模型と実験データの比較は非常に良い。そのことにより、最近では非常に多くの論文では相対論的平均場模型を使って原子核の構造を研究したものが発表されている。特に、最近では実験技術の発展により安定核から遠くはなれた原子核の質量や励起状態の研究が行われており、理論との比較を通して原子核の新しい側面が明らかになってきている。

要約

1. 原子核を記述するためのシグマ・オメガ模型を導入した。
2. シグマ中間子交換力は引力でオメガ中間子交換力は斥力である。

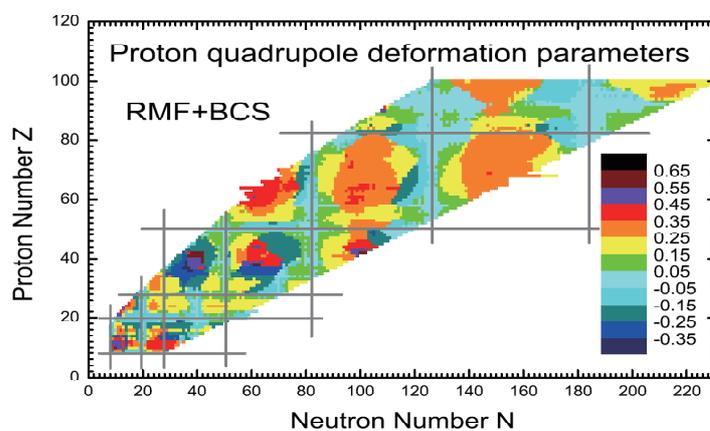
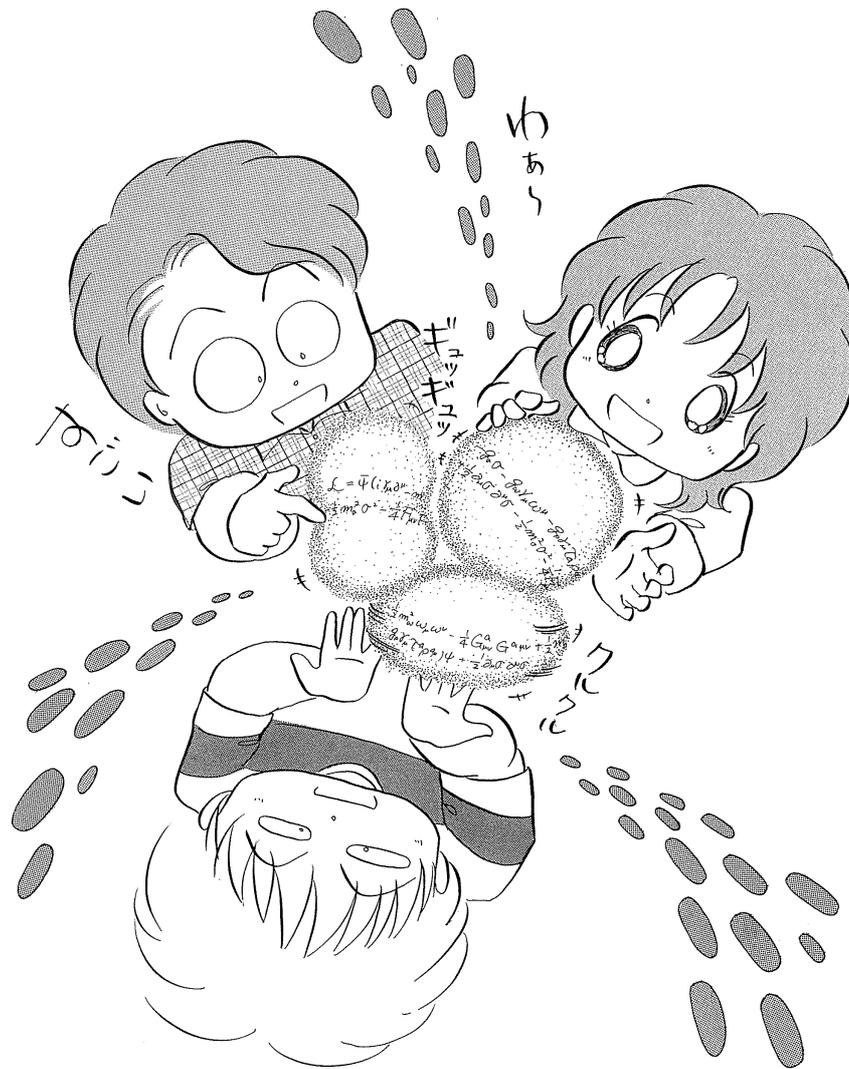


図 7.2: 原子核の変形

3. 原子核の全体の引力はシグマ中間子交換力とオメガ中間子交換力が打ち消しあって約 50 MeV の引力になる。
4. スピン軌道力はシグマ中間子交換力とオメガ中間子交換力が足し算されて非常に大きな相互作用になる。
5. 原子核のマジック数や多くの質量を定量的に記述する。

問題



ラグランジアンから原子核の形まで

第8章 カイラル対称性

原子核物理や素粒子物理ではカイラル対称性という言葉をよく耳にする。現在カイラル対称性は、「対称性の自発的な破れ」によって原子核、従って物質の大部分の質量の起源を説明する有力な手がかりと考えられている。対称性の自発的な破れは原子核物理のみならず、広く物理のいろいろな分野で使われる共通した概念でもある。そこで、この章ではカイラル対称性の基本的な考え方について議論する。そして次の章で、自発的な対称性の破れの具体的な例と応用について解説する。

核子や中間子の構造と反応を研究するハドロン物理では、カイラル対称性の重要性は量子色力学 (Quantum Chromodynamics = QCD) が知られる以前から認識されていた。現在の理解では、カイラル対称性はQCDの非摂動効果によって破れ、それが核子や中間子の性質を強く支配すると考えられている。一方で、従来の原子核物理では現象論的に核子間の相互作用を確立し、それを基盤に核子多体系を解く方法が主流であり、とりわけカイラル対称性に重きをおくことはなかった。

それに対してわれわれは、従来の原子核物理の手法と考え方を再度見直し、より現代的な視点から原子核物理を理解することを目指している。このとき、カイラル対称性の問題を避けて通れない。その主な理由はパイオンの存在に関係している。パイオンは核力の長距離部分を担い、中間子交換力としてテンソル力のかなめとなっている。一方パイオンは、カイラル対称性の自発的な破れに伴って出現する質量の軽い (厳密に対称性がよいとすると質量は正確にゼロになる) 粒子と解釈され、その相互作用はいわゆる低エネルギー定理によって決定される。この特徴はQCDの基本的な性質であると考えられているので、原子核物理をQCDから説明するには、ぜひとも考慮に入れなければならないものである。

8.1 パイオンの基本的な性質

パイオンは、湯川理論で初めて導入された中間子である。カイラル対称性はパイオンと密接に関係している。そこで、このパイオンの性質の議論から始める。

パイオンはもっとも軽いハドロンである。その基本的な性質は以下のようにまとめら

れる：

質量	$m_\pi \sim 138 \text{ MeV}$
スピン・パリティ、アイソスピン	$J^P = 0^-, I = 1$
アイソスピン成分	$(\pi^1, \pi^2, \pi^3) \sim (\pi^+, \pi^-, \pi^0)$
	$\pi^\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \pm i\pi^2), \pi^0 = \pi^3$

パイオンはアイソスピン1（アイソベクトル）の擬スカラー粒子である。アイソスピンの3つ成分はデカルト表示もしくは極座標表示で表せ、極座標表示の成分 (π^\pm, π^0) は、荷電状態に対応している。

パイオンは擬スカラー粒子のため、自由空間ではクライン-ゴールドン方程式を満足する：

$$(\partial^2 + m_\pi^2)\pi^a(x) = 0. \quad (8-1)$$

あるいは、運動量空間で

$$(-q^2 + m_\pi^2)\pi^a(q) = 0. \quad (8-2)$$

相互作用がある場合には、それらをまとめてソース項（パイオンを作り出す源） $J^a(\pi, \rho, N, \Delta, \text{etc})$ で表し、

$$(\partial^2 + m_\pi^2)\pi^a(x) = J^a(\pi, \rho, N, \Delta, \text{etc}) \quad (8-3)$$

が方程式になる。パイオンは強い相互作用をする粒子に結合することができるが、ここでは典型的かつ重要なもの (π, ρ, N, Δ) をソース項の引数に示してある。

歴史的にはパイオンは湯川秀樹によって1934年に予言された。湯川は電磁気学における光子の交換を拡張し、質量をもった粒子が核子の間に交換されることによって強い相互作用がもたらされると考えた。核力の到達距離から、粒子の質量は

$$m_\pi \sim 1 \text{ fm}^{-1} \sim 200 \text{ MeV} \quad (8-4)$$

と予言された。1936年に湯川は、Andersonらが撮影した霧箱の写真の飛跡がこの粒子であると考えたが、翌年にAndersonによって発表されたこの粒子は μ 中間子で、湯川の予言した粒子ではなかった。パイオンの発見はその後1947年に宇宙線の中から発見され、さらにその翌年1948年には、人工的にサイクロトロンでも作られることになった。

湯川とAndersonの研究に触発されて、理論的には1930年代の後半から強い相互作用に関して興味深い研究がなされ、Wenzel, Tomonaga, Oppenheimer, Schwinger等が強結合理論を展開していた。なかでも、1942年に発表されたPauliとDankoffの論文は興味深

く、その約 20 年後に発表された Skyrme の核子に関する非線形理論の原形ともいえる斬新的なアイデアが盛り込まれている。Skyrme の研究はさらに 20 年後 1980 年代に Witten らによって QCD との接点が議論され非常に話題になった。またごく最近、ストリング理論によって QCD の低エネルギー領域の力学を説明する試みで、同様の非線形理論に三たび関心が寄せられようとしている。ただし、Skyrme は Pauli と Dankoff らの仕事を知らなかったのだろうか、自身の論文には彼らの論文を引用していない。

さて、現在知られている詳しいパイオンの質量値は、電荷を持つ場合と中性の場合とで多少異なり

$$m_{\pi^{\pm}} = 139.57 \text{ MeV}, \quad m_{\pi^0} = 134.89 \text{ MeV} \quad (8-5)$$

である。荷電パイオンの方が若干重いのは、定性的には電磁エネルギーによって説明される。強い相互作用だけを問題にする場合には、荷電状態で平均して、138 MeV を使うことが多い。

138 MeV という質量は電子の 0.5 MeV という質量に比べるとかなり大きな値だが、核子の質量 (938 MeV) と比較すると軽い。現在までに知られている他のハドロンと比べても軽い。実際に、パイオンの質量をゼロとみなす近似によって、理論の構造をよりはつきりと知ることができる。これがカイラル極限で、カイラル対称性が厳密に成り立っている場合である。QCD ではクォークの質量、特に up, down クォークの質量が軽いことに関係している。

8.2 カイラリティー

カイラルとは左右を区別する「手」というギリシア語から来ている。その言葉通り、カイラル対称性は、系の右向き・左向きを特徴づける概念である。日常生活では、右左を区別することはたやすいが、原子核や素粒子物理学でそれを法則に組み込み、数式で表現していくことは結構難しい。いろいろな物理法則の概念の中でもわかりにくいものの一つになっている。できるだけ基本的なところから議論を進めていくことにする。

まず、左右を区別するにはどうしたら良いだろうか。右や左は、鏡に映すことによってお互いに入れ替わる。より一般には空間反転 (パリティ変換) に対して入れ替わる。この事情を 1 次元 (座標を x で表す) の関数の場合に表現することは比較的簡単にできる。空間反転に対して $x \rightarrow -x$ と変換するので、ある関数 $f(x)$ によって、 $f(x) \equiv \psi_R(x)$ を「右」と決めたら、 $f(-x) \equiv \psi_L(x)$ が「左」に他ならない。ところで、パリティという概

念がこの空間反転と密接に関係している。パリティが「正」とは空間反転に対して符号を変えない関数、パリティが「負」とは空間反転に対してマイナスの符号を伴う関数と定義される。これは1次元の関数の場合には、偶関数・奇関数の定義に他ならない。従って、正パリティの（偶）関数と負パリティの（奇）関数は

$$\psi_+(x) = f(x) + f(-x) = \psi_R(x) + \psi_L(x), \psi_-(x) = f(x) - f(-x) = \psi_R(x) - \psi_L(x)$$

となることは明らかであろう。

さて、核子の問題の場合に同様のことを考えてみよう。核子の状態は通常パリティの固有状態で分類される。固有のパリティは正と定義されるが、軌道運動をすることでいろいろなパリティの状態になることができる¹。そこで、この正負のパリティ状態を使って、逆に右と左の状態を構成することができる。パリティが正か負かに決まった状態を ψ とすると、 $\gamma_5\psi$ は逆のパリティを持つことがわかる（問題2）。これを用いて

$$\begin{aligned} \psi_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} \psi = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \end{pmatrix} \chi \\ \psi_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} \psi = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \\ -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \end{pmatrix} \chi \end{aligned} \quad (8-6)$$

（ N は規格化定数、 χ は2成分スピノル）が空間反転に際してお互いに移り変わるようになっていることがわかる（再び問題2）。こうして得られた $\psi_{L,R}$ は γ_5 の固有状態で

$$\gamma_5 \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R} \quad (8-7)$$

を満足する。またこの構成法では、 $\psi_{L,R}$ がお互いに直交するようになっている。 γ_5 をカイラリティの演算子といい、従って $\psi_{L,R}$ はカイラリティの固有状態である。このような基底もしくは表示のことをカイラル表示、あるいはワイル (Weyl) 表示ともいう。

さて、(8-6) 式で質量がゼロの場合を考えてみよう。すると、

$$\psi_R = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ 1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \chi, \quad \psi_L = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \chi \quad (8-8)$$

となる。ここで $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$ である。このことから、 $\psi_{L,R}$ は $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ の ∓ 1 の固有状態であることがわかる。ここで $\vec{\Sigma}$ はパウリのスピン行列 $\vec{\sigma}$ を対角要素に2つ並べた 4×4 の行列で

¹角運動量の偶奇性とパリティの正負が対応する。

ある:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (8-9)$$

$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ はヘリシティーとよばれる量で、運動量方向に量子化されたスピンである。質量がゼロの場合、カイラリティーの固有状態 $\psi_{L,R}$ はヘリシティーの固有状態に一致する。

一方、有限質量 $M \neq 0$ の場合には、カイラリティーの固有状態 $\psi_{L,R}$ とヘリシティーの固有状態は異なる。式 (8-6) から明らかのように、 $\psi_{L,R}$ は有限の M の場合、 $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ の固有状態にはない。逆にヘリシティーの固有状態は、カイラリティーの固有状態になっていない。ヘリシティーの固有状態は、ディラックスピノル

$$\psi = N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \end{pmatrix} \chi \quad (8-10)$$

で2成分スピノル χ を $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ の固有状態に選んだものである:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi = \pm \chi. \quad (8-11)$$

これらは γ_5 の固有状態にはない。

再び質量がゼロの場合を考えてみよう。このとき粒子は光速で運動するので、観測者はその粒子の速度を超えることはできない。従って、ヘリシティーあるいはカイラリティーはローレンツ不変な量子数になる。カイラリティーは座標系の取り方に依らない不変な概念になる。すなわち、右巻き・左巻きの状態は完全に分離する。あるいは、それらは独立な粒子として扱うことができる。そしてそのそれぞれに異なる対称変換が存在するとき、その系にはカイラル対称性があるという。量子色力学の「裸」のラグランジアンでは、軽い u, d クォークはほとんど質量をもたない。そこで、これらを右と左の成分に分離して u_L, d_L と u_R, d_R を考えることができる。そして、 u_L と u_R (もしくは d_L と d_R) に対してそれぞれ独立な位相変換を考えることができる。系がこれらの変換に対して不変であるとき、系にはカイラル対称性があるという。

ところが現実の世界では、粒子は質量をもち、右巻きと左巻きの状態が混ざり合う (問題4)。このような状況を、カイラル対称性が破れているという。QCD ではもともとクォークの質量は (ほぼ) ゼロであるにもかかわらず、それらの複合系であるハドロンは有限の質量を獲得している。これは相互作用の結果であるが、この状況をカイラル対称性が自発的に破れた、あるいは、カイラル対称性が力学的に破れたなどと表現する。

以下の節で、これらの内容を具体的に見ていくことにする。そのためにまず、対称性を保つような場の変換（対称変換）の一般的な性質をいくつか説明する。対称変換に対応して、保存するカレントが存在することが証明できる（ネーターの定理）。その後、カイラル対称性に関係したカイラル変換を導入する。上の説明のように、カイラル対称性は ψ_L と ψ_R それぞれに独立な位相変換として定義されるが、この本では ψ と $\gamma_5\psi$ を用いた導入を試みる。 (ψ_L, ψ_R) と $(\psi, \gamma_5\psi)$ は異なる基底で表現されたフェルミオンの成分であり、本来どちらで議論しても等価であるが、核子のように質量が有限な場合には、 ψ や $\gamma_5\psi$ のような質量の固有状態を用いた方法がしばしば採用される。一方、 ψ_L と ψ_R は質量の固有状態ではなく、カイラル変換の固有状態にある（カイラル変換のもとで、お互いに混ざり合わないという意味）。同様の事情は弱い相互作用の理論にもみられ、弱い相互作用の基底と質量の基底が異なっている。このために、ニュートリノ混合が引き起こされるのである。

8.3 対称性と保存カレント

この章では対称性の考え方と手法をいろいろな局面で扱う。そこでこの節では、その基本的な考え方のうち最も重要なネーターの定理について簡単に説明する。この定理は、系に連続なパラメータによって変換則を表すことのできる対称性があると（連続変換）。それに伴って保存するカレントが存在することを保証してくれる。系に対称性があるということは、場の変数にある変換を行なったときに、ラグランジアンあるいはハミルトニアンが不変に保たれるということである。

場の変数として n 成分のベクトル場を考え、それに作用する線形変換を導入する。すなわち、場 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$ に対して、行列によって移り変わる線形変換

$$\phi \rightarrow U(\alpha)\phi = \exp(i\alpha t)\phi \quad (8-12)$$

を考える。ここで $U(\alpha)$ は $n \times n$ の行列で、 M 個の生成子 t_i ($i = 1, \dots, M$) とそのおののに対応する連続な実数パラメータ α_i ($i = 1, \dots, M$) によって表すことができる。生成子 t_i は $n \times n$ の行列で、 αt は M 項の和を簡便に書いたものである：

$$\alpha t = \sum_{i=1}^M \alpha_i t_i. \quad (8-13)$$

いくつか簡単な例を見てみよう。

(1) 位相変換 $U(1)$: ϕ は 1 成分の複素数場。 $M = 1$ 。

$$t = 1, \quad U(\alpha) = \exp(i\alpha). \quad (8-14)$$

この変換で不変なラグランジアンの場合

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^*. \quad (8-15)$$

(2) xy 平面の2成分ベクトルの回転： ϕ は2成分の実数場。これは例(1)に等価な別の表現。

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\alpha) = \exp(i\alpha t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (8-16)$$

この変換で不変なラグランジアンの場合

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_1)^2 - m^2 \phi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_2)^2 - m^2 \phi_2^2 \right). \quad (8-17)$$

(3) 2成分スピノル場 $SU(2)$ ： ϕ は2成分の複素数場。 $M = 3$.

$$\vec{t} = \vec{\tau}, \quad U(\alpha) = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) = \cos \alpha + i\vec{\tau} \cdot \hat{\alpha} \sin \alpha. \quad (8-18)$$

ここに、 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は実数のパラメータ、 $\vec{\tau}$ はパウリ行列である。この変換で不変なラグランジアンの場合

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi^\dagger \phi)^2 - m^2 \phi^\dagger \phi^2 \right). \quad (8-19)$$

さて、系に対称性がある場合には、ラグランジアンは変換(8-12)のもとで不変、すなわち、変換された場で書かれたラグランジアンはもとの場で書かれたものと一致する： $\mathcal{L}(\phi', \partial\phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$, $\phi' = U(\alpha)\phi$. この条件のもとで、ラグランジアンの変分を計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi', \partial\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \\ &\sim \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} i\alpha t \phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \partial_\mu\phi. \end{aligned} \quad (8-20)$$

ここで、運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \quad (8-21)$$

を使うと、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \partial_\mu\phi \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} i\alpha t \phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \partial_\mu\phi \\ &= \sum_i \alpha_i \partial_\mu \left(i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} t^i \phi \right). \end{aligned} \quad (8-22)$$

パラメータ α_i は任意なので、この式から保存するカレントが M 個得られる：

$$\partial^\mu J_\mu^a = 0, \quad J_\mu^a = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} t^a \phi, \quad (a = 1, \dots, M). \quad (8-23)$$

マイナスの符号は電荷の符号の定義と関係している。

ここで電荷（カレントの第0成分の空間積分）が、場の演算子である ϕ の変換を生成することを確認してみよう。場の演算子 ϕ はユニタリ変換のもとで (8-12) の様に変換するが、その変換はユニタリ演算子 g を用いて

$$\phi \rightarrow g \phi g^\dagger \quad (8-24)$$

のように書ける。ここで g は電荷 Q^i を用いて

$$g = \exp(i\alpha_i Q^i) \quad (8-25)$$

のように表さる。この意味において電荷が変換を生成するという。式 (8-24) は、無限小変換 ($\alpha \rightarrow 0$) の場合には

$$\phi \rightarrow i\alpha_i [Q^i, \phi] \quad (8-26)$$

と書ける。

電荷を次のように定義する：

$$\begin{aligned} Q^a &\equiv \int d^3x J_0^a \\ &= - \int d^3x i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} t^a \phi \\ &= -i \int d^3x \pi(x) t^a \phi(x), \end{aligned} \quad (8-27)$$

ここで、 $\phi(x)$ に対する共役な運動量を

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}. \quad (8-28)$$

によって定義した。すると、交換関係

$$[\phi^a(x_0, \vec{x}), \pi^b(y_0 = x_0, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})\delta^{ab}. \quad (8-29)$$

を使って

$$\begin{aligned} &i[Q^a, \phi(x)] \\ &= \left[\int d^3y \pi(y) t^a \phi(y), \phi(x) \right] \\ &= -it^a \phi(x) \end{aligned} \quad (8-30)$$

となり、確かに電荷が変換を生成することがわかる。

8.4 カイラル変換

7-2節で説明したように、 ψ (同様に $\gamma_5\psi$) は質量の固有状態である。まず ψ を質量 m のフェルミオンとして、その自由場のラグランジアンを考える：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \quad (8-31)$$

ψ は Dirac スピノルである。また簡略記号 $\partial = \partial_\mu\gamma^\mu$ を導入した。

最初に位相変換を考える。すなわち、

$$\psi \rightarrow e^{iv}\psi. \quad (8-32)$$

ここで1つの実パラメータを v と書いた。この変換のもと、自由場のラグランジアン
の運動項、質量項ともに不変に保たれる。これはラグランジアンが、 ψ とその Dirac 共役
 $\bar{\psi} = \psi\gamma^0$ の組み合わせで書かれてあることから自明であろう。以下では、この変換をベク
トル変換と呼ぶ。ベクトル変換のもとでの不変性 (ベクトル対称性があるという) にとも
なって、ベクトルカレント

$$V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (8-33)$$

が保存するネーターカレントとである。

次に、位相に γ_5 を掛けた軸性ベクトル変換 (しばしば γ_5 変換、軸性変換などと呼ばれ
る) を考える：

$$\psi \rightarrow e^{ia\gamma_5}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{ia\gamma_5} \quad (8-34)$$

ここでは、変換のパラメータを a と書いて、上の v と区別してある。2つめの式の位相の
符号に注意して欲しい。ベクトル変換の場合と同様に、ラグランジアン項の変換性を調べ
てみると：

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\partial\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{ia\gamma_5}\partial e^{ia\gamma_5}\psi = \bar{\psi}\partial\psi \\ \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{ia\gamma_5}e^{ia\gamma_5}\psi \neq \bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (8-35)$$

すなわち、軸性変換に対して運動項 $\bar{\psi}\partial\psi$ は不変であるが質量項 $\bar{\psi}\psi$ は不変ではない。

もしフェルミオンの質量がゼロならば、系は軸性ベクトル変換に対しても不変に保たれ
る。これに対応して、保存する軸性ベクトルカレントが存在する：

$$A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi, \quad \partial^\mu A_\mu = 0. \quad (8-36)$$

質量がゼロでない場合にも同様に軸性カレントを定義しておく、運動方程式を使って、保存則の代わりに次の関係を示すことができる：

$$\partial^\mu A_\mu = m\bar{\psi}\psi. \quad (8-37)$$

さて、以上のよに導入されたベクトル、および軸性ベクトル変換が $\psi_{L,R}$ のそれぞれに独立に作用する変換であることをみてみよう。簡単のために、無限小変換 $g_V \sim (1+iv)$, $g_A \sim (1+i\gamma_5 a)$ が $\psi_{L,R}$ に作用する場合を考える。結果は

$$\begin{aligned} \text{ベクトル変換} \quad & \psi_R \rightarrow g_V \psi_R \sim (1+iv)\psi_R \\ & \psi_L \rightarrow g_V \psi_L \sim (1+iv)\psi_L \\ \text{軸性ベクトル変換} \quad & \psi_R \rightarrow g_A \psi_R \sim (1+i\gamma_5 a)\psi_R = (1+ia)\psi_R \\ & \psi_L \rightarrow g_A \psi_L \sim (1+i\gamma_5 a)\psi_L = (1-ia)\psi_L \end{aligned}$$

ここで、下の2つの式（軸性変換）では $\gamma_5 \psi_{R,L} = \pm \psi_{R,L}$ を使った。さて、1番目と3番目の式を、また、2番目と4番目の式を足して2で割る：

$$\begin{aligned} \psi_R &\rightarrow \frac{1}{2}(g_V + g_A)\psi_R = (1+i(v+a)/2)\psi_R \equiv g_R \psi_R \\ \psi_L &\rightarrow \frac{1}{2}(g_V - g_A)\psi_L = (1+i(v-a)/2)\psi_L \equiv g_L \psi_L \end{aligned} \quad (8-38)$$

これらの関係式から右変換として $v = a = r/2$ 、左変換として $v = -a = l/2$ のようにパラメータを選ぶと、右変換のもとでは右巻き成分のみが、左変換のもとでは左巻き成分のみが変換することがわかる。すなわち、 $\psi_{L,R}$ とはここで定義された $g_{L,R}$ によって独立な「位相変換」を受ける。変換 $g_{L,R}$ は $g_{V,A}$ と変換パラメータの選び方が異なるだけで、お互いに等価である。右巻き・左巻き成分それぞれに独立な変換が定義できることが確かめられた。

位相変換は $U(1)$ 変換なので、群の言葉でカイラル群は

$$U(1)_L \times U(1)_R \quad (8-39)$$

のように直積の形で書ける。他に強い相互作用で考えられるカイラル群としては

$$SU(2)_L \times SU(2)_R, \quad SU(3)_L \times SU(3)_R \quad (8-40)$$

などがあるが、この講義では扱わない。

要約

1. 最も軽いハドロンとしてパイ中間子の性質を概観した。
2. 空間反転のもとでお互いに移り変わる状態として、右巻き、左巻きの状態を定義し、カイラリティーの概念を導入した。ディラックスピノルの場合、これらは γ_5 行列を用いて表現することができる。
3. ラグランジアンを不変に保つ対称変換の場合、保存（ネーター）カレントが存在することを示した。
4. ベクトル変換と軸性ベクトル変換によってカイラル変換を導入した。これらは、右巻き・左巻きの成分に独立に作用する変換と等価であることを示した。
5. 質量がゼロの場合カイラル対称性は良い対称性であるが、有限質量の場合カイラル対称性は破れることを示した。

問題

1. 次の演算子

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}. \quad (8-41)$$

は射影演算子としての性質を満足することを示せ：

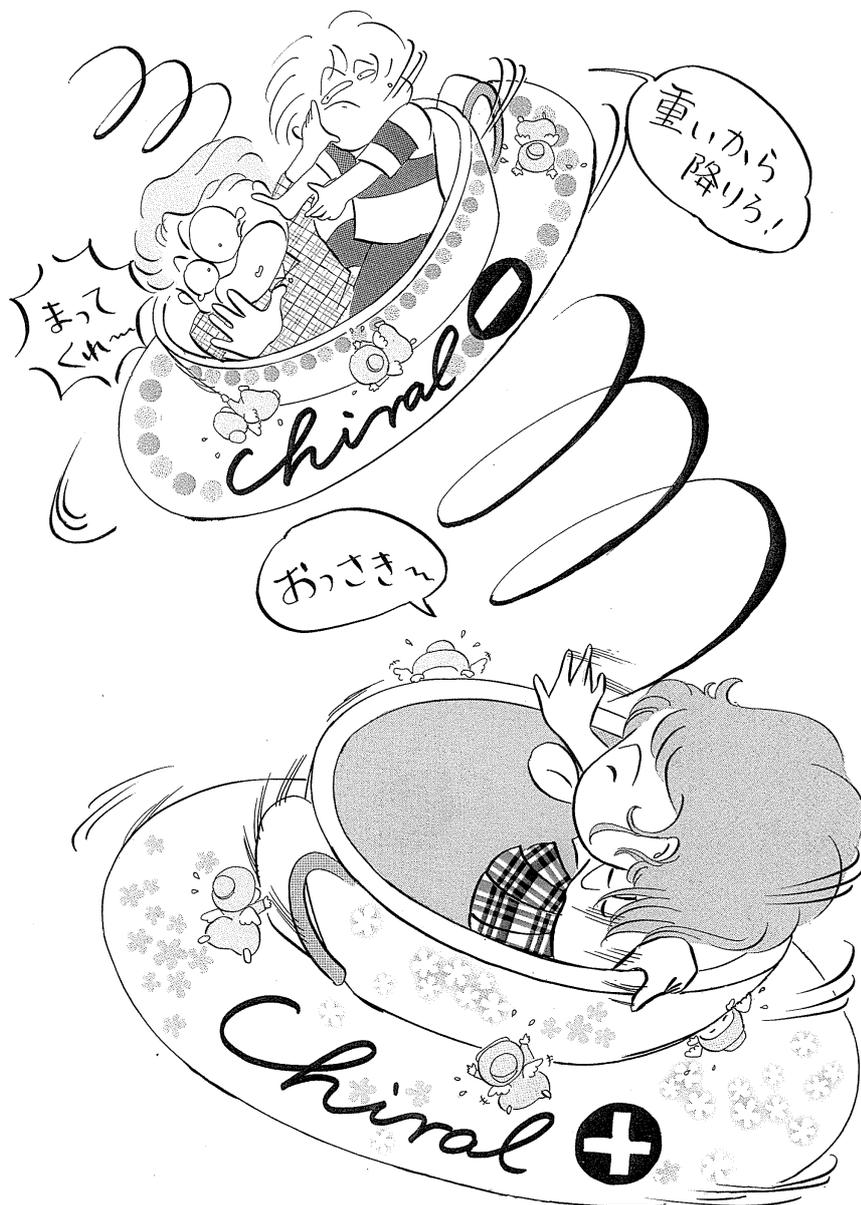
$$P_L + P_R = 1, \quad P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0. \quad (8-42)$$

2. パリティ変換のもとで $\psi(x)$ は $\gamma^0 \psi(t, -\vec{x}) \equiv \psi'$ のように変換される。この性質を使って、 ψ が定まったパリティの状態にあるとして、 $\gamma_5 \psi$ は ψ と逆のパリティを持つこと、また、 $\psi_{L,R}$ はパリティ変換でお互いに移り変わることを示せ。
3. 対称変換 (8-14), (8-16) の場合に保存するネーターカレント導き、それらが等価であることを確認せよ。

4. 質量 m のフェルミオンのラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi. \quad (8-43)$$

をカイラル表示 $\psi_{L,R}$ を用いて表せ。微分項は ψ_L, ψ_R それぞれの項の和に分離できるのに対して、質量項はそれらの積の形で書かれ、和の形に分離できないことを示せ。



原子核の中は遊園地？

第9章 線形シグマ模型

前章の準備をした上で、物理を議論することのできる模型の議論に移ろう。6章で、原子核の記述に Walecka の $\sigma\omega$ 模型がしばしば用いられることを述べた。現象論としては一定の成功をおさめた模型であったが、その基礎付けはいまだ十分に理解されていない。この節ではより基本的な理解に近づくために、模型にカイラル対称性を要請する。QCDの大局的 (global) な対称性であるカイラル対称性は、ハドロンの理論でも成り立っていない。この章では、カイラル対称性を満足する核子と中間子のラグランジアンを導入し、その性質を調べることにする。

9.1 核子と中間子のラグランジアン

パイオンには3種の電荷状態が存在し、従ってアイソスピンが1のアイソベクトル粒子である。アイソスピンの自由度を扱うと複雑になるので、以下では、パイオンの電荷はゼロであるとしてアイソスピンを無視する。それでも、カイラル対称性の本質を理解することはできる。群論の言葉で言うと、 $SU(2) \times SU(2)$ のカイラル群を扱う代わりに、 $U(1) \times U(1)$ のカイラル群を扱うことになる。

核子と中間子のラグランジアンを構成するにあたって、以下のような条件を考える。

- ラグランジアンはエルミート共役、ローレンツ不変等の基本的な性質を満足する他、カイラル変換のもとで不変である。
- 構成要素として、核子の他にまずパイオンを導入する。カイラル不変の要請から必要に応じて他の中間子を追加する。

パイオンは擬スカラーなので ($J^P = 0^-$)、核子との結合項は γ_5 を含む

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = ig\bar{\psi}\gamma_5\pi\psi = ig(\psi_L^\dagger\psi_R - \psi_R^\dagger\psi_L)\pi. \quad (9-1)$$

結合項に虚数単位 i を入れたのは、 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ が虚数だからである。(9-1) をみればわかるように、 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ は $2\psi_L^\dagger\psi_R$ という複素数の虚数部分になっている (問題1)。

この相互作用項のカイラル変換性を考えてみる。

$$i\bar{\psi}\gamma_5\pi\psi = i(\psi_L^\dagger\psi_R - \psi_R^\dagger\psi_L)\pi \quad (9-2)$$

なので (再び問題 1)、この項自体はカイラル変換

$$\psi_L \rightarrow e^{il}\psi_L, \quad \psi_R \rightarrow e^{ir}\psi_R \quad (9-3)$$

のもとで不変に保たれない。もう少し詳しく見ると、ベクトル変換 ($l=r$) に対しては不変だが、軸性ベクトル変換 ($-l=r=a/2$) に対しては不変でなく、位相の分だけ変換される

$$i(\psi_L^\dagger\psi_R e^{ia} - \psi_R^\dagger\psi_L e^{-ia})\pi. \quad (9-4)$$

この式から、軸性変換は複素数 $\psi_L^\dagger\psi_R$ の偏角を a だけ増やす変換に他ならないことがわかる。

さてパイオンのクォークによる構造を考えてみることにする。このことで、相互作用項 (9-1) の意味とカイラル変換、特に γ_5 変換の意味を別の観点からみることができる。中間子はクォークと反クォークの対で表すことができる。パイオンは擬スカラー粒子なので、

$$\pi \sim i\bar{q}\gamma_5 q \quad (9-5)$$

という構造をしているだろう。これは、相互作用項 (9-1) の核子の部分 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ と場の変数が異なるだけで、その構造は全く同じである。すなわち、 πNN 相互作用項は、ある複素数 $z_N = 2\psi_L^\dagger\psi_R$ と別の複素数 $z_q = 2\psi_L^\dagger\psi_R$ の虚部同士を掛け合わせたものになっている。

ここまでの事実から、以下のことが推察される。もし、2つの複素数の実数部分を掛け合わせたものを加えれば、全体としてカイラル (特に軸性ベクトル変換=複素平面の回転) 変換のもとで不変になるのではないか。すなわち、

$$\text{Im}[z_N]\text{Im}[z_q] + \text{Re}[z_N]\text{Re}[z_q] \quad (9-6)$$

という量を構成すれば、カイラル不変なラグランジアンを作ることができるだろう。 $\text{Re}[z_N]$ は簡単にできて

$$\text{Re}[z_N] = \psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L = \bar{\psi}\psi. \quad (9-7)$$

一方、 $\text{Re}[z_q]$ の方も同様にすればいいが、このことによつて、あらたなスカラー中間子を導入する必要があるが出てくる

$$q_L^\dagger q_R + q_R^\dagger q_L = \bar{q}q \rightarrow \sigma. \quad (9-8)$$

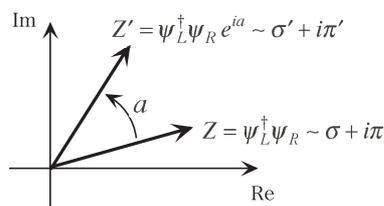


図 9.1: カイラル変数 $\psi_L^\dagger \psi_R$ の複素数表現とカイラル (γ_5) 変換

こうして、カイラル不変な相互作用項として

$$\mathcal{L}_{int} = g(\bar{\psi}\sigma\psi + i\bar{\psi}\gamma_5\pi\psi) = g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi. \quad (9-9)$$

相互作用の結合定数が、 πNN と σNN で同じであることに注意して欲しい。カイラル対称性を課したことによって一般には異なる結合定数が同じにならなければならない。理論のパラメータを減らすことができるのは対称性の原理を使うことの大きな効能である。

ここで、カイラル変換についてまとめておこう。

- ベクトル変換：

核子は $\psi \rightarrow e^{iv}\psi, \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-iv}$ と変換する一方、中間子 σ, π は不変に保たれる。

- 軸性ベクトル変換：

核子は

$$\psi \rightarrow e^{ia}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{ia} \quad (9-10)$$

のように、中間子は

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \quad (9-11)$$

の様に変換する (図 9.1 参照)。

この節の最後に、中間子の他の項についてみておく。やはり、カイラル対称性を課すことによって、 σ と π はラグランジアンに $\sigma^2 + \pi^2$ の形で入れれば良い。すなわち、関数 $V(x)$ の引数に $\sigma^2 + \pi^2$ を入れたもので、微分を含まなければポテンシャル項、微分を含むものは運動項である。 $\sigma^2 + \pi^2$ の多項式で表した時に、微分を含まない1次 (=場の2次) の項は質量項と解釈される。より高次の項は、中間子相互作用を表している。

以上のことから、カイラル対称性のもとで不変なラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - g(\sigma + i\gamma_5\pi))\psi + \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2\right) \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2\end{aligned}\quad (9-12)$$

と書くことができる。このラグランジアンの意味は次の章で詳しく調べることにする。

9.2 湯川型相互作用

これまでラグランジアンを使った形式的な議論をしてきたので、以下、実際の相互作用に関する計算法を示すことにする。湯川型の中間子-核子結合の相互作用を用いて、2核子間にどのような相互作用（ポテンシャル）が導かれるか具体的に計算する。以下、3つの湯川型の相互作用を考える

$$\mathcal{L}_{\sigma NN} = -g_\sigma\bar{\psi}\psi\sigma, \quad (9-13)$$

$$\mathcal{L}_{\omega NN} = -g_\omega\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\omega_\mu, \quad (9-14)$$

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{PS} = -g_{PS}i\bar{\psi}\gamma_5\psi\pi. \quad (9-15)$$

前に見たように、最後の式で虚数単位 i を導入したのは $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ が純虚数の量だからである。最後のパイオンと核子の相互作用はカイラル理論では擬スカラー型 (Pseudo-scalar = PS) とよばれ、ラグランジアンの添字 (PS) はそれを示している。文献では、しばしば以下の擬ベクトル型 (Pseudo-vector = PV¹) を用いることがある

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{PV} = -g_{PV}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\partial_\mu\pi. \quad (9-16)$$

行列要素

これらの相互作用の意味をみるために、非相対論的な近似を行い、行列要素を計算してみよう。まずそれぞれの場を次のように自由場で展開する：

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(u(p,s)A_{p,s}e^{-ipx} + v(p,s)B_{p,s}^\dagger e^{ipx} \right), \quad (9-17)$$

$$\sigma(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx} \right), \quad (9-18)$$

$$\omega_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ipx} + a_p^\dagger \epsilon_\mu^{(\lambda)\dagger} e^{ipx} \right). \quad (9-19)$$

¹この講義録で使ってきたように「軸性ベクトル型」とよんでもいいが、習慣としてこの場合には「擬ベクトル型」とよび、PVを使うことが多い。

ここで、核子の場合 $\psi(x)$ に対して、 $u(p, s)$ は運動量 p 、スピンの z 成分が s の粒子に対する Dirac スピノル、 $v(p, s)$ は運動量 p 、スピンの z 成分が s の反粒子に対する Dirac スピノル、 $A_{p,s}, B_{p,s}$ はそれぞれに対応する状態の消滅演算子である。中間子場に対してはシグマ中間子とパイオンは同じように展開され、それらは中性粒子なので、生成消滅演算子としては 1 種類の a_p を用いればよい。オメガ中間子はベクトル粒子のため、波動関数を表すためにさらに 3 種類の偏極ベクトル $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, 3$ を用いた。

規格化について若干説明をする。まず、核子の波動関数としては次のものを採用する：

$$u(p, s) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \end{pmatrix} \chi_s \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \quad (9-20)$$

ここで χ_s ($s = \pm 1/2$) は 2 成分の Pauli スピノルである。これは $u^\dagger u = 1$ のように規格化されていて、単位体積あたり 1 個の粒子が存在するようになっている（問題 2）。中間子場の展開には因子 $1/\sqrt{2\omega_p}$ ($\omega_p = \sqrt{m_\sigma^2 + p^2}$) が現れているが、これも中間子が単位体積あたり 1 個存在することを保証している（問題 2）。

さて、非相対論的な近似ではいろいろな行列要素を $v = p/M$ で展開し、その最低次の項だけ採用する。この近似のもとで、まず相互作用 (9-13)-(9-16) の行列要素を計算してみよう。図 9.2 の左に示したように、各状態の運動量を指定する。すると、

$$\langle p' | \mathcal{L}_{\sigma NN} | pq \rangle \rightarrow g_\sigma \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \exp(-ipx - iqx + ip'x) \chi_{s'}^\dagger 1 \chi_s. \quad (9-21)$$

すなわち、スカラー粒子であるシグマ中間子は、核子と $\chi_{s'}^\dagger 1 \chi_s$ という因子を通して結合する。スカラーという性質から予想できるように、始状態と終状態の核子のスピンをかえることなく遷移する。

次にオメガ中間子との結合を見てみる。時間、および空間成分の構造の違いに注意する必要がある。空間成分の計算が若干面倒だが実行すると、次の結果を得る：

$$\begin{aligned} \langle p' | \mathcal{L}_{\omega NN} | pq \rangle &= -g_\omega (\bar{u} \gamma^0 u \omega^0 - \bar{u} \vec{\gamma} \cdot \vec{\omega} u) \exp(-ipx - iqx + ip'x) \\ &\rightarrow -g_\omega \left[\chi_{s'}^\dagger \chi_s \omega^0 - \frac{1}{2M} \chi_{s'}^\dagger ((\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{\omega} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \times \vec{\omega}) \chi_s \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \exp(-ipx - iqx + ip'x). \end{aligned} \quad (9-22)$$

すなわち、時間成分はスカラー粒子の場合と同じく $\chi_{s'}^\dagger 1 \chi_s$ という因子を通して結合する。注意すべきは、スカラーの場合因子 1 の出所はスカラー密度 $\bar{u}u$ であったのに対して、ベクトルの場合は、ベクトルの時間成分からくる密度 $\bar{u} \gamma^0 u = u^\dagger u$ から来しているという点

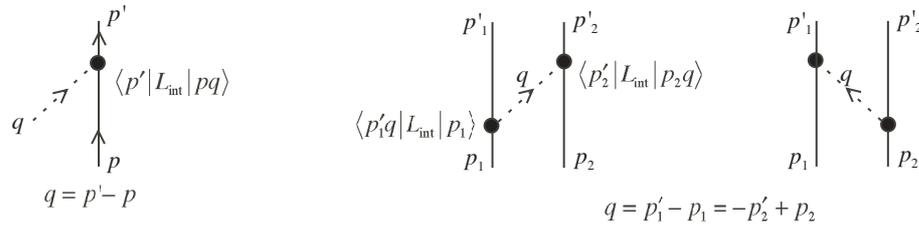


図 9.2: 湯川型相互作用の行列要素

である。非相対論の場合にはこれら異なる密度は区別がつかなくなる。一方空間成分は複雑に見えるがこれは $v = p/M$ の高次項で、例えば、 $\vec{q} \times \vec{\sigma}$ の項は磁気的な相互作用を表している。

最後にパイオンとの相互作用を見てみよう。擬スカラー結合の場合に同様に非相対論的な近似のもとで、

$$\langle p' | \mathcal{L}_{PS} | pq \rangle \rightarrow g_{PS} \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{2M} \chi_s \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \exp(-ipx - iqx + ip'x). \quad (9-23)$$

因子 $\vec{\sigma} \cdot \vec{q}$ は、非相対論の場合に構成される擬スカラー量であり、パイオンが擬スカラー粒子であることの帰結である。 \vec{q} はパイオンの波動関数 $\exp(-iqx) = \exp(-iq_0t + i\vec{q} \cdot \vec{x})$ を (空間) 微分したものである。あるいは部分積分すれば、核子の遷移密度 $\sim \chi_{s'}^\dagger \chi_s \exp(-ipx + p'x)$ に作用する微分と考えても良い。相互作用の頂点に微分がでることから、パイオンの相互作用は以下でみるように複雑な構造をしている。しかし、パイオンがカイラル対称性の自発的な破れから生じている限りこれはさげられない事実で、この複雑な相互作用のため原子核の多彩な性質が実現しているのである。軸性結合型の場合にも、非相対論的な近似を行うと同じ結果を得る。

ポテンシャル

前説で得られた各相互作用を用いて、2核子間のポテンシャルを計算することができる。ここでは、量子力学の2次の摂動論に基づいた導出を紹介する。最近の多くの場の理論の教科書では、相対論的に共変なファインマン則を使って計算されるが、同じ結果を与える。

2次の摂動によると、図9.2に示したように、2つの中間子交換に対応する項を計算することになる。初めにシグマ中間子交換の場合を考える。2次の摂動の公式を運動量空間で適用し、エネルギーの補正をポテンシャルエネルギーとにおいて、

$$V_\sigma(\vec{q}) = - \sum_n \frac{\langle 0 | V^\dagger | n \rangle \langle n | V | 0 \rangle}{E_n - E_0}$$

$$= -2 \times \frac{1}{\omega_q} \left(\frac{g_\sigma}{\sqrt{2\omega_q}} \right)^2 = -\frac{g_\sigma^2}{\vec{q}^2 + m_\sigma^2} \quad (9-24)$$

を得る。この式を導出するにあたり、核子の質量は十分重い近似を使った（問題3）。フーリエ変換して座標表示に移ると

$$V_\sigma(\vec{x}) = -\frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (9-25)$$

という湯川関数を得る。ここで注意すべきは、このポテンシャルは結合定数の符号に関わらず、常に負、すなわち引力を与えるポテンシャルになっているという点である。これは、2次の摂動が必ず負のエネルギー補正を与えることの帰結である。

同様の作業を前説で与えた中間子のすべてに対して行うことができる。オメガ中間子の場合を考えてみよう。この場合、偏極ベクトルの分だけ上の結果と異なる。すなわち、

$$V_\omega(\vec{q}) = -\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\nu^{(\lambda)} \frac{g_\omega^2}{\vec{q}^2 + m_\omega^2} \quad (9-26)$$

この式ではオメガ中間子の成分を一般に μ, ν とおいたが、時間成分の交換の場合には $\mu = \nu = 0$ とすればよい。ところが、偏極ベクトルの和については以下の公式が成り立っている

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} \quad (9-27)$$

従って、時間成分をとると ($\mu = \nu = 0$)

$$V_\omega(\vec{q}) = +\frac{g_\omega^2}{\vec{q}^2 + m_\omega^2} \quad (9-28)$$

となり、このポテンシャルは正、従って斥力となる。この結果も結合定数の符号にはよらないことに注意しよう。結局中間子交換力の場合、パイオン、シグマ中間子、オメガ中間子の空間成分などの粒子が交換される場合には引力がもたらされるのに対して、オメガ中間子（一般にはベクトル粒子）の時間成分が交換される場合には斥力になることがわかる。5章でみたように、ワレチカ模型ではシグマ中間子交換による強い引力と、オメガ中間子交換による強い斥力がほとんど打ち消し合って、ほどよい引力をもたらしている。それが原子核を束縛する重要な力の一部を担っている。

要約

1. $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ と $\bar{\psi}\psi$ を複素数 $2\bar{\psi}_L^\dagger\psi_R$ の虚部と実部とみなし、カイラル (γ_5) 変換が複素数の偏角を変化させる変換と等価であることをみた。

2. 複素数の実部と虚部の和としてカイラル不変なラグランジアンを構成した。その際、パイオンの他にシグマ中間子を導入した。
3. 中間子交換力の例として、パイオン交換の他、シグマ中間子、オメガ中間子交換力を求めた。

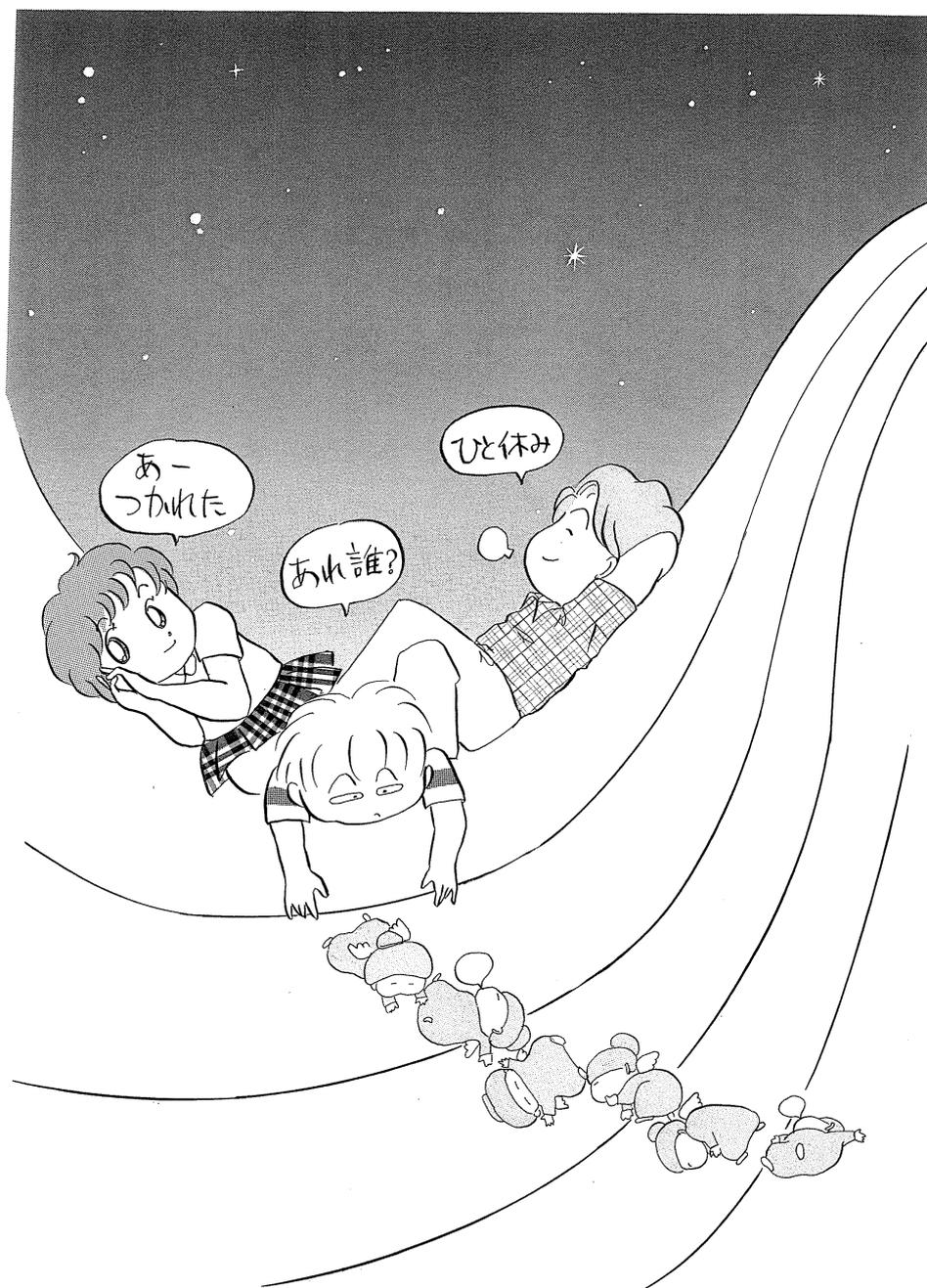
問題

1. $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma_5\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$ の複素共役を計算せよ。また、これらの量を右巻き、左巻きの核子 ψ_R , ψ_L を使って書き表せ。
2. 核子とスカラー中間子の平面波の波動関数を次のように書く：

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \end{pmatrix} e(-ipx)\chi_s, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e(-ipx) \quad (9-29)$$

ここで、 $E = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$, $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, M, m は核子およびスカラー中間子の質量である。このとき、カレントの第ゼロ成分として定義される「密度」は、単位体積あたり1個の粒子が存在するように規格化されていることを示せ。

3. πN 結合に関して、PS および PV 型の行列要素が等しくなるためには、結合定数 g_{PS}, g_{PV} の間にどのような関係があればよいか。
4. シグマ中間子交換のポテンシャルを導出にあたり、2次の摂動を正しく適用すると、エネルギー分母は $E_1' + E_2 + \omega_q - (E_1 + E_2)$ となる。核子の質量が十分重い時に、この表式は ω_q となることを確認せよ。



ポテンシャルのゆりかご

第10章 南部-Goldstoneの定理と質量生成機構

前章で線形シグマ模型を構成した。この模型のラグランジアンはカイラル変換のもとで不変に保たれる、カイラル不変なラグランジアンである。カイラル対称性が成り立つ場合核子の質量は0であり、シグマ中間子とパイオンは有限な同じ質量を持つ。しかし現実には、核子の質量は有限の値を持ち、パイオンは非常に軽く近似的に質量ゼロと考えても良い。さらに、シグマ中間子は600 MeV程度の重い質量を持つと考えられている。従って、我々の世界ではカイラル対称性は破れていると考えられている。

対称性をもったラグランジアンから出発して、その対称性を破るとはどのような意味なのであろうか。物理現象を記述するためにはラグランジアン（演算子）と物理状態が必要になる。ここでは、ラグランジアン自体は対称性を保持しながらも、状態がその対称性を破るような場合が生じる。このことは真空（基底状態）が対称性を破ることによって、系統的に説明される。この状況を、対称性が「自発的に破れる」と言う。対称性が「自発的に破れる」ためには、相互作用を必要とする。そのため、「力学的な対称性の破れ」とも称される。自らの相互作用によって自発的に対称性を破る、という表現がしっくりくるかもしれない。これらの事情は、線形シグマ模型のラグランジアンを用いることによって理解することができる。そしてどのように核子が質量を獲得し、パイオンが質量が0の粒子として存在するのかを議論する。

10.1 線形シグマ模型のラグランジアン

前章(9-12)でみたように、線形シグマ模型ラグランジアンとして次のものを得た：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma = & \bar{\psi}(i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi))\psi + \frac{1}{2}((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2) \\ & - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2. \end{aligned} \quad (10-1)$$

ポテンシャル

$$V(\sigma, \pi) = \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (10-2)$$

では、ボソン場の 4 次の項までとった。ラグランジアン (10-1) のすべての項の次元 (単位) が、質量で 4 を超えないことに注意したい。これは量子補正を計算する場合に必要な繰り込み条件から要請されるが、この話題はこの本の範囲を超えるので議論しない。ラグランジアン (10-1) には μ^2, λ, g の 3 つのパラメータが含まれる。このラグランジアンで以下の点に注目する：

- 核子には質量項がない。質量項はカイラル対称性を破るからである。
- パイオンとシグマ中間子は同じ係数 $\mu^2/2$ の質量項を持っている。
- パラメータ λ は理論の安定性から正でなければならない。
- 質量パラメータ μ^2 は正にも負にもなり得る。その符号に応じて真空の構造が変わり、カイラル対称性の性質が変わる。特に、2 番目の項目、パイオンとシグマ中間子の質量の性質が代わる。 μ^2 が正または負の場合のポテンシャルの形を以下の図に示す。

さていよいよ対称性と真空の関係、また、それらと粒子 (中間子) の性質、特に質量との関係についてみてみよう。そのために、まず、系の真空についてみる。真空とは、エネルギーを最小にする配位¹のことである。最小エネルギーの配位を古典論の範囲で決定しよう。

ハミルトニアン (密度) を書いてみると

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\sigma = & \int d^3x \left[\bar{\psi}(-i\alpha \cdot \nabla + g(\sigma + i\gamma_5\pi))\psi \right. \\ & + \frac{1}{2}(\Pi_\sigma^2 + (\nabla\sigma)^2) + \frac{1}{2}(\Pi_\pi^2 + (\nabla\pi)^2) \\ & \left. + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10-3)$$

ここで Π_σ, Π_π は、 σ, π に共役な運動量である (問題 1)。この式を見て、真空としては各項が最も小さくなるような配位をさがせばよい。核子の部分に関しては、核子が存在しない場合がエネルギー的に最も得をするので無視することにする。次にボソンの運動項であ

¹ここで状態という表現を使わなかった。以下では、場の古典論としてエネルギー最小の場 (=配位) を求めるからである。

るが、 $\Pi_{\sigma,\pi}^2$ の項は、場の振動の運動エネルギー、 $(\vec{\nabla}\sigma)^2, (\vec{\nabla}\pi)^2$ の項は場の変形に伴って生じる張力（ポテンシャル）エネルギーと考えられ、従って、時間依存のない（静的）、かつ空間的に一様な場の配位をとることによって、それらの項をゼロ（最小値）にすることができる。そこで真空としては静的かつ一様な場で、最後の場のポテンシャル項を最小にする配位を考えればよい。静的一様ということで、場からは時空点 x の依存性がなくなり、ポテンシャルは単に 1 変数 $\phi \equiv \sqrt{\sigma^2 + \pi^2}$ で表された関数

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^2)^2 \quad (10-4)$$

となり、この最小値は容易に探すことができる。

さらにこの真空の周りで場の変数を展開することによって、その場に対応する中間子の質量を求めることができる。場の真空における値を ϕ_0 とおいて、場の演算子を $\phi = \phi_0 + \varphi$ と書く。ここで、 ϕ_0 は定数で φ が演算子である。多くの場合 $\phi_0 = 0$ であるが、対称性が自発的に破れる場合には $\phi_0 \neq 0$ となり得る。このように、対称性の性質によって値が変わる量を秩序変数（オーダーパラメータ）という。

ラグランジアンをこの変数 φ で展開し 2 次の項までとるとその定数係数が質量項となる。ラグランジアンはすでに場の 2 次の量なので、今の場合質量を求めるにはポテンシャルの展開を行えば十分である：

$$V(\phi) = V(\phi_0 + \varphi) = V(\phi_0) + V'(\phi_0)\varphi + \frac{1}{2}V''(\phi_0)\varphi^2 + \dots \quad (10-5)$$

最小点の条件から、 $V'(\phi_0) = 0$ と $V''(\phi_0) \geq 0$ が保証されている。すなわち、こうして得られる質量は必ず正（もしくはゼロ）である。ところが、もともとのポテンシャル中の ϕ^2 の係数 $\mu^2/2$ は必ずしも正である必要はなく、実際に $\mu^2/2 < 0$ の場合に、ポテンシャルの最小点が $\phi_0 \neq 0$ となる。これが、自発的な対称性を引き起こす原因になる。 $\mu^2/2$ の値は、よりミクロな理論によって決まるが、粒子間の相互作用が重要な役割を果たしている。この事情は、次の章で調べることにする。相互作用が対称性の破れを引き起こすことから、力学的な相互作用の破れともいわれる。以下において、 μ^2 が正または負の場合によって系の性質がどのようになっているか見ていく。

$\mu^2 > 0$ の場合

ポテンシャルの最小点は原点 $(\sigma, \pi) = (0, 0)$ であり、そこが真空である。 σ と π を原点の周りで展開して 2 次の項の係数を $m^2/2$ とすることで質量が求められる。この場合は自

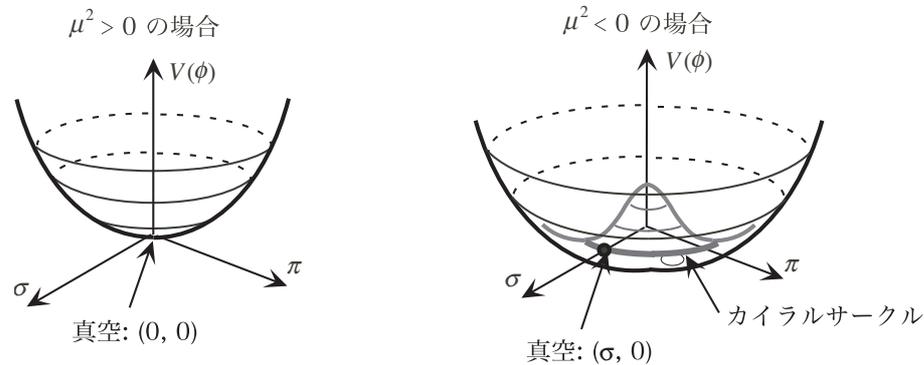


図 10.1: 線形シグマ模型のポテンシャル。 $\mu^2 > 0$ の場合は最小点が原点に唯一に決まるが、 $\mu^2 < 0$ の場合は、最小点はカイラルサークル上に無限に縮退している。

明で、 σ, π ともに同じ質量 μ^2 を持つ。このように、真空が原点にあり、2つの中間子の質量が同じ（縮退している）場合を、系は Wigner 相にあるという。このとき明らかに、真空 $(\sigma, \pi) = (0, 0)$ は変換 (9-11) に対して不変である。また、ラグランジアンもこの変換のもとで不変に保たれる。すなわち系のカイラル対称性が保持されている。繰り返しになるが、この際核子の質量はゼロである。

$\mu^2 < 0$ の場合

ポテンシャルの最小点は $\phi^2 = \sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$ (定数) を満足する円周上（カイラルサークル）の任意の点にとることができる（図 10.1）。 f_π はパイオンの崩壊定数と呼ばれる定数である（問題 9-4）。そこで、カイラルサークル上の任意の 1 点を選び、それを真空と定義してみる。実はこの時点で、本来等価な点のうちの 1 点を選ぶことにより、対称性を「自発的に」破ることになる。

古典場の有限値は $(\phi^2 = f_\pi^2)$ 、量子論では場の真空期待値と解釈される。場の演算子に有限な期待値を与える状態はコヒーレント状態によって実現できる。場の理論の場合は複雑なので、自由度が 1 の量子力学の場合についてコヒーレント状態について少し見てみることにする。コヒーレント状態を $|c\rangle$ で表せば、量子力学では消滅演算子 a に有限な期待値を与える

$$\langle c|a|c\rangle = c \quad (10-6)$$

(c は定数)。このような $|c\rangle$ は

$$|c\rangle = \exp(ca^\dagger)|0\rangle \quad (10-7)$$

によって与えられる（問題 9-2 を見よ）。このことから、有限な真空期待値を与える状態はボゾンが 0, 1, 2, ... 個存在する状態の重ね合わせになっていることがわかる。

さて、真空中で凝縮する場としては擬スカラーの π があってはならないことがわかる。なぜなら、真空のパリティは正でなければならないのに対して、 n 個の π が存在する状態の重ね合わせのうち、奇数個の π が存在する状態は負のパリティを持つからである。この問題を回避するためには、初めに真空中に選んだ点と原点を結ぶ方向を σ 軸と再定義する。そのためには、カイラル変換 (9-11) をおこなってやればよい。ラグランジアンがカイラル対称性を持つ場合、このような操作が可能になり、真空中ではスカラー場 σ が凝縮する。すなわち、真空は $(\sigma, \pi) = (\sqrt{-\mu^2/\lambda}, 0) \equiv (f_\pi, 0)$ である。

場の期待値がゼロでない値を持つ真空中上に成り立っている世界を、南部-Goldstone 相という。この真空中の周りで微小振動を考えると、動径方向、すなわち σ 方向にはポテンシャル壁を登っていくので、有限質量のシグマ中間子が励起されることになる。一方、それに直交するカイラルサークルの接線方向への揺らぎは、平らな面上の移動となりエネルギーを必要としない。すなわち質量ゼロの粒子、パイオンの励起となる。この事情はかなり一般的に示すことができ、南部-Goldstone の定理とよばれ、また、質量がゼロの粒子を南部-Goldstone 粒子とよばれる。パイオンは他のハドロンと比べその質量はかなり軽く、非常に良い近似で南部-Goldstone 粒子とみなすことができる。

このことを計算によって確かめるためには、 $\sigma \rightarrow f_\pi + \sigma$ として新しい変数 σ と π に関するラグランジアンを書いてやればよい。結果は

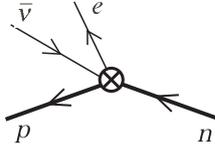
$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\partial - gf_\pi - g(\sigma + i\gamma_5\pi)) \\ & - \frac{1}{4}\mu^2 + f_\pi^2 - \lambda f_\pi^2 \sigma^2 - \lambda f_\pi \sigma(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \quad (10-8)$$

$\mu^2 > 0$ の場合にみられた、 σ と π のあいだの対称性はもはやなくなっている。また、真空 $(\sigma, \pi) = (f_\pi, 0)$ も変換 (9-11) のもとで変わってしまう。このような状況をカイラル対称性が自発的に破れたという。

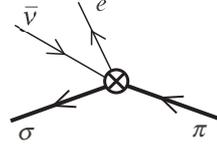
10.2 カレント

弱い相互作用によって電荷を持ったパイオンは寿命約 2.6×10^{-8} 秒で崩壊する²。これが自発的対称性の破れと結びついていることは興味深いので、ここで紹介する。そのためまず、線形シグマ模型のカレントを考えよう。カイラル変換 (9-10) と (9-11) をラグランジ

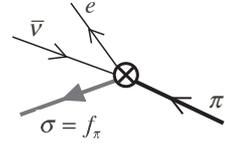
²中性のパイオンは電磁相互作用によって 8.4×10^{-17} 秒で崩壊する

フェルミオンカレント $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 

対称性のあるなしにかかわらず、
中性子が陽子に変わる

メソンカレント $-\sigma\partial_\mu\pi + \pi\partial_\mu\sigma$ 

対称性がある場合
パイ中間子が σ 中間子に変わる



対称性が破れた場合
パイ中間子は崩壊する

図 10.2: 対称性に依存した軸性カレントの構造

アンに適用し、ネーターの定理からカレントを求めると、次の結果を得る：

$$\begin{aligned} V^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \\ A^\mu &= \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi - \sigma\partial^\mu\pi + \pi\partial^\mu\sigma. \end{aligned} \quad (10-9)$$

これらは、弱い相互作用のハドロンカレントと呼ばれる部分に対応する。例えば、(10-9) は中性子のベータ崩壊を記述するフェルミ型相互作用に次のように現れる：

$$\mathcal{L}_{WI} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{p}\gamma^\mu(1 - g_A\gamma_5)n\bar{e}(1 - \gamma_5)\gamma_\mu\nu. \quad (10-10)$$

ここで、 n, p は中性子、陽子を表すスピノルである。 $G = (1.026 \pm 0.001) \times 10^{-5} m_p^{-2}$ はフェルミ定数、また、 g_A は現象論的に導入されたパラメータで、軸性ベクトル結合定数と呼ばれる。実験的に知られている値 $g_A \sim 1.25$ を理論的に導くことは、カイラル対称性の自発的破れの性質と関係して面白い問題である。

さて、カレントの構造を自発的対称性の破れが起こる場合と、起こらない場合とで比較してみる。ベクトルカレントはいずれの場合も差はなく $n \rightarrow p$ の過程で、レプトンカレントが核子に直接結合している。ところが軸性カレントの場合、対称性の破れによって特に中間子カレントに違いが見られる。対称性が自発的に破れていない場合には、軸性カレントは図 10.2 に示したように $n \rightarrow p, \sigma \rightarrow \pi$ などの遷移を表し、初めの状態は終状態では別の状態に変わっていく。重要なことは、入ってきた粒子が出て行っているということである。状態（量子数）が変わるのは、弱相互作用の性質である。ところが対称性が自発的に破れると、軸性カレント (10-9) の第 2 項が表すように（図 10.2 参照）、パイオンからかわったはずのシグマ中間子が真空に（凝縮するシグマ中間子に）吸われて消滅してしまう。これはパイオンの崩壊のように見える。崩壊の強さは遷移行列要素によって定義され、

$$\langle 0|A_\mu(x)|\pi(p)\rangle = \langle 0|-\sigma(x)\partial_\mu\pi(x)|\pi(p)\rangle \sim ip_\mu f_\pi e^{ipx} \quad (10-11)$$

から、確かに f_π は崩壊の強さを表している。実験データから $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ となることが知られている。

こうして得られた f_π と πN 散乱の実験から知られている πN 結合の強さ $g \sim 10$ を結びつけると、核子の質量 $M_N = gf_\pi \sim 900 \text{ MeV}$ がほぼ再現できる。これは、カイラル対称性が強い相互作用の世界でほぼ成り立っていることを示す証拠の一つである。この線形シグマ模型によると、核子の質量はシグマ中間子の真空期待値 f_π が有限値をとることによって説明される。すなわち、カイラル対称性の自発的破れによって生成される。強い相互作用の基礎理論は量子色力学であるが、カイラル対称性の自発的破れと質量の生成を説明するには至っていない。今後の課題である。

要約

1. 線形シグマ模型のポテンシャルの構造によって (μ^2 の正負)、カイラル対称性の自発的破れが引き起こされる機構をみた。
2. カイラル対称性が満足されている場合には、真空の配位は唯一に決定される。パイオンとシグマ中間子の質量は縮退し有限な値をとり、核子の質量はゼロである。
3. カイラル対称性の自発的な破れは、真空の配位がカイラルサークル上に無限に縮退することにより引き起こされる。真空点を適当に選ぶことにより、質量はゼロのパイオンが出現する。一方、核子は有限の質量を獲得する。
4. 軸性ベクトルカレントの行列要素をみることで、パイオンの崩壊が自発的な対称性の破れと結びついていることをみた。

問題

1. 場の理論において、ハミルトニアン密度 \mathcal{H} はラグランジアン密度 \mathcal{L} から

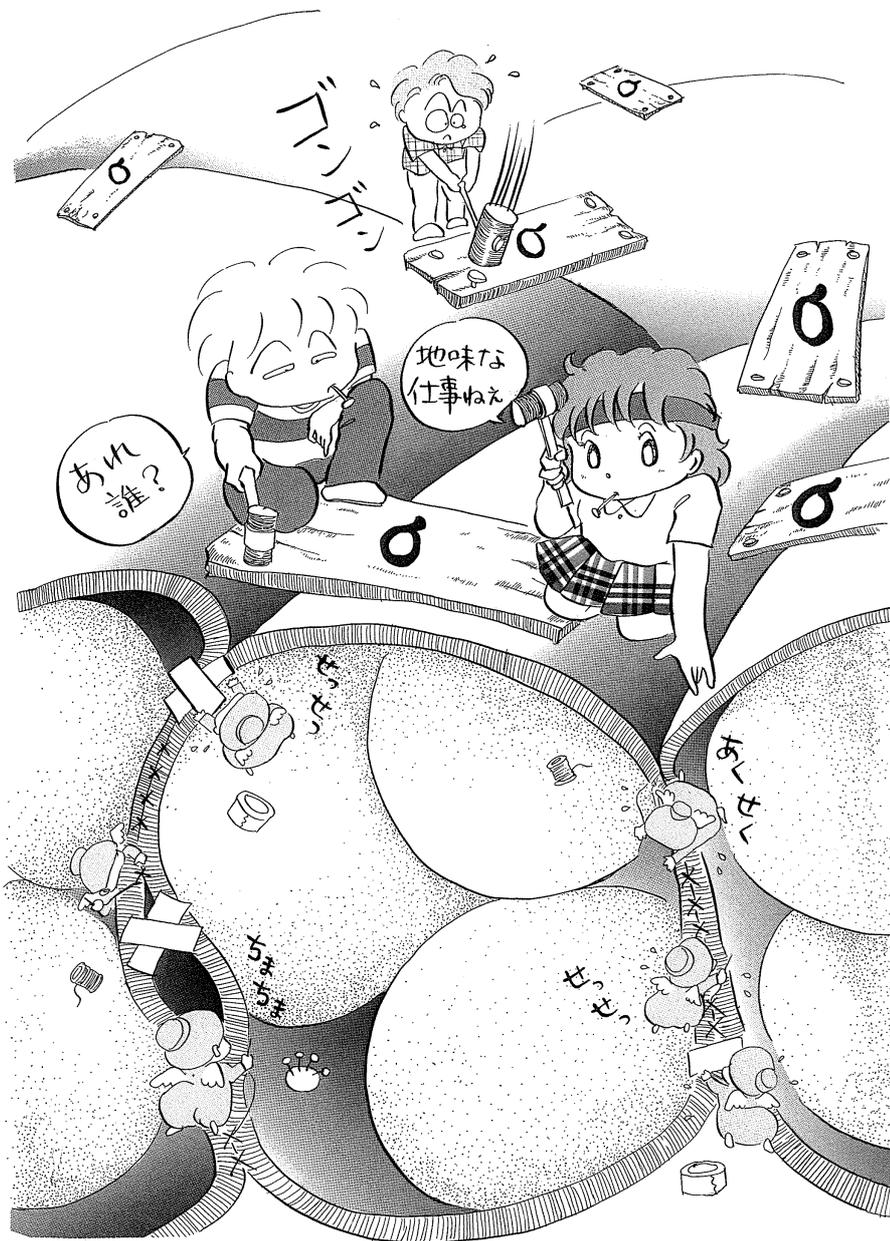
$$\mathcal{H} = \Pi_\phi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad (10-12)$$

によって求めることができる。ここで、場の変数 ϕ に共役な運動量 Π_ϕ は $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ である。これを用いて線形シグマ模型のハミルトニアンが(10-3)によって与えられることを示せ。

2. コヒーレントと状態 $|c\rangle = \exp(ca^\dagger)|0\rangle$ が $\langle c|a|c\rangle = c$ を満足することを示し、定数 c を求めよ。
3. 式 (10-8) を確認せよ。
4. カレント (10-9) を導け。また、運動方程式を使って、カレントの保存則を証明せよ。
5. (10-9) の軸性ベクトルカレントとシグマ中間子の真空期待値 $\langle 0|\sigma|0\rangle = f_\pi$ を使って

$$\langle 0|A_\mu(x)|\pi(p)\rangle \sim ip_\mu f_\pi e^{ipx} \quad (10-13)$$

を証明せよ。



あれ誰?

地味な仕事ねえ

地味な仕事こそ大事

第11章 南部-ヨナラシニオ (Nambu-Jona-Lasinio) 模型

前章ではカイラル対称性の自発的な破れを引き起こす現象論的な模型として、線形シグマ模型を考察した。そしてパラメータ μ^2 の符号によって、対称性の現れ方に違いが生じることをみた。 $\mu^2 > 0$ の場合はカイラル対称性が成り立ち Wigner 相にあるといった。一方 $\mu^2 < 0$ の場合にはカイラル対称性は自発的に破れ、南部-Goldstone 相にあるといった。従って μ^2 の符号が正や負になる機構が問題になる。この章では、実際にこの μ^2 の符号を左右する力学的な模型を考察する。これが南部-Jona-Lasinio (NJL) 模型である。

前節まではフェルミオンは核子としてきたが、この章ではクォークに置き換える。南部と Jona-Lasinio による原論文でもフェルミオンは核子とされていたが、現在ではクォークとすることで、南部-Jona-Lasinio 模型は QCD の良い有効理論であると考えられている。

この模型は、強い相互作用における超伝導模型と比喩される。この観点からは、線形シグマ模型は Ginzburg-Landau 理論に対応し、南部-Jona-Lasinio 模型は BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) 理論に対応する。BCS 理論では対をなす電子の間に働く引力によって Cooper 対が構成される。そこでの引力の起原は原子で形成される格子を媒体とするフォノン交換による。Cooper 対はボソンとして振る舞いそれが凝縮しその結果、フェルミオンのエネルギースペクトラムにはギャップを生じる。このとき、電子数の保存則が自発的に破れる。

一方強い相互作用の場合には、クォーク反クォークの間に働く引力によってクォーク・反クォーク対が構成される。この引力の起源ははっきりわかっていないが、例えば、インスタントンなどの QCD の非摂動効果によると考えられている。クォーク・反クォーク対はボソンとして振る舞いそれが凝縮しその結果、フェルミオンに質量を生じる。このとき、カイラル対称性が自発的に破れる。

以上の様子を以下具体的に見ていくことにする。

11.1 平均場近似と質量生成

NJL 模型の本質的な点は、フェルミオン (クォーク) のあいだにカイラル対称性を満足する引力が働いている、という点である。こうすることで、系はカイラル対称性を満足しながらも、相互作用の結果対称性が自発的に (力学的に) 破れる機構を導入することができる。問題の本質をみるためにはできるだけ簡単な模型を設定をする。そのため、クォーク間相互作用は座標 (x) 空間でデルタ関数型の近接相互作用であるとする。こうして、次のラグランジアンを設定することができる

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}i\partial\psi + \frac{g}{2} \left((\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \right). \quad (11-1)$$

ここで g は質量の逆 2 乗の次元をもつ結合定数である。 $g > 0$ としてこの相互作用は引力である。注意すべきは、このラグランジアンには質量項がないという点である。出発点として質量ゼロのフェルミオン理論になっているのである。QCD との対応では、質量の小さい u, d クォークに対してこの近似は非常に良く成り立っている。

対称性の破れを特徴づける量を、秩序パラメータ (order parameter) といい、ここでは $\bar{\psi}\psi$ の真空期待値である。この量はスカラーなので、線形シグマ模型の σ 中間子の真空期待値に対応する。線形シグマ模型との対応では $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ はパイオンになるので、こちらが真空期待値をもつことはない。

容易にわかるように、 $\bar{\psi}\psi$ が真空期待値を持てば、クォークは質量項を獲得するであろう。より正確には、(11-1) の相互作用のラグランジアンに対して平均場近似を適用し次の置き換えをする：

$$\frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \rightarrow g\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi. \quad (11-2)$$

この式は

$$m = -g\langle\bar{\psi}\psi\rangle \quad (11-3)$$

を示唆している。 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ は $\bar{\psi}\psi$ の真空期待値である。場 ψ をいつものように粒子と反粒子の完全系 (平面波) を用いて展開すると、真空期待値には反粒子の生成消滅演算子の項が寄与する。すなわち、反粒子の仮想的な生成過程が対称性の自発的な破れを引き起こすのである。この期待値は反粒子のすべての運動量状態について和をとるので発散する：これをさけるために、カットオフ Λ を導入して有限な値に正則化する。すなわち (問題 10-1)、

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -2 \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (11-4)$$

この式を理解するために以下の点に注意しよう。まず、因子 $m/\sqrt{p^2 + m^2}$ は $u_p^\dagger u_p = 1$ の様に規格化されたスピノルに対するスカラー期待値 $\bar{u}_p u_p$ である。次に、積分 $d^3p/(2\pi)^3$ は状態数を数えている。その際異なるスピンの2つの状態を数えることで因子2が必要になる。この積分は負のエネルギー状態について和がとられている。 Λ を大きくとればその状態数が増え、すなわち、より多くの(反)クォークが寄与する。最後にスピノル、すなわち展開の基底としては有限質量 m をもったフェルミオンを採用している。これは、自己無撞着 (self consistent) な平均場解を求める際の方法である。摂動展開の観点からは、以下のように解釈できる。図 11.1 に示したように、質量がゼロのフェルミオンを細い線で、質量を獲得したフェルミオンを太い線で表すとす。質量 m は太いフェルミオン線の1ループグラフで表現することができる。これは摂動では、質量ゼロのフェルミオンが無数に相互作用をしているように表現される。結局自己無撞着な平均場に対する方程式は

$$m = 2 \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (11-5)$$

によって与えられる。この方程式を通常ギャップ方程式とよぶ。

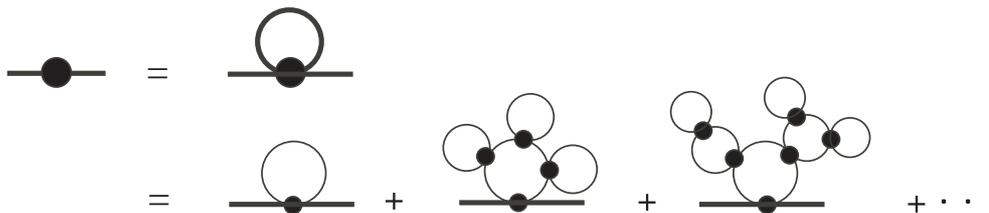


図 11.1: フェルミオンの質量生成を表すファインマン図。大きな黒丸は質量 m 、小さな黒丸は相互作用 g を表す。その結果質量ゼロのフェルミオン (細い線) から有限質量のフェルミオンが生成される (太い線)。

この方程式の解としてはまず、自明な $m = 0$ がある。ところが、ある条件の下で $m \neq 0$ の解が存在し得る。これが対称性の自発的な破れと関係している。この解を探すために、まず (11-5) の右辺の積分を計算してみよう。その結果得られた式の両辺を m で割り算して、次の式を得る：

$$1 = \frac{g}{2\pi^2} \left(\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + m^2} - m^2 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{m} \right). \quad (11-6)$$

この右辺を質量 m の関数としてプロットしたのが図 11.2 の上のグラフである。着目すべき点は、結合定数、もしくはカットオフパラメータ Λ がある程度大きい場合に、この積分量は 1 より大きくなり解が存在するという点である。図では、結合定数 g の小さな値から大きな値に対して典型的な振る舞いを示している。同様の振る舞いは、カットオフ Λ を変

えることによってもみられる。このように、引力の強さがある程度以上強い場合に、あるいはカットオフ Λ がある程度より大きく、より多くの反クォークが関与するときに、対称性が自発的に破れる。その結果得られた有限の質量をクォークの構成質量とよぶ。また、このようにして質量を獲得したクォークを、構成クォークとよび QCD のラグランジアンにあらわれる質量がほとんどゼロのカレントクォーク（もしくは裸のクォーク）と区別している。

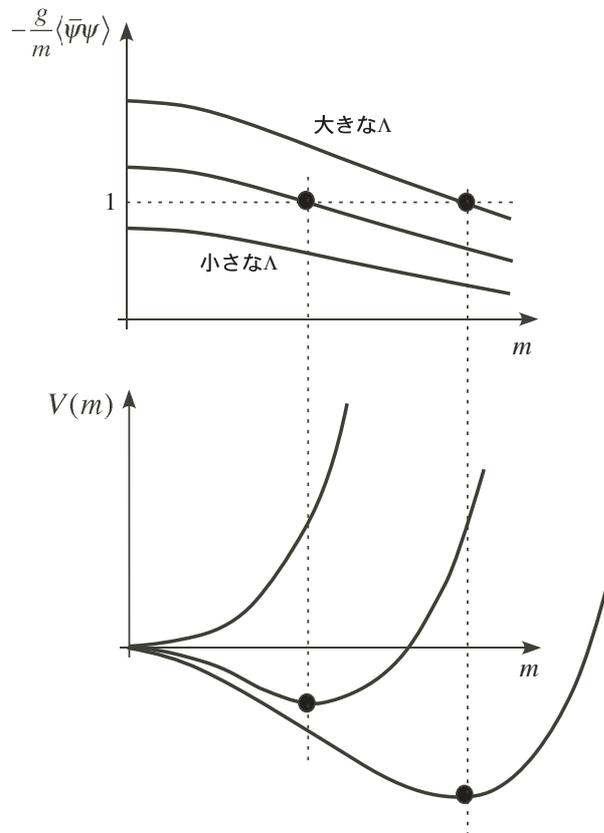


図 11.2: ギャップ方程式とポテンシャル

構成質量 m がゼロでないということは、すなわち式 (11-3) からクォーク・反クォーク対の真空期待値 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ もゼロでないことを意味している。この量は、前節で見たように中間子ではシグマ中間子に対応している。線形シグマ模型ではシグマ中間子の真空期待値が対称性の破れの大きさを示す秩序パラメータとなっていたのに対応して、南部-Jona-Lasinio 模型では $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ がその役割をしている。さらに、この量をカイラリティーの固有状態で書き直してみると $\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L$ となり、この量が真空期待値をとるということは左右のカイラル成分が混ざり合うことを示している。すなわち、そのおのおのが保存するというカ

イラル対称性を破っている。これは真空とそのもとに出現する粒子群の対称性の破れに反映される。

以下ではギャップ方程式の意味をいくつかの例を通して試みる。まず、この式は系の（ポテンシャル）エネルギーの最小値を与える条件になっている。エネルギー（密度）は次のように計算される。まず、ハミルトニアンを次のように変形する

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -i\bar{\psi}\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \\ &= \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 - m\bar{\psi}\psi\end{aligned}\quad (11-7)$$

つぎに、平均場近似のもとで $\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle\bar{\psi}\psi\rangle = -m/g$ の置き換えをする：

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \langle\bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi\rangle + \frac{m^2}{2g} \\ &= -2\int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2} + \frac{m^2}{2g} \equiv V(m)\end{aligned}\quad (11-8)$$

この量を m の関数としてのポテンシャルと定義する。この式を m で微分することによって、実際にギャップ方程式 (11-5) を確かめることができる。

11.2 南部-Goldstone の定理

系のあるチャンネルに引力が十分働くと、そのチャンネルの秩序パラメータが有限な真空期待値をとることができて対称性が自発的に破れる。このとき、質量がゼロの粒子が出現する。これが南部-Goldstone の定理である。このことを南部-Jona-Lasinio 模型で見よう。

対称性が破れているので、クォークは有限の質量 m を獲得している。そこで、相互作用 $(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$ によって束縛されるクォーク・反クォーク対の質量がゼロになり得るかどうかが調べてみることにする。このためにいくつかの異なる方法が考えられるが、ここでは、原子核の多体問題の解法で良く知られた方法を採用することにする。そのために、ラグランジアン (11-1) から導かれるクォーク反クォーク対の「シュレーディンガー方程式」を考えてみる。

まず、ハミルトニアンを自由な部分と相互作用の部分に分ける。自由な部分は、運動量が \vec{p} で相対論的に運動するクォーク（もしくは反クォーク）の運動エネルギーとする

$$H_0 = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\quad (11-9)$$

次に相互作用ポテンシャルをラグランジアン (11-1) から求める。そのために、クォーク反クォーク対が運動量 \vec{p}_1, \vec{p}_2 , $\vec{p} \equiv \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ から \vec{p}'_1, \vec{p}'_2 , $\vec{p}' \equiv \vec{p}'_2 - \vec{p}'_1$ に遷移する際の行列要素を計算すると、

$$\langle q(p'_1)\bar{q}(p'_2)|g(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2|q(p_1)\bar{q}(p_2)\rangle = 4g \quad (11-10)$$

のようになることがわかる。ここで因子 4 は生成消滅演算子の縮約の取り方からくる。相互作用が点状であることを反映して、その強さは運動量空間では運動量の値によらず一定値 g になっている。座標空間では確かに次のデルタ関数型のポテンシャルになっている

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (-4g)e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -4g\delta(\vec{x}). \quad (11-11)$$

従ってクォーク反クォーク対の重心系で、シュレーディンガー方程式を次のように書くことができる

$$\left(2\sqrt{-\vec{\nabla}^2 + m^2} - 4g\delta(\vec{x})\right)\Psi(\vec{x}) = E\Psi(\vec{x}). \quad (11-12)$$

これは、デルタ関数型のポテンシャルを含むシュレーディンガー方程式であるが、3次元の場合にはこの方程式は定義できないことが知られている。デルタ関数型の引力が強すぎて、粒子が落下してしまうからである (問題 3)。意味のある方程式にするためには、点状の相互作用を有限距離の相互作用にかえる必要がある。ここでは、それを運動量空間で行うことにする。こうすることによって、解を解析的に求めることができる。

そこで、まず (11-12) にフーリエ変換を行って運動量空間で書くことにする：

$$2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\Psi(\vec{p}) - 4g \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi(\vec{q}) = E\Psi(\vec{p}). \quad (11-13)$$

この式は運動量表示の積分を含んでいるが、それを離散化し行列表示で書くことにしよう。そのために次の置き換えをする。

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_n \quad (11-14)$$

ここで V は系の体積である。そして、和の上限として適当な大きな値 N (カットオフ) を導入する。ごく大雑把に言って、この最も大きな運動量の値の逆が相互作用の到達距離になっていると解釈できる。

離散化された運動量空間で波動関数を次のように成分表示で書く

$$\Psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11-15)$$

ここで展開係数は規格化条件 $(1/V) \sum_n |a_n|^2 \sim \int d^3p / (2\pi)^3 |\Psi(\vec{p})|^2 = 1$ を満足するものとする。離散運動量のきざみを Δ と書いてシュレーディンガー方程式を書くと次のようになる：

$$\begin{pmatrix} 2m & & & \\ & 2\sqrt{m^2 + \Delta^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} - 4g \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11-16)$$

この式を n 番目の係数について書くと

$$2\sqrt{m^2 + (n\Delta)^2} a_n - \frac{4g}{V} \sum_n a_n = E a_n \quad (11-17)$$

以上の式は、デルタ関数ポテンシャルのシュレーディンガー方程式を（離散的な）運動量空間で表したものになっている。

さて、(11-17) は次のようにして解くことができる。まず、 $K = (1/V) \sum a_n$ を導入して、形式上 a_n を次のように表す：

$$a_n = \frac{4gK}{2\sqrt{(n\Delta)^2 + m^2} - E} \quad (11-18)$$

ところが、 a_n を $(1/V$ をかけて) 足し合わせたものは K であることを使うと、

$$K = \frac{4gK}{V} \sum_n \frac{1}{2\sqrt{(n\Delta)^2 + m^2} - E} \quad (11-19)$$

両辺を K で割って

$$1 = \frac{4g}{V} \sum_n \frac{1}{2\sqrt{(n\Delta)^2 + m^2} - E} \quad (11-20)$$

を得る。これが、この方法の主要な結果である。再び和を積分に置き換え、 $E \rightarrow 0$ とおいてみると、この式はギャップ方程式 (11-5) に他ならない。これはパイオンが質量ゼロの粒子であること、すなわち南部-Goldstone の定理のひとつの表現になっている。

これらの意味をもうすこしみてみよう。そのために、図 11.3 に式 (11.3) の右辺を $f(E)$ と書いて、 E の関数としてプロットした。 $f(E) = 1$ が解である。この図で連続状態は離散化されていることに注意してほしい。 $f(E)$ はしきい値 $2m$ より大きな E の領域で連続無数の発散する極を持つが、この図では離散化された状態が $\sqrt{m^2 + (n\Delta)^2} < E < \sqrt{m^2 + ((n+1)\Delta)^2}$ の間に存在している。一方、 $E < 2m$ の領域では $f(E) = 1$ の解が束縛状態として 1 つ存在することがわかる。問題で考察するように、この束縛状態の係数 a_n

は、特定の n の値に特に強く依存することはない。すなわち束縛状態はいろいろな n の状態がまんべんなく混ざっていると言える。その意味でこの束縛状態は集団状態と呼ばれる。この集団の程度は $E = 0$ の場合に強くみられることがわかる。一方、 $E > 0$ の状態に関して係数 a_n を見てみると、 m 番目の状態に対する係数 $a_n^{(m)}$ に対して、 $m \sim n$ の近傍で特に大きくなっている。特に一つの状態が強く混ざっているので、このような状態を 1 粒子的という。

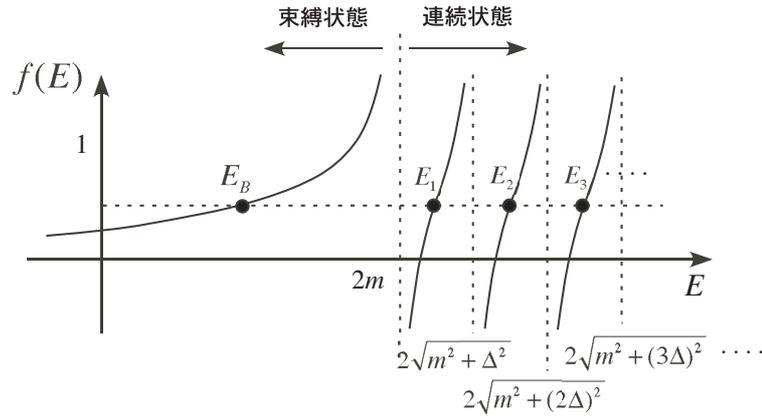


図 11.3: パイオンのシュレーディンガー方程式に対応する関数 $f(E)$

要約

1. 線形シグマ模型の μ^2 の正負をコントロールする微視的な模型として、南部-Jona-Lasinio 模型を導入した
2. クォーク・反クォーク間に働く引力が十分強い場合に、スカラー凝縮 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ がゼロでない期待値をとるような基底状態が実現された。これはカイラル対称性が自発的に破れた相に対応している。
3. 超伝導の BCS 理論と類似のギャップ方程式を、平均場近似のもとで導きその解を運動量空間で求めた。
4. ギャップ方程式の解は、有効ポテンシャルの最小値に対応していることを見た。
5. ギャップ方程式は、一方で質量がゼロのパイオンチャンネルにおけるクォーク・反クォーク対のシュレーディンガー方程式に他ならず、その質量ゼロの解が集団運動

的であることをみた。

問題

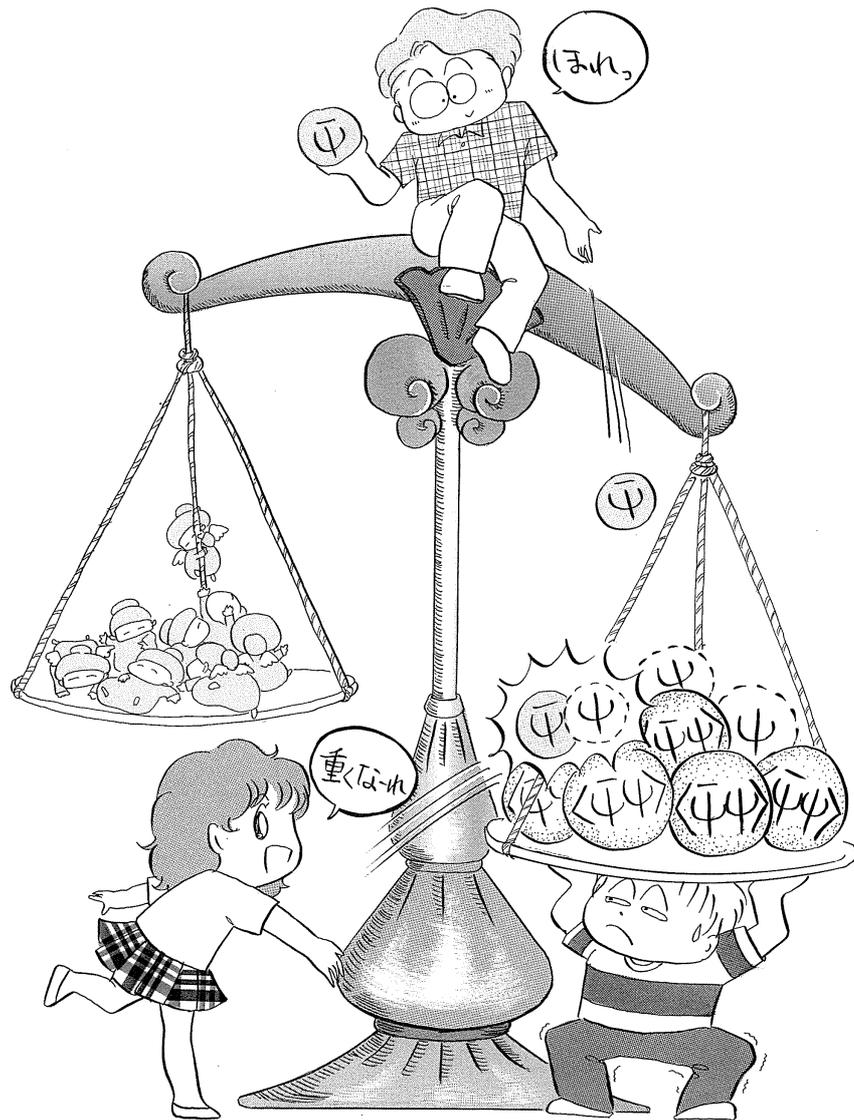
1. 式 (11-4) を導き、 dp 積分を実行し (11-6) を示せ。
2. カットオフを $\Lambda = 600 \text{ MeV}$ として、 $m = 300 \text{ MeV}$ (構成クォークの質量) を得るためには、結合定数 g の値をどうとるべきか。 g は [質量] $^{-2}$ の次元をもつことに注意して、 MeV^{-2} もしくは、 fm^2 の次元で数値を求めよ。
3. あるポテンシャルのもとで運動する量子力学的な粒子に束縛状態が存在するかどうかを、変分原理の方法によって考えてみる。

- 3次元空間で規格化された波動関数を $\varphi(\vec{x})$ と書く: すなわち、 $\int \varphi^*(\vec{x})\varphi(\vec{x}) = 1$. スケールパラメータ a ($\vec{x} \rightarrow a\vec{x}$) を導入しクーロン場のもとでの全エネルギー

$$E(a) = \int d^3x \left(-\frac{1}{2m} \varphi^*(\vec{x}) \nabla^2 \varphi(\vec{x}) - \varphi^*(\vec{x}) \frac{1}{r} \varphi(\vec{x}) \right) \quad (11-21)$$

を a の関数として表せ。 $E(a)$ には a の関数として最小値が存在することを示せ。

- 前問と同様のことを、デルタ関数型の引力ポテンシャル $V(\vec{x}) = -g\delta(\vec{x})$ (g は適当な正定数) に対して行い、この場合、安定な解が存在しないことを示せ。



対称性の破れは均衡の破れ

第12章 原子核におけるカイラル対称性

原子核物理では通常、二核子散乱の実験データを再現するように決めた核子間相互作用を使って原子核の多体系を記述する。核子数が少ない時には多体系をできるだけきっちりと表現できるようなパラメータを多く含む多体系の波動関数を用意して全系のエネルギーができるだけ小さくなるように変分計算を行う。そのようにして得られた計算結果は実験と非常に良く合っている。この様子が図 12.1 に示されている。

一方で核子数の大きな原子核では現象論的にラグランジアンを与えて相対論的平均場模型で計算する。約 10 個くらいのパラメータを用意すると束縛エネルギーや原子核の大きさをうまく表現することが可能である。しかし、この計算は最初からパラメータを導入して原子核の束縛エネルギーを計算しているので、現象論的な模型であると言える。その意味では、もっと微視的なところから原子核を記述することは非常に大事な仕事である。

その意味では上記の少数多体系の計算結果は非常に興味深い (図 12.1)。この計算では質量数が 8 までの原子核について、核子間相互作用を使ってそれらの性質を非常に良く再現できることが示された¹。その際に少し足りない束縛エネルギーを得るために 3 体核力が導入されている。それに付け加えて、この計算で示された重要な結果として、パイオンの相互作用の行列要素を計算すると全引力の 70 ~ 80% の大きさを持っていることが示された。これはパイオンが原子核の構造を作るのに中心的な役割を果たしていることを意味している。

12.1 原子核の線形 σ 模型での記述

前の 4 章を使って、カイラル対称性の基本的な概念を導入した。その際にカイラル対称性を持つラグランジアンとして線形シグマ模型を導入した。パイオンはカイラル対称性の自発的破れから生じる南部-Goldstone 粒子であると考えれば線形シグマ模型を使って原子核を記述する試みは非常に自然である。

¹最近では質量数がさらに大きな原子核についても、同様の研究が進められている。

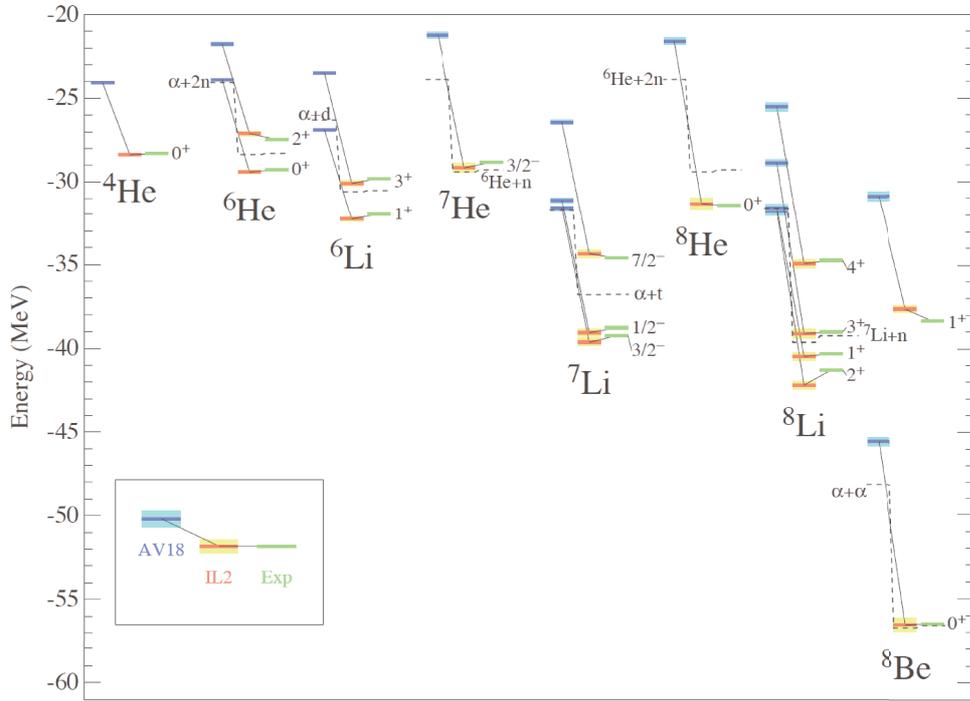


図 12.1: 核子数が8までの原子核の変分計算結果。一番左が2体力だけで計算した結果。真ん中が三体力まで考慮した計算結果で右端がそれぞれの原子核の実験によるスペクトルである。

線形 σ モデルのラグランジアンは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma &= \bar{\psi}(i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi))\psi \\ &+ \frac{1}{2}((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \quad (12-1)$$

このラグランジアンには μ^2, λ, g の3つのパラメータが含まれる。さらにカイラル対称性を満足している。この対称性が自発的に破れて質量がゼロのパイオンが出現することなどから、ハドロンの性質を知ることでそれぞれのパラメータを決定することができる。その上でこれまでと同じ方法で原子核を平均場近似で記述することを考える。

これまで使っていたシグマ・オメガモデルとの比較をするとオメガ中間子の導入をする必要がある。実際にはパイオンは質量を持っているので、そのための補正を行うと次のラグランジアンが得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma\omega} &= \bar{\psi}(i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi) - g_\omega\omega_\mu\gamma^\mu)\psi \\ &+ \frac{1}{2}((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2) - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 + \epsilon\sigma \\ &- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tilde{g}_\omega\omega_\mu\omega^\mu(\sigma^2 + \pi^2) \end{aligned} \quad (12-2)$$

このラグランジアンはほとんどすべてのパラメータがハドロンのレベルで決定できる。原子核を扱うということであえて、二つのパラメータを自由に変えることにする。それはシグマ中間子の質量とオメガ中間子と核子の結合定数である。

このラグランジアンがどのような意味を持つのかを知る意味で、まずは核物質の計算を行う。そのためにはそれぞれの中間子場を、次の平均場で置き換える： $\langle\sigma\rangle\equiv\sigma$, $\langle\omega_\mu\rangle\equiv\omega\delta_{\mu 0}$, $\langle\pi^a\rangle=0$ 。その上で平均場 σ と ω で変分をとることにより核物質の性質を求める。この際に飽和性が満足されるようにパラメータの値を決定する。その結果を図12.2に示した。この図からわかるように線形シグマ模型を使って核物質の性質を再現することが可能である。ただし、現象論的に決めたパラメータを使った核物質の性質と比べると、非圧縮率が大きく出過ぎるという問題がある。

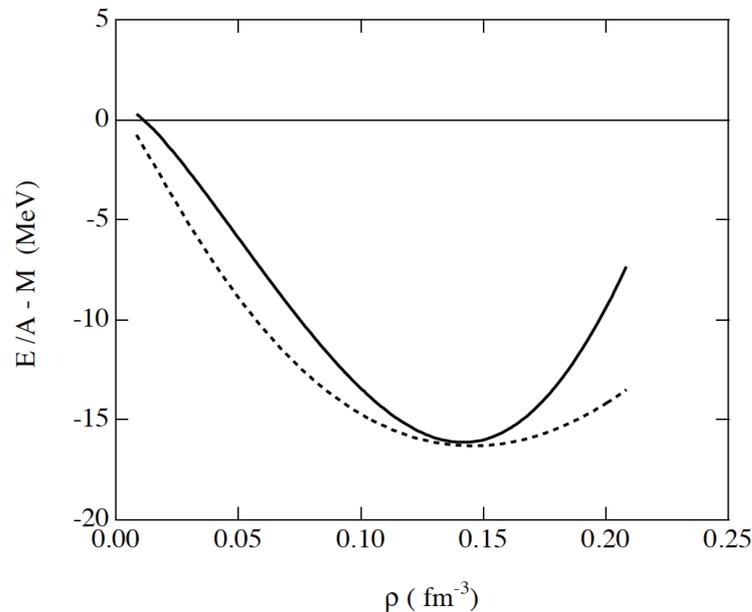


図 12.2: オメガ中間子を含んだ線形シグマ模型による核物質の計算結果 (実線)。現象論的な σ - ω 模型の結果を点線で示してある。

さらに、現象論的に得た核物質の性質と比べるためにスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルをそれぞれにプロットする。この際に比較のためにこれまでの現象論的なポテンシャルとの比較を行う。興味深いのは、それぞれに密度と共に増加する傾向は共通だがその値は現象論的な場合の約半分くらいである。この結果の意味するところは線形シグマ模型で計算した場合にはスピン軌道力が実験から必要な半分くらいしか出せないということの意味している。

これらの核物質の性質を得た上で、原子核を作ってみたい。この際に原子核の記述をす

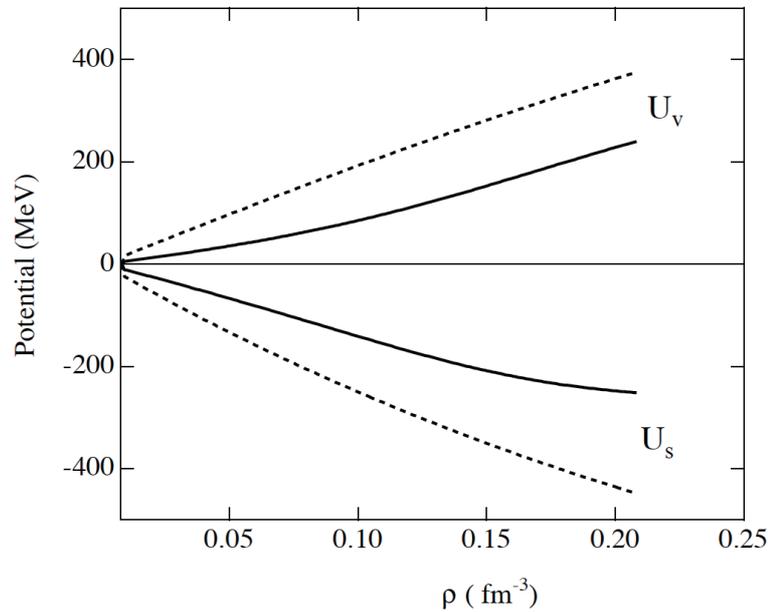


図 12.3: 核物質におけるスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル (実線)。現象論的な σ - ω 模型の結果を点線で示してある。

る時にパイオンの平均場を有限にしたい。この試みは非常に興味深い。すなわち、もし核子がパリティが保存する量子状態にあるとするとパイオンの平均場は完全にゼロになる。しかし、もしパイオンの平均場が有限ならば核子のパリティが破れるという結果になる。もちろん、もし核子のパリティが破れるとパイオンの平均場は有限になることができる。

この計算をさらに続けていくことはできるが、この本の内容をむやみに複雑にする恐れがある。この場合の数値計算は非常に難しいものになる。即ち、パリティを破った核子の波動関数を使う必要があるということは、それで作った原子核の波動関数はパリティを破ったものになる。原子核物理ではこの場合には、その破れたパリティを射影するというを行う。これは非常に複雑だが、現在の計算機の能力を使うと十分に数値計算が可能である。

要約

1. 原子核を記述する模型としてカイラル対称性を持ったラグランジアンを採用する。

2. 軽い原子核を記述する方法が完成した。
3. パイオンが重要な役割をしていることが分かった。
4. 現在はパイオンを陽に取り扱うことができる平均場理論を構築しつつある。

問題

1. (12-2) のラグランジアンで σ が真空中で $\langle\sigma\rangle = f_\pi = 93 \text{ MeV}$ の平均場を得るとすると、核子、パイオン、シグマ中間子、オメガ中間子の質量がそれぞれ、 $m = gf_\pi$, $m_\sigma^2 = 2\lambda f_\pi^2$, $m_\pi^2 = \epsilon/f_\pi^2$, $m_\omega^2 = \tilde{g}_\omega f_\pi^2$ となることを示せ。
2. 核子、パイオン、シグマ中間子、オメガ中間子の質量がそれぞれ、 $m = 938 \text{ MeV}$, $m_\sigma = 550 \text{ MeV}$, $m_\pi = 139 \text{ MeV}$, $m_\omega = 780 \text{ MeV}$ のときに、ラグランジアンのパラメータ $g, \mu, \lambda, \epsilon, \tilde{g}_\omega$ がどのような値になるかを計算せよ。



核子に隠されたお宝ついに発見

第13章 結：原子核と量子色力学

創立間もない大阪帝国大学の理学部で、湯川は原子核に働く力を研究していた。重力以外に電磁気力しか知られていない時期に、原子核の大きさ程度の距離でしか働かない力を媒介する粒子（ボソン）は、陽子と電子の中間の重さを持つ必要があった。その後、宇宙線の中に見つかった中間子はパイオンと名づけられた。このパイオンは擬スカラー粒子であり、核子とはスピン相互作用をする。すなわちパイオンが2核子間を交換される際には、核子のスピンをフリップさせる。このことから、パイオン交換による力は核子のスピンの依存した力となる。さらに、核子の電荷状態にも依存する。このパイオンと核子の相互作用の理論は、パイオンを擬スカラーでアイソスピン1の粒子として、また核子をアイソスピン1/2の粒子として、湯川理論が出て後すぐに定式化された。しかし、このパイオンがもたらす力を扱って原子核を作る試みは、近年まで行われなかった。最近までは原子核物理はパイオンを直接扱うことなく発展してきた。即ち、原子核の構造は殻模型的であり、シェル内の核子に働く相互作用を原子核の低い励起状態のスペクトルを再現する有効相互作用を導入することにより記述した。さらに加速器実験とあいまって原子核の構造に対する理解が深まっていった。この章ではパイオンが量子色力学とどのように関係するのかを記述したい。

13.1 カイラル対称性の申し子であるパイオン

量子色力学ではクォークの質量は核子（陽子・中性子）の質量に比べて無視できるほどに小さい。従って、カイラル対称性が近似的に成り立っている。さらに、パイオンの質量も陽子の質量と比べると圧倒的に小さい。この近似的に成り立っているカイラル対称性がグルオンの非摂動的な働きにより自発的に破れるとクォークが大きな質量を持ち、その一方で、パイオンはほぼゼロに近い質量を持つことになる（南部-Goldstone ボソン）。この事実と最初から少しカイラル対称性が破れていることから実験によるパイオンの質量を説明できる。核子が大きな質量を持っているのは、内部構造を形成するクォークが大きな質量を獲得したことによると考えられている。

13.2 パイオンの原子核における働き

パイオンは原子核内で重要な役割を果たしている。陽子と中性子からなる重水素が束縛するのはパイオンの交換力による。最近では核子数が10くらいまでの原子核に対して第一原理の計算が行われ、3体力までを含むハミルトニアンにより、原子核の基底状態と低い励起状態はほぼ完全に再現されることが示された。さらには、パイオンは全体のほぼ80%の引力を与えることがわかった。パイオンの交換力は非相対論的には近似的にテンソル力で表現される。最近はこのテンソル力の働きの重要性が各所で指摘されている。 ${}^4\text{He}$ の構造は単純な殻模型的な構造ではなくテンソル力が重要な役割を果たしている。その証拠が ${}^4\text{He}$ と中性子の散乱の位相差に現れている。つまりスピン軌道力に対応する効果を生み出すことが示されている。最近では ${}^{11}\text{Li}$ のハロー構造もテンソル力が重要な働きをしており、中性子二つが角運動量が0の状態に入っている構造が基底状態に50%の寄与をしていることが話題になっている。

原子核のように核子やパイオンの運動エネルギーが10MeV位の低エネルギースケールではクォークは核子の中に閉じ込められておりクォークは個々には原子核の構造に影響を与えない。むしろ、核子とパイオンを扱うラグランジアンで核子の多体系である原子核を表現することが適当である。最近になって、核子とパイオンの相互作用を与えるカイラル対称性をもったゲルマン・レビーのラグランジアンを使って原子核を作る試みがなされるようになった。質量が40~60位の中性子数と陽子数が等しい原子核の計算を行うと、原子核を作ることができることがわかった。さらには、パイオンは必要なスピン軌道力の半分くらいは出すことが可能であることがわかった。その意味では原子核のマジック数を出すのにパイオンは重要な役目を果たしている可能性も高い。

湯川理論は1934年に原子核を構成する理論として提唱されている。しかし、その性質がアイソベクトルで擬スカラー粒子であることによりその取り扱いが難しく、直接原子核を構成する議論は最近までなかった。ハドロン物理におけるパイオンの重要性や原子核物理でのテンソル力（パイオン交換力）の研究からやっと多くの研究者が原子核でのパイオンの役割を直接扱う研究が始まった。まさしく、湯川理論が湯川生誕100年の今戻ってきた様相を呈している。

13.3 まとめ

原子核は核子の集合体である。核子に働く力は湯川によって導入されたパイオンが主要な役割を果たしている。そのパイオンは擬スカラー粒子であり、核子とはスピン相互作用

する。その取り扱い是非常に難しくこれまではその正確な扱いはされてはこなかった。

原子核物理はメイヤーとヤンセンの殻模型から始まったと言ってよい。そこでは原子核のマジック数を再現するために非常に強いスピン軌道力を現象論的に導入することにより、原子核の基本的な性質が出るようにした。殻模型は最初から現象論であったために実験結果を使って、ハミルトニアンを決定することにより、原子核の細部にわたって記述できる模型を作ることが可能であった。

この本では強いスピン軌道力を与える模型として相対論的平均場模型を使った。一般的には非常に強く引力を与えるスカラー交換力と非常に強く強い斥力を与えるベクトル交換力を導入することにより、50MeV位の引力と、強いスピン軌道力を与える模型を作ることに成功した。しかしこの場合でもパラメータを導入することによって原子核の基底状態の性質を再現している。その意味では現象論的な記述と言える。

一方で、強い相互作用は量子色力学がその基礎を与える。核子の内部構造を与えるクォークは核子に比べて非常に軽く、近似的にカイラル対称性は成り立っている。その自発的破れにより、クォークが大きな質量を持ち、それに応じて核子が大きな質量を持つ。それと同時にパイオンが軽い中間子としてカイラル対称性の破れを特徴づける中間子として出現する。

この本ではさらに、この対称性の紹介を行った。カイラル対称性が成り立つ核子と中間子のラグランジアンを導入した。このカイラル対称性が自発的に破れた場合のパイオンの出現に着いても詳細に記述した。最後の試みとして、このカイラル対称性を持つラグランジアンを使って、原子核を作る試みについても議論した。

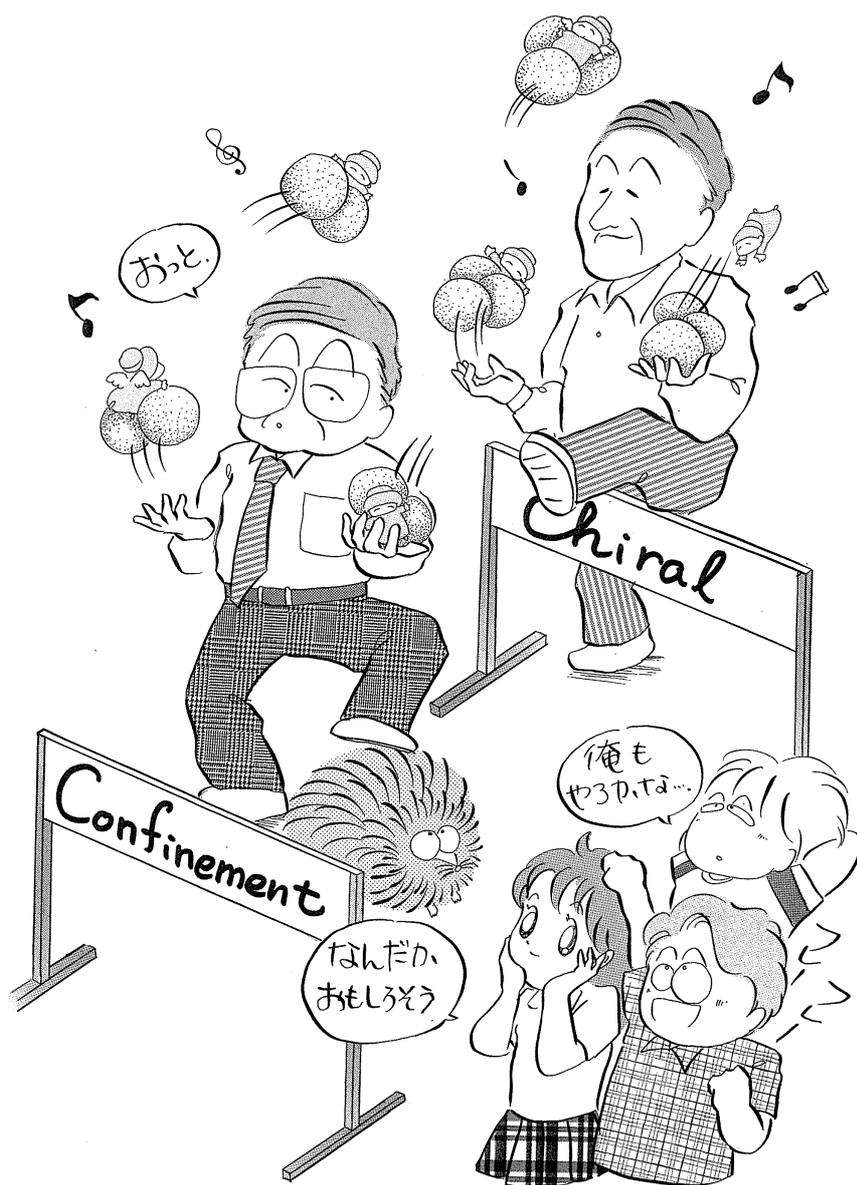
この本で紹介した内容は非常に新しい最近の研究の紹介である。通常の原子核の教科書には議論されていないことを多く書いた。さらに問題も多く用意した。この本で、最前線の研究がどのように進んでいるかの一端が勉強できれば嬉しく思う。

要約

1. 原子核を構成する核子はクォークから出来ている。
2. クォークを記述する力学は量子色力学である。
3. 量子色力学ではカイラル対称性が近似的に成り立っている。
4. カイラル対称性が自発的に破れることによりクォークが質量を獲得する。

5. クォークから出来ている核子もクォークが質量を得ることにより、大きな質量を得る。
6. カイラル対称性の破れに伴って軽いパイオンが出現する。
7. パイオンは原子核を構成するのに重要な役割を担っている。

問題



楽しい原子核探検の旅