

相対論的多体系としての原子核

相対論的平均場理論とカイラル対称性

土岐 博、 保坂 淳

大阪大学 核物理研究センター

目次

序章 強い相互作用をする系の世界

第一章 原子核の常識

第二章 マジック数とスピン軌道力

第三章 相対論的量子力学方程式

第四章 場の理論

第五章 原子核のシグマ・オメガモデル

第六章 平均場近似

第七章 核物質の性質

第八章 中性子星と超新星爆発

第九章 原子核の構造

第十章 カイラル対称性

第十一章 線形シグマモデル

第十二章 原子核におけるカイラル対称性

第十三章 まとめ

序：強い相互作用する系の世界

現在ナノテクノロジー・ナノバイオロジーが騒がれている。ナノは10オングストローム(\AA)であり、1 \AA は原子の大きさなので、我々は現在原子1000個の物質のコントロールを目指していると言える。原子としては約100種類が存在している。その原子を裏で支えているのは原子核である。原子核は陽子と中性子で出来ており、その中でも陽子が電荷を持っていることから、原子核の中の陽子の数が原子の中の電子の数を決定している。原子の中にある原子核はどんな性質を持っているのであろうか。原子核はどのように作られたのであろうか。原子核は我々が自由にコントロールできるのであろうか。これらの質問に答えるのがこの本の目的である。

原子を反応させるのに必要なエネルギーは1電子ボルト (1 eV^1) 程度であるのに対して、原子核を反応させるのに必要なエネルギーはメガ電子ボルト (MeV) の大きさになる。これらのエネルギーは温度に換算すると、原子の場合には1万度くらいだが、原子核の場合は 10^{10} 度くらいで人間の力では到達が不可能である。しかし、太陽は我々地球に住む生物のために核融合反応を使ってエネルギーを作り出し、そのエネルギーを供給してくれている。このエネルギーは非常に大きいので、いくら原子核を理解しても、それを加工することは出来ないであろう。私はこの事実が原子核や素粒子の研究者をして謙虚に自然に耳を傾ける気持ちにさせてくれる理由になっていると思う。だからこそ、自然が与えてくれる情報に対して、総合的に自然を理解する機会を与えてくれるところが魅力であると思っている。

陽子と中性子の質量はほぼ同じであり、違いがあるのは陽子が電荷を持っていることだけで同種の粒子と考えられている。これらの粒子は原子核を構成しているので総称して核子と呼ぶ。これらの核子が集まって原子核を構成することになるが、それは当然これらの粒子が相互作用していることによる。つまり、核子はお互いに相互作用しており集まるほうが安定であることによる。その原子核を作り出す相互作用を強い相互作用と呼ぶ。この教科書では原子核の性質をまずは理解することから初めて、それを説明するのに何がキーポイントになっているかを理解する。次にはそれを記述する方法を説明する。その上で、強い相互作用の本質を理解することに勤め、その上で新しい原子核の真の姿を導く。

¹1電子ボルト = 1 electron volt (eV) は、1つの電子を1ボルトの電位差で加速させたときに得るエネルギーであり、1 eV と書く。ジュールとは $1\text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{ J}$ の関係にある。

1 原子核の常識

原子核は原子の中心にあり陽子と中性子で出来ている。大きさは $(1 - 6) \times 10^{-15}$ m くらいでその大きさを表すのにフェルミ (fm) の単位を使う。1 fm は 10^{-15} m である。原子の大きさが1 オングストローム ($1\text{\AA} = 10^{-10}$ m) なのでいかに小さいかがわかるであろう。

原子核のようなミクロの世界と我々の世界を結びつける数字はアボガドロ数である。アボガドロ数は 6×10^{23} である。水素原子をアボガドロ数集めると 1g であるので、原子ひとつの重さは 1g をアボガドロ数で割ったくらいの数字になり、いかに我々の日常から見ればちっぽけなものかが分かるであろう。陽子はそれでも素粒子の中では重い部類に属しておりバリオン (重粒子) と呼ばれる粒子の種族のひとつである。

一方原子核の周りを回って原子を構成している電子はもっと軽く陽子の約 2000 分の 1 の重さでレプトン (軽粒子) の一種である。原子核の一方の構成粒子である中性子は陽子とほぼ同じ重さを持っておりバリオンの一種である。陽子と中性子は原子核を構成する粒子なので総称して核子と呼ばれる。

この章では原子核の基本的な性質を原子核の常識として列挙し、その定性的な説明を与える。原子核を応用に使う研究者は、これらの知識だけは知っておいてもらいたい。

1.1 原子核の質量

陽子の数 Z と中性子の数 N で出来ている原子核の質量を $M(Z, N)$ と書く。核子の質量を、陽子については M_p 、中性子については M_n と書くことにする。質量に光速 c の 2 乗を掛けるとエネルギーの単位になる。核子は原子核を構成するほうが安定なので、そのエネルギーを束縛エネルギーと呼び、 $B(Z, N)$ と書くことにすると、これらの物理量の関係は次のように書ける：

$$M(Z, N)c^2 = ZM_p c^2 + NM_n c^2 - B(Z, N). \quad (1)$$

原子核は複数の陽子と中性子で構成されているが、それぞれの核子数 ($A = Z + N$) の中で一番束縛エネルギーが大きな原子核が存在する。まずは原子核を理解するための常識として束縛エネルギーを質量数で割った量、核子あたりの束縛エネルギー B/A を核子数の関数で図にしたものが図 1 に示されている。

原子核の常識としてまず覚えてほしいのは、核子あたりの束縛エネルギーは約 8 MeV であることである。核子の質量に c^2 を書けた数字は 940 MeV であることを考えると質量の約 1% の束縛エネルギーを持っている。次には B/A は質量数が小さいところではほぼ単調に増加し $A = 54$ で最大になり、さらに質量数が増えていくと単調に減少しているこ

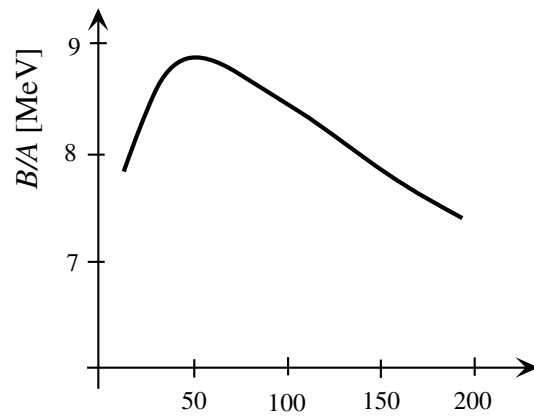


Figure 1: 核子 1 個あたりの束縛エネルギーと核子数との関係。

とである。 $A = 54$ の一番安定な原子核は ^{54}Fe であり、すべての原子核は ^{54}Fe になるほうが安定であるということをこの図は示している。何故このようになるのかは次のように考えるとわかる。核子は強い相互作用の観点からはより多くの核子が集まるほうがエネルギーを得する。一方で、陽子は電荷を持っているので、電磁相互作用の斥力のためにたくさんの核子が集まるとクーロンの斥力が無視できなくなり、重くなることによりエネルギーを損する。この 2 つの性質が競合して ^{54}Fe がもっとも安定な原子核になる。

原子核を応用する立場の人はこの性質を知っていることで十分であろう。原子核からエネルギーを取り出すには鉄までの核を融合させて鉄に近づけることによりエネルギーを得ることが出来る。これを核融合という。核融合を起こさせるにはクーロンの障壁を超える必要がある。現在では人口的には出来なくて星が重力の助けを借りて、星の活動の中でこの核エネルギーを使うことにより星は進化し、鉄に向かって融合を続ける。鉄より重い原子核は逆に分裂してより鉄に近づこうとする。これを核分裂という。この場合には中性子を思い原子核に吸収させることによって、核分裂を引き起こすことが可能になる。

もう一つの原子核の常識は原子核の中での核子密度である。原子核内の核子の密度を異なる原子核でプロットすると図 1 - 2 のようになる。特徴的なことは原子核の中心の所の密度は原子核を変えても一定であることで、その値は

$$\rho_0 \sim 0.17\text{fm}^{-3} \quad (2)$$

である。したがって、原子核の半径は

$$R \sim 1.2A^{1/3} \quad (3)$$

となり、核子数の $1/3$ 乗で増えていく。この事実は興味深い帰結を得る。すなわち、核子数を無限大にしても、中心部の核子密度は (2) となることであり、核子あたりの束縛エネルギーは約 16 MeV になることを意味している。

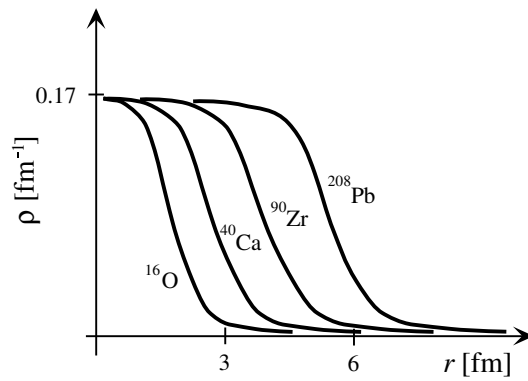


Figure 2: 質量数の異なる原子核の密度を、中心からの距離 r の関数としてプロットした定性的な図。

問題 陽子数が Z 、中性子数が N の原子核の束縛エネルギー $B(Z, N)$ は、質量公式によって近似的に

$$B(Z, N) = aA - bA^{2/3} - cZ^2A^{-1/3}, \quad (4)$$

のように与えられる。ただし $A = Z + N$ である。 $A = 54, Z = 26$ で $B = 9999$ MeV、および $A = 208, Z = 82$ で $B = 9999$ MeV として質量の公式の常数 a, b, c を求めよ。

2 マジック数とスピン軌道力

2.1 マジック数

キューリー (Cury) のラジウムの発見以来、原子核 (原子) から各種の粒子 (アルファ線、ベータ線、ガンマ線) が放出されていることが分かっていた。原子核の質量についてもかなりの情報が得られていた。1934年に湯川 (Hideki Yukawa) の中間子論も提案されてはいたが、しかし、原子核をどのように記述するべきかの手がかりはなかった。そんな中で1949年にメイヤーとヤンセンが原子核のシェルモデル (殻模型、shell model) を提案した。現在でほぼ50年の歴史を持つ原子核物理はこのシェルモデルから始まったと考えられている。そのきっかけとなったのが原子核のマジック数である。

マジック数を理解するために、まず初めに原子の場合を議論する。原子はその中心に陽電荷を持つ重い原子核から生じるクーロン力により、電子が束縛されている系であると考えられている (図 3)。原子から一つの電子を取り出すのに必要なエネルギー (イオン化エネルギー) を原子数の関数でプロットしたものを図 4に示す。この図から伺えるのは He から電子を取り出すのに大きなエネルギーが必要だが、次の Li から電子を取り出すのに

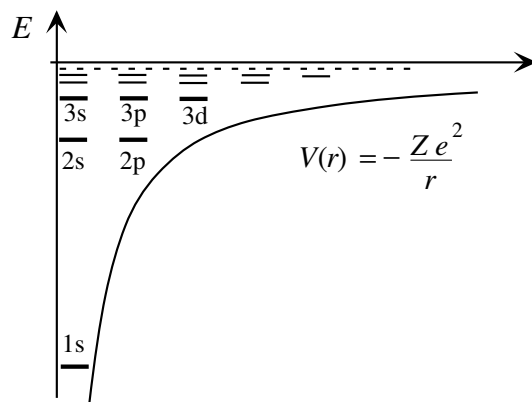


Figure 3: クーロンポテンシャル内で運動する粒子のエネルギー準位

Figure 4: 原子のイオン化エネルギー

はあまり大きなエネルギーを必要としない。このようにイオン化エネルギーが大きくなっている原子は Ne, Ar, Xe, と化学的に非常に安定な希ガスになっている。即ち、電子の数が 2, 10, 36, ... の所でイオン化エネルギーが大きくなっている。この数を原子のマジック数とよぶ。この現象が何故起こるのかに答えを与えるのが量子力学である。

大きな電荷を中心を持つ原子の中での電子の運動はクーロン力ポテンシャル $V(r) = -Ze^2/r$ のもとでの、シュレーディンガー (Schrödinger) 方程式を解くことにより記述される：

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}), \quad (5)$$

ここで、 $\psi(\vec{x})$ は電子の定常状態の波動関数、 $r = |\vec{x}|$ である。この方程式を解くとエネルギーは $E = a/N^2$ (a は定数) と与えられる。このとき N は $N = n + 1$ で与えられる整数で与えられることが量子力学によって知られている。この際に n はノード量子数で正の整数の値 ($n = 1, 2, \dots$) をとる。 l は軌道核運動量と呼ばれ、 $l = 0, 1, 2, \dots$ という整数を取る。さらに一つの角運動量数 l には、 m でラベルされる量子状態量子状態が $2l + 1$ 個存在する。さらにそれぞれの状態にはスピンの上向きと下向きの 2 つの量子状態がある。したがって、原子の場合の 1 電子状態は図 2 のようになることが分かる。さらにはそれぞれの

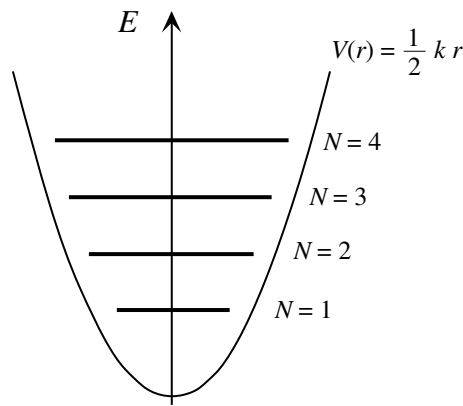


Figure 5: 調和振動子ポテンシャル内で運動する粒子のエネルギー準位

状態に下から電子を詰めていくとすると、間が開いている所までには2個の電子、次の開いているところまでには10個の電子を入れることが可能である。すなわち、2個まで詰めると次の粒子を入れるにはもう一つ上のエネルギー状態に電子を入れる必要がでてくる。このように1粒子のエネルギー順位がはっきりと存在するとマジック数が理解できる。

原子核の場合はどのようなになっているのか。イオン化エネルギーに対応する物理量は陽子や中性子の分離エネルギーである。中性子の分離エネルギーを図に示す。原子の場合に比べて、それほどはっきりとはしていないが、核子数が2, 8, 20, 28, 50, 82というところで分離エネルギーが最大になっている。これらの数字を原子核のマジック数とよぶ。この数字がどのように出てくるか考えてみよう。そのために3次元の調和振動子の中に核子が運動していると仮定してみよう。その場合のシュレーディンガー方程式はこのようにかける。

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{1}{2} k r^2 \right) \psi(\vec{x}) = E \psi(\vec{x}), \quad (6)$$

この際のエネルギーは $E = \hbar \omega (N + 3/2)$ 、 $\omega = \sqrt{k/m}$ である。また $N = 2n + l$ であり、ノード量子数は $(n = 0, 1, 2, \dots)$ という整数値をとり、また、軌道核運動量は水素原子の場合と同じく $l = 0, 1, 2, \dots$ という整数を取る。電子の場合と同じようにエネルギー順位をプロットすると次の図のようになる。(図) この場合には図に示すように2, 8, 20, 40, 70でマジック数が現れる。実験との比較では20までは一致している。しかし、28, 50は違っている。20の上に8個詰める、40の上に10個埋める、70の上に12個詰めることが出来るエネルギー状態を作ることが出来れば実験で得られているマジック数を再現することが可能になる。数字の8, 10, 12は二つずつ増えていく規則性がある。

2.2 強いスピン軌道力

この二つずつ増える数字はどのようにすれば出てくるのであろうか。核子はフェルミオンでスピンを持っている。そのスピン(自転)と軌道回転運動(公転)が相互作用すれば、スピン軌道力が出てくる。その相互作用ポテンシャルは次のように書ける。

$$V_{ls} = b\vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (7)$$

ここで、 b は場所に依存したポテンシャル関数である。スピンを \vec{s} とし軌道角運動量を \vec{l} とすると、 \vec{s} と \vec{l} を足した物理量を全角運動量と呼び、 \vec{j} と書く。その時、 $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ の j は $\vec{l} \cdot \vec{s}$ と交換する。したがって、 $\vec{l} \cdot \vec{s}$ の相互作用のもとで j は良い量子数、すなわち運動の保存量であることが分かる。そこで $\vec{l} \cdot \vec{s}$ の期待値を書くと

$$\langle (ls)jm | \vec{l} \cdot \vec{s} | (ls)jm \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) \right). \quad (8)$$

この式で $l = 3$, $j = 7/2$ の7の場合にはその軌道の中に $2j + 1$ 個の量子状態があるので8個の核子を入れることが可能になる。したがって、このスピン軌道力があり、高いほうの j の状態のエネルギーを下げるように相互作用の強さを選ぶと20 + 8で28のマジック数を得ることが可能になる。

この考えを推し進めると $l = 4$ で $j = 9/2$ を採用すると10という数字を作ることが出来、 $40 + 10 = 50$ のマジック数を作ることが出来る。このように考えると次のようなハミルトニアンを採用すると原子核のマジック数を再現できるモデルを作ることが可能であろう。

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k r^2 + b\vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (9)$$

この期待値は次のように書くことが出来る。

$$\langle (ls)jm | H | (ls)jm \rangle = A \left(N + \frac{3}{2} \right) + \frac{b}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) \right). \quad (10)$$

この式の中に適当な数字を導入すると図3にあるようなエネルギー順位を得、その結果実験で要請するマジック数を得ることが出来る。

3 相対論的量子力学方程式

原子核のマジック数を説明するためには強いスピン軌道力を導入することが必要であった。そこでどのように考えればスピン軌道力を無理なく理論に導入できるかを議論したい。そのために最終的には相対論的な量子力学の方程式を導出する。

シュレーディンガー方程式

古典的には相互作用が $V(r)$ で与えられている場合のハミルトニアン (Hamiltonian) は

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(r) \quad (11)$$

と与えられる。シュレーディンガー方程式は次の量子化の手続きで得ることができる。

1. まず (11) において、

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (12)$$

の置き換えをする。

2. 次に (11) は、

時間 t と場所 \vec{x} に依存する波動関数 $\psi(t, \vec{x})$ に作用して成り立つ式とする：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = H \psi(t, \vec{x}). \quad (13)$$

3. その関数の絶対値の 2 乗が確立分布であると解釈する。

以上のルールを古典方程式に応用すると次のシュレーディンガー方程式を得ることができる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right] \psi(t, \vec{x}). \quad (14)$$

その性質を知るために連続の方程式を導く。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (15)$$

ここで

$$\rho = \psi^* \psi, \quad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} \psi^* \vec{\nabla} \psi. \quad (16)$$

この方程式は連続の方程式と呼ばれ、解釈としては密度の変化は粒子の移動によって引き起こされるということを表している。

クライン・ゴルダン方程式

このシュレーディンガー方程式は非相対論的な速さで運動する粒子に対して成り立つ量子力学での運動方程式になる。これの相対論版はどのようなものか考えたい。そのために相対論でのエネルギーと運動量の間係を書くと

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (17)$$

古典論に見習うとハミルトニアンを書きたいがそのようにすると

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (18)$$

のように平方根の形で表現する必要があり、どのように平方根の中の微分を扱えばよいかの問題が生じる。また符号の不定性も残る。そこで2乗の形のままで量子化の手続きをやってみる。シュレディンガー方程式では $H\psi$ を時間の1次微分 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ としたので、 H^2 の場合にはその2乗をとることによって次の方程式を得る：

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(t, \vec{x}) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4 \right) \psi(t, \vec{x}). \quad (19)$$

この方程式をクライン・ゴルダン方程式と呼ぶ。この方程式の意味をつかむために、再度連続の方程式を確認してみる。ただし、密度と電流は(16)のものと異なり次のようになる：

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \\ \vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right). \end{aligned} \quad (20)$$

シュレディンガー方程式では、(16)から、その密度 ρ は必ず正の値をとることが保証されているが、この場合には関数の微分がはいついて必ずしも正の値をとるということは保障されない。これは量子力学の方程式としては即座には受け入れることができない。歴史的には導出された当時は受け入れられなかったが、その後多体系を取り扱うための第2量子化の手続きとともに解釈が可能となり、クライン・ゴルダン (Klein-Gordan) 方程式と呼ばれ、中間子の方程式として使われるようになった。

ディラック方程式

この必ずしも正の確率を得ることができない原因を手繰ると、微分方程式の中に時間の2次の微分がはいついていたからであることが容易にわかる。そこでディラックは相対論的な量子力学の方程式として時間の1次微分を含むものを考え、そのためにハミルトニアンを運動量の1次の関数として表すことから出発した：

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2. \quad (21)$$

ここで $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ は運動量に依存しない”数”である。この式は $\vec{p} \rightarrow 0$ のとき、粒子の静止質量に帰着することがわかる。これに量子化の手続きを応用すると次の方程式を得る。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right) \psi(t, \vec{x}). \quad (22)$$

この式で左辺は時間の1次微分なので確率は正であることが保障される。その代わりに未知の量 α と β が導入されている。ディラックはこの α と β を決めるために、古典的なエネルギーと運動量の関係が出ることを条件とおいた。すなわち、時間の2乗の方程式を得るために (22) の両辺に再度 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sim H$ を乗じた。その結果次の式を得る：

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \psi(t, \vec{x}) = \left(-\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2\right)^2 \psi(t, \vec{x}). \quad (23)$$

この式がクライン・ゴルドン方程式になることを条件にした。したがって、 α と β の満たすべき方程式は次のようになった。

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}, \quad (24)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (25)$$

$$\beta^2 = 1. \quad (26)$$

この段階で α と β は普通の数ではないことがすぐに理解できる。しかもこれらがゼロではない意味のある”数”である為には、これらは行列である必要がある。そこで、どのような行列になるべきかで、さらに条件を求めたい。最初にはハミルトニアンはエルミート (Hermite) であるという条件から α, β は Hermite 行列である。さらに交換関係からこれらの行列のトレースはゼロであることが証明できる。即ち

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \text{tr } \alpha_i = 0, \quad \alpha_i^2 = 1, \quad (27)$$

$$\beta^\dagger = \beta, \quad \text{tr } \beta = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (28)$$

この条件から行列の次元 (N) は偶数であることが分かる。 $N = 2$ は上記の条件を満たすことが出来ない。従って、 $N = 4$ になることが必要である。この場合には α と β として多くの可能性が考えられる。従って、物理 (自然) の要請から、それらの具体的な行列を採用することになる。そこでディラックが採用した行列は次のようになる。

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

ここで σ_i はパウリ行列で次のように定義されている：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

また、(29) の β の成分中 1 と書かれてあるのは 2×2 の単位行列である。

これでディラックの方程式が完成したことになる。αとβを得た段階でもう一度ディラック方程式を次の式で表現する。

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\vec{x}) = (-\hbar c\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc^2)\psi(t,\vec{x}). \quad (31)$$

この式の右辺でαとβが4×4の行列であるということは、この式が意味を持つ為には波動関数が縦ベクトルになっていることが必要である。すなわち、波動関数は一つの粒子を表現するものであるにもかかわらず、4つの成分を持った波動関数になってしまった。一つの粒子の運動はひとつの波動関数で表現できるべきだが、ディラックの方程式は一つの粒子につき4つの自由度があることを要請している。核子はスピン1/2を持っているので、2つの成分はスピンのことなる状態に対応させることを思いつくが、4つというのはそのままでは理解できない。そこで、波動関数を

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} F(t,\vec{x}) \\ G(t,\vec{x}) \end{pmatrix} = \left(-i\hbar c\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mc^2\right)\begin{pmatrix} F(t,\vec{x}) \\ G(t,\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (32)$$

のように上成分と下成分で表現し、ディラック方程式を二つの結合した微分方程式の形に書く。この式は時間と空間座標について変数分離形をしているのでまず、時間の部分をその固有値を使ってあらわす。

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}F(t,\vec{x}) &= -i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}G(t,\vec{x}) + mc^2F(t,\vec{x}), \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}G(t,\vec{x}) &= -i\hbar c\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}F(t,\vec{x}) - mc^2G(t,\vec{x}) \end{aligned} \quad (33)$$

その上で下成分を消去すると次の方程式を得る：

$$EF(t,\vec{x}) = \left(\frac{\hbar^2 c^2}{E + mc^2}\vec{\nabla}^2 + mc^2\right)F(t,\vec{x}). \quad (34)$$

この方程式を解くとエネルギーは $E^2 = p^2 + m^2$ 。非常に興味深いことにエネルギーとして正の状態と負の状態が可能であることが分かる。すなわち、

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}. \quad (35)$$

したがって、1個の核子を記述するためには、その座標空間における運動状態が同じでも、正のエネルギー状態として2つのスピン状態と、負のエネルギー状態として2つのスピン状態が存在することを意味している。この負のエネルギー状態の持つ物理的な意味は、ディラック方程式が考案され80年経った今日でもしばしば議論・研究の対象になるが、当初ディラックは負のエネルギー準位が核子で完全に詰っている状態を我々の”真空”であると定義した。したがって、この負のエネルギー状態に穴が開くとそこに一つの

エネルギー状態があることを意味している。この状態をディラックは反粒子の状態だと解釈した。したがって、全ての粒子は反粒子を持つという予言を行った。

問題 ディラックの方程式は波動関数が成分を持っているために、次のような連立の1階の偏微分方程式になっている。

$$Q11 \tag{36}$$

この式に左から

$$Q12 \tag{37}$$

をかけることにより、時間の微分方程式を空間の微分方程式と分けることが出来る。このことにより、次のような空間だけの微分方程式を得ることを証明せよ。

$$Q13 \tag{38}$$

ディラック方程式でのスピン軌道力：

スピン軌道力の議論のために中心力を導入する。クーロン力の時には次のようにディラック方程式が書ける。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(t, \vec{x}). \tag{39}$$

このクーロン力の部分を $V(r)$ と書いて式の変形を行いたい。波動関数を上成分 F と下成分 G で表現して、それぞれが結合した連立微分方程式を書くと

$$\begin{aligned} EF(t, \vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} G(t, \vec{x}) + mc^2 F(t, \vec{x}) + V(r)F(t, \vec{x}), \\ EG(t, \vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(t, \vec{x}) - mc^2 G(t, \vec{x}) + V(r)G(t, \vec{x}) \end{aligned} \tag{40}$$

したがって、下成分の波動関数 G は上成分の波動関数 F を使って次のように書ける。

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{E + mc^2 - V(r)} (-i\hbar c) \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) \tag{41}$$

この G を上の微分方程式に代入すると G が消去されて、次の F だけの2回の微分方程式を得る。

$$-\hbar^2 c^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) (mc^2 + V(r)) F(\vec{x}) = RF(\vec{x}). \tag{42}$$

非常に興味深い方程式になるがこの後の処理のためには次の関係式を使う（巻末の問題）：

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B}, \quad (43)$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{r} \frac{d}{dr} f(r). \quad (44)$$

ただし、 $\hat{r} = \vec{x}/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で \vec{A} と \vec{B} は適当なベクトル量である。これらの関係式を代入すると次の式を得る。

$$- \left[\frac{\hbar^2 c^2}{E + mc^2 - V(r)} \nabla^2 - \hbar^2 c^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \right) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{x} \vec{\nabla}) + mc^2 + V(r) \right] F(\vec{x}) = EF(\vec{x}). \quad (45)$$

さらに

$$\begin{aligned} \hbar \vec{\sigma} &= 2\vec{s}, \\ \vec{l} &= \vec{x} \times \vec{p} = -i\hbar \vec{x} \times \vec{\nabla} \end{aligned} \quad (46)$$

を導入すると次のような微分方程式を得る：

$$- \left[\frac{\hbar^2 c^2}{E + mc^2 - V(r)} \nabla^2 - c^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \right) (\hbar^2 \vec{r} \cdot \vec{\nabla} - 2\vec{l} \cdot \vec{s}) + mc^2 + V(r) \right] F(\vec{x}) = EF(\vec{x}). \quad (47)$$

この式から次のようなことが言える。第1項は $E - V \sim mc^2$ とするとシュレーディンガー方程式の運動エネルギーの項になる。第2項目はディラックの方程式から出てくるまったく新しい項であり、ダーウィン (Darwin) 項と呼ばれる。第3項はスピンと軌道角運動量が相互作用しているのでスピン軌道力と呼ばれる。

$$U_{so} = 2c^2 \frac{1}{r} \frac{V'(r)}{(E + mc^2 - V(r))^2} \vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (48)$$

したがって、ディラックの方程式ではスピン軌道力が自動的に現れる。

このスピン軌道力が現象論的には非常に大きな量になるというのがメイヤーとヤンセンが発見したことであるが、逆の意味ではスピン軌道力が大きいことから原子核でも相対論の効果をきっちりと取り扱う必要があることを意味している。原子核物理はシェルモデルの導入以来、多くの現象を理解するために非相対論で理論的に議論されてきたが、最近では相対論効果の重要性が指摘されている。

問題 (43) と (44) の関係式を証明せよ。

3.1 自然単位系と共變的に書かれたディラック方程式

物理学では単位は非常に重要である。物理学者としては方程式を書くときに常に単位が右辺と左辺で等しいかどうかをチェックしながら方程式を書いていく。しかし、常に同じような定数を方程式の中に書き込んで計算するのも面倒な仕事である。特にディラック方程式では規約されたプランクの定数 h と光の速度 c が随所に出てきて方程式が煩雑になっている。そこで熟練した物理学者（特に理論研究者）は非常に大胆な単位系を導入する。それは量子力学の定数である h を 1 にし、相対論の定数である c を 1 にする単位系を導入する。これは常にこれらの定数を式の中に表現するよりも、これらを 1 にすることにより煩雑な方程式を見栄えの良い方程式に変更する。

速度を 1 と書くということは長さの単位と時間の単位を同等にするということである。さらには h を 1 と書くということはエネルギーと時間の逆数の単位が同等であるということである。そのために今後数字の変換のために必要となってくる数字を書いておく。

$$\begin{aligned}c &= 3 \times 10^8 \text{m/s} = [\text{L}]/[\text{T}] \\ \hbar &= 6.6 \times 10^{-22} \text{MeV} \cdot \text{s} = [\text{E}][\text{T}] \\ \hbar c &= 197 \text{MeV} \cdot \text{fm} = [\text{E}][\text{L}]\end{aligned}\tag{49}$$

特に最後の関係式を使うことにより必要な数字を得ることが可能である。たとえば陽子の質量を表現するのに $m = 5 \text{fm}^{-1}$ のようにかかれることがある。これを我々の言葉で表現するには

$$\hbar c = 1\tag{50}$$

なので、 $1 \text{fm}^{-1} = 197 \text{MeV}$ となる。これでも質量がエネルギーの単位になっているので気持ち悪いと思う人はさらにはこの量に c^2 をかけると、本当にグラムの単位で表現できる。自然単位系は最初のうちは分かりにくいだが、慣れればこんなに便利なものは無い。

たとえばディラックの方程式を自然単位系で書くと

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi(t, \vec{x}).\tag{51}$$

となり、 h と c が方程式に書かれていない分、式の本質が見えやすい。理論研究者はこの方をずっと好むが、実験研究者と話をするときにはすべての計算が終わった後で h と c を含む形に表現しておくが良い。

次は、相対論の要請を考慮したい。そのために 4 元の長さ と 4 元の運動量を導入する。そのためにアインシュタインのエネルギーと運動量の関係を自然単位系で書く。

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2.\tag{52}$$

この式で p^2 を左辺に持っていくと

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (53)$$

となるので、質量はローレンツ変換でのスカラー量であるため、 $E^2 - \vec{p}^2$ もスカラー量となる。 Γ と $\bar{\Gamma}$ は相対論的には同等の物理量となり、4元の運動量を次のように導入するのが自然である：

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}) \quad (54)$$

さらには時間と位置座標も4元の座標という形で導入する。運動量の量子化の条件から、4元の微分も導入する。

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad (55)$$

さらには4元の γ 行列を次のように定義する。

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \quad (56)$$

これらを使うとディラックの方程式は次のように非常に見やすい形に書かれる。この形を共変形のディラック方程式とよぶ。

$$38 \quad (57)$$

この際に下付の4元ベクトルは上付きの4元ベクトルと次の関係で与えられる。

$$39 \quad (58)$$

これらの上付きのベクトルと下付のベクトルをかけてその成分で足し合わせた量はスカラー量になる。

3.2 ディラックの方程式から導出されるカレント

共変的な形に書かれたディラック方程式から連続の方程式を導く：

$$40 \quad (59)$$

通常の方法に従って連続の方程式を導くと次のような簡単な形に書ける：

$$41 \quad (60)$$

この際にベクトルカレント (電量) は

$$42 \tag{61}$$

とかける。ここで γ_μ は 4×4 の行列なので、 $\bar{\psi}$ と ψ の間に 4×4 の行列を入れた量も数となる。それらの量も各種のカレントとよぶ。

$$42 \tag{62}$$

これらのカレントをそれぞれスカラーカレント、擬スカラーカレント、擬ベクトルカレント、テンサーカレントとよぶ。

4 場の理論

4.1 古典粒子の運動

場の理論を導入するために粒子の運動を記述するためのラグランジアン (Lagrangian) を導入する

$$1 \tag{63}$$

このラグランジアンを時間で 0 から t まで積分した量を作用 (action) とよび、その変分を取ったものを最小にする条件によってニュートンの方程式を得る。これを最小作用の原理 (またはハミルトンの原理) とよび解析力学の基本的な概念である。すなわち

$$2 \tag{64}$$

を使うと

$$3 \tag{65}$$

のニュートン (Newton) の方程式を得る。

次にひもに等間隔に配置された粒子の運動に着目しよう。この際のラグランジアンは次のように書ける。

$$4 \tag{66}$$

この式で x についての作用の変分を取ると

$$5 \tag{67}$$

となる。その上で粒子の間隔を極端に短くする。それに応じて粒子の数を増やす。さらには粒子の番号を連続にするので x 方向の座標でその粒子を表す。この方法で得られたラグランジアン次のように書ける。

$$6 \tag{68}$$

その上でアクションの変分を取ると連続的に並んだ粒子の運動方程式を得る。

$$7 \tag{69}$$

この方程式を場の理論の方程式とよぶ。

このひもの運動を一般化する。ひもは1次元の座標で位置をあらわすが、太鼓の表面を表すには2次元の座標で表す。我々の空間は3次元なので、その空間に詰まっている粒子の運動を表すには3次元の座標で表す必要がある。したがって、一般にはラグランジャン密度は次のように書ける。

$$8 \tag{70}$$

さらにはラグランジアンと作用は次のように書ける。

$$9 \tag{71}$$

このアクションの変分を取ると次のオイラー・ラグランジェ (Euler-Lagrange) 方程式を得ることが出来る。

$$10 \tag{72}$$

4.2 量子力学の場の理論

古典力学の運動方程式はラグランジャンを与えることにより得ることが出来る。一方で量子力学の方程式も空間の各点での波動関数を与える方程式になっている。古典力学のラグランジャンを拡張して量子力学の方程式を与えるようにラグランジャンを導入することが可能である。たとえばシュレディンガー方程式を与えるラグランジャンは次のように書ける。

$$1 \tag{73}$$

ただし、これからは自然単位系を使って方程式などを書いていく。このラグランジャンの意味は、オイラーラグランジェ (E L) 方程式を使うことによりシュレディンガー方程式を得ることによる。

$$2 \tag{74}$$

ディラック方程式を与えるラグランジアンは次のように書ける。

$$3 \tag{75}$$

このラグランジアンはローレンツスカラーになっていることに注目してほしい。さらには EL 方程式を使うと

$$4 \tag{76}$$

のディラック方程式を得る。

後の議論で登場するのでさらにクラインゴルダン方程式を与えるスカラー粒子のラグランジアンは次のように書ける：

$$5 \tag{77}$$

さらに電磁場の方程式はマックスウエル (Maxwell) 方程式だが、その方程式を与えるラグランジアンは

$$6 \tag{78}$$

と書くことが出来る。ここに現れる A_μ は電磁場のゲージ場と呼ばれており、このゲージ場から作られる反対称テンサーと電場・磁場の関係は次のように与えられる。

$$7 \tag{79}$$

このゲージ理論を扱うにはゲージ固定を行う必要があるが、この本での主題ではないので別の教科書に細部を譲る。

この段階でディラック粒子と電磁場の相互作用を導入する。現在の物理学において最も重要な概念はゲージ原理です。この原理の基本的な考えは、粒子の運動は量子力学で記述され、物理量は波動関数の絶対値の 2 乗で与えられる。したがって、波動関数に位相をかけても物理量は変化しない。しかもその位相変換を場所ごとに独立に行うことが可能である。この場所に依存したゲージ変換をディラックのラグランジアンに行う。結果は次のようになる。

$$8 \tag{80}$$

したがって、このラグランジアンはゲージ変換で変化する。すなわちゲージ不変性が成り立たない。そこで、次のように変化するゲージ場を導入する。

$$9 \tag{81}$$

このゲージ場を使ってディラックのラグランジアンを書くと次のようになる。

$$10 \tag{82}$$

このゲージ場はベクター粒子であり、電磁場のラグランジアンを付け加えることにより、電磁場を与えるゲージ場という解釈を与えることが可能になる。この全体のラグランジアンはゲージ理論の典型的なものである。

$$11 \tag{83}$$

このラグランジアンはディラック粒子と相互作用を媒介する中間子(メソン)との相互作用がラグランジアンを使ってどのように書かれるべきかの具体例となっている。すなわちディラック粒子がベクター電流を作っており、

$$12 \tag{84}$$

そのベクター電流とベクター粒子である光のベクター場とが結合している。したがって、スカラー電流とはスカラー粒子が結合することによりローレンツ不変の相互作用を得ることになる。これらの相互作用の形をまとめるとテーブルのような相互作用を得ることが出来る。

4.3 アイソスピンとフレーバー

原子核の理論を作るにはアイソスピンという概念を理解する必要がある。原子核は陽子と中性子で出来ている。これらの粒子は電荷だけが違っており、質量はほとんど変わらない。核力を媒介するパイ中間子も3種類の電荷(+, -, 0)の違う粒子があるが、それらの質量はほとんど変わらない。質量が同じということは素粒子に対称性があるからと考えることができる。数学的には粒子の内部自由度であるスピンの代数を使う。スピンの代数はSU(3)のリー代数と言われて次の交換関係で特徴づけられる：

$$13 \tag{85}$$

$\vec{s} = \vec{\sigma}/2$ はスピン行列である。このスピン演算子の固有値は全てのスピン成分と可換であるカシミア(Casimir)演算子である s^2 の期待値と s_z で表現できる。

$$14 \tag{86}$$

スピンの大きさが1/2のとき、そのz-成分が1/2の状態が上向きスピン状態で、-1/2の状態が下向きスピン状態を表す。

核子のアイソスピンも同じように扱う。アイソスピンの代数はSU(2)のリー代数で次の交換関係で表す。

15

(87)

\vec{t} はアイソスピン空間に演算するアイソスピン行列と $\vec{t} = \vec{\tau}/2$ で関係づけられる。核子の場合には、その固有値としてアイソスピンの大きさが1/2、その成分が+1/2と-1/2の状態があり、陽子と中性子に対応させる。パイ中間子の場合にはアイソスピン演算子の固有値が1でその3つの成分が π^+ 、 π^- および π^0 に対応する。

アイソスピンという概念は原子核や素粒子の世界でしか登場しない。それは強い相互作用する系の代数はクォークが担っており、しかも異なる性質を持ったクォークが6種類存在している。強い相互作用の世界ではアイソスピンという概念はこの6種類を分類するフレーバーという内部自由度の一部であると考えられている。

このアイソスピンという自由度まで導入すると、原子核物理に必要な全ての数学的な道具がそろったことになる。実際には湯川粒子と言われるパイ中間子はアイソスピンが1の粒子である。したがって核子から作られる各種の電流で波動関数の間にアイソスピン演算子の導入して、アイソスカラー電流やアイソベクター電流を導入する。これら全ての間子とそれに対応する電流を対応させたものを表1に示す。