レポート問題

　以下の問題は授業で計算しなかった、しかし内容を理解するには重要、そのためには各自が自ら確認するべき問題です。たいていが基本的なものなので、できるだけ多くの問題を手がけてください。

必須問題：14, 16, 20, 21。他は自由にできる限り。

１　Weyl 表示のガンマ行列を求めよ。

２　Weyl 表示でラグランジアンが

$$L = i\psi_R^\dagger(\partial_0 + \sigma\cdot\nabla)\psi_R + i\psi_L^\dagger(\partial_0 - \sigma\cdot\nabla)\psi_L + m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L)$$

と書けることを示せ。

３　核子のラグランジアン $L = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi$ は、位相変換 $\psi \to e^{i\alpha}\psi$ に対して不変である。対応するカレントが $J^\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ であることを示せ。

４　このカレントを Weyl 表示で表すと、R と L の和になることを示せ。

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L \equiv R^\mu + L^\mu$$

５　$m = 0$ ならば、ψ_R と ψ_L のそれぞれに対する位相変換 $\psi_{R,L} \to \exp(i\alpha_{R,L})\psi_{R,L}$ のもとで、R と L のラグランジアンが不変であること、したがって、それぞれに対するカレント R^μ と L^μ がおのおの独立に保存すること、$\partial_\mu R^\mu = 0$, $\partial_\mu L^\mu = 0$、を示せ。

６　σ、ω 粒子が核子と結合する湯川結合を考える。非相対論的な近似の主要項はいずれも、スピンに依存しない（スカラー）結合になることを示せ。

$$N(p) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma\cdot p/(E+M) \end{pmatrix}\chi$$

（χ は２成分スピノル）を用いるとよい。

７　非相対論的な近似の２番目の項から、スピン軌道力が出てくることを示せ。

８　核子に働く力が、スカラー σ 粒子を交換する場合には引力、ベクトル ω 粒子を交換する場合には斥力になることを示せ。

９　次の５つの双１次形式、$\bar{\psi}\psi, i\bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$、はすべて実の量であることを示せ。

１０　以下の式を示せ

$$\psi_l^\dagger(\sigma + i\pi)\psi_r + \psi_r^\dagger(\sigma - i\pi)\psi_l = \bar{\psi}(\sigma + i\pi\gamma_5)\psi$$

１１　ベクトル $(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}i\gamma_5\psi)$ がカイラル変換でどのような変換を受けるか求めよ。

１２　線形 σ 模型の、核子と σ π の相互作用の項は、カイラル変換のもとで同じように変換する２つのベクトルの内積の形をしていることを示せ。

１３　運動項$\bar{\psi} i\partial\psi$はカイラル不変であることを示せ

１４　以下のラグランジアンから、線形σ模型の運動方程式（ψ, σ, πの連立）を求めよ。

$$L_\sigma = \bar{\psi}\left(i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi)\right)\psi + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2$$
$$-\frac{\mu^2}{2}(\sigma^2+\pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\pi^2)^2$$

１５　カイラルサークル上の任意の点$(\sigma,\pi)=(a,b),\ a^2+b^2=f_\pi^2$は、カイラル変換によって、$(\sigma,\pi)=(f_\pi,0)$に変換されることを理解せよ。

１６　ポテンシャル$V(\sigma,\pi)=\dfrac{\mu^2}{2}(\sigma^2+\pi^2)+\dfrac{\lambda}{4}(\sigma^2+\pi^2)^2$を真空$(\sigma,\pi)=(f_\pi\ ,\ 0)$の周りで展開し

・σ^2の係数を読み取って、σの質量が$m_\sigma{}^2 = 2\lambda f_\pi{}^2$
・π^2の項がないこと、したがってπの質量がゼロ
・核子の質量が$M = g f_\pi$

となることを示せ。

１７　右・左カレント

$$R_\mu = \psi_R^\dagger\gamma_\mu\psi_R - \frac{1}{2}\left(\sigma\partial_\mu\pi - \pi\partial_\mu\sigma\right)、L_\mu = \psi_L^\dagger\gamma_\mu\psi_L + \frac{1}{2}\left(\sigma\partial_\mu\pi - \pi\partial_\mu\sigma\right)$$

をネーターの定理を使って導出せよ。

１８　ラグランジアンが$L=\bar{\psi}(i\partial - M)\psi$で与えられる自由核子の場合、運動方程式を使って、Vector カレントは保存するが、axial vector カレントは保存しないことを示せ。

$$\partial_\mu V^\mu = 0\ ,\ \partial_\mu A^\mu \neq 0$$

１９　線形σ模型の運動方程式を使って、Vector および axial vector カレントのいずれもが保存することを示せ。

２０　線形σ模型の３つのパラメータg、μ、λを、核子の質量$M=938MeV$、σの質量$m_\sigma \sim 600MeV$、πの崩壊定数$f_\pi = 93MeV$を用いて決定せよ。

２１　前問の数値を使って、ポテンシャルの原点での値（単位体積 1 fm^3 あたりのエネルギーMeV）を計算せよ。