２．電場

力の伝わり方

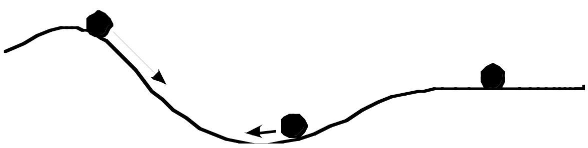
遠隔作用

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

距離r離れている点１と点２に電荷がおかれているという情報のみで、力が表現されている。一方、q_2の値が変われば、q_1に働く力も変化する。すなわち点２の作用は点１へと伝わっているはず（その逆も同じ）。クーロンの法則では、点１，２の作用が、媒介するものなしに伝わるかのように表現されている。このような力を、遠隔作用という。

近接作用の考え方：重力（斜面）の例

斜面上の物体は角度に応じた下降力を受ける



受ける力は、本来地球の重力に引かれることに原因があるが、この場合、斜面の角度という、その場所の性質に関係していると解釈することもできる。力の起源ををはなれた別の点に求めるのではなく、その場所（空間）の性質であるとするとき、この力を近接作用という。

　斜面上の質量mの物体に作用する下降力は

$$\vec{F} = mg\sin\theta\,\vec{e} = m\vec{G}$$

ここで、$\vec{e}$は斜面に接する下方を向いた単位ベクトル。mは物体の性質なので、

$$\vec{G} = g\sin\theta\,\vec{e}$$

を、斜面（空間）の点の重力に関連した性質と呼ぶことが出来る。斜面上の各点は、そこに質量mを持ってくると、$m\vec{G}$という力を生じるような性質を持っている。

場

空間の各点にある性質を考えることができ、それが、場所ごとに変化するような場合、その性質は場所の関数であり、そのような関数を場と呼ぶ。

・温度や気圧は確かに場所によって変化する。それらは１成分の関数なのでスカラー場と呼ばれる。
・風（空気の流れ）も場所ごとに変化するが、これは大きさと方向を持ったベクトル場である。
・斜面上の下降力の場合、$\vec{G} = g\sin\theta\,\vec{e}$がベクトル場である。

電場

点電荷どうしのクーロンの法則

$$\vec{F} = k\frac{qQ}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\hat{r}$$

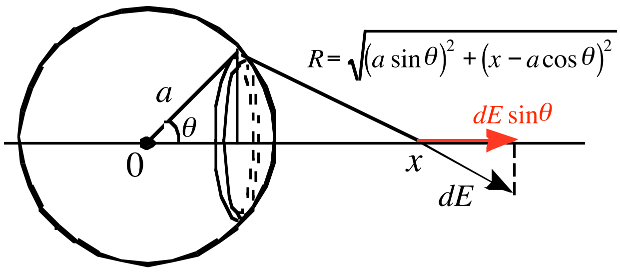
において q に作用する力を、$\vec{F} = q\vec{E}$ と書くことにすれば、点電荷 Q が周りの空間に作る電場 $\vec{E}$ は

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

である。もし（静）電気の実体が場によるものだとしたら、その場は実在し観測されるはずである（後）。

計算例

半径 a の球面上に電荷が一定の面密度 ρ で分布している場合、球の外の電場を求める。（$Q = 4\pi a^2\rho$）



$$\begin{aligned}
E_{total} &= \int dE \\
&= k\int \frac{dQ}{R^2}\frac{x - a\cos\theta}{R} \\
&= k\rho\int \frac{a\sin\theta d\phi\cdot ad\theta}{R^2}\frac{x - a\cos\theta}{R} \\
&= k\rho 2\pi a^2\int_0^{\pi} \frac{1}{x^2 + a^2 - 2ax\cos\theta}\frac{x - a\cos\theta}{\left(x^2 + a^2 - 2ax\cos\theta\right)^{1/2}}\sin\theta d\theta \\
&= k\rho 2\pi a^2\int_{-1}^{+1} \frac{x - at}{\left(x^2 + a^2 - 2axt\right)^{3/2}}dt
\end{aligned}$$

あとはこの積分を実行すれば良い。結果は

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x - at}{\left(x^2 + a^2 - 2axt\right)^{3/2}}dt = \frac{2}{x^2}$$

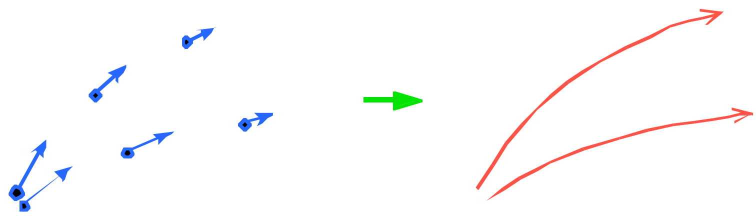
なので

$$E_{total} = k\frac{4\pi a^2\rho}{x^2} = k\frac{Q}{x^2}$$

すなわち、中心に電荷Ｑが集中している場合の結果に等しい。

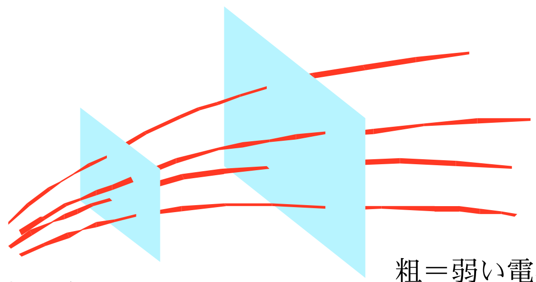
問８　上の積分を確かめよ。
問９　上の例題で、球の内部では電場はどうなるか？
問１０　半径 a の球の内部に電荷が一定の体積密度 ρ で分布している場合、球の外部で電場はどうなるか？

電場ベクトルを滑らかに結んで出来る無数の（一般には）曲線を、電気力線という。これは電場の持つ性質を視覚的に直感的に説明するのに役立つ。



単位面積あたりを垂直に横切る電気力線の本数が、電場の強さを表す様にすることができる：

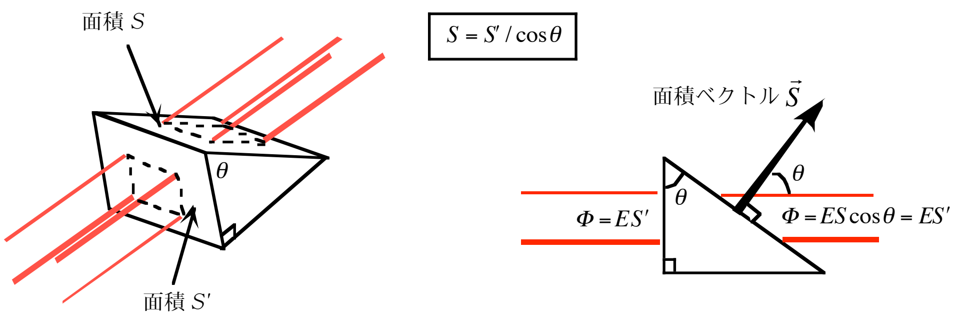
E = (力線密度) = (面を通過する力線の量)／(面積) → 力線の量 = E ×(面積)



重ね合わせの原理　～　クーロン力の場合と同じ

問１１　逆２乗則（～$1/r^2$）は、電気力線の自然消滅・発生がなく、また電場が単位面積あたりを垂直に横切る電気力線量に比例することを用いて、自然に導かれることを説明せよ。

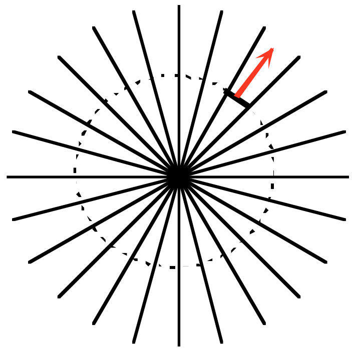
面を通過する力線量（フラックス）の勘定のしかた



（フラックス）＝（垂直な面を通過するフラックス密度）×(垂直な面の断面積）＝　$\vec{E}\cdot\vec{S}$

ガウスの法則

点電荷が球の中心にある場合



微小面を通過するフラックス：

$$d\Phi = EdS = k\frac{Q}{r^2}dS$$

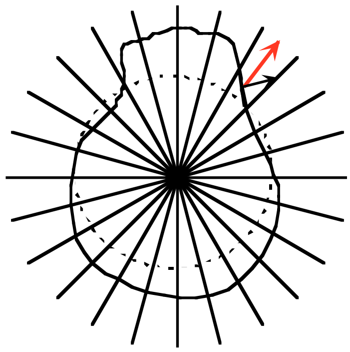
全表面上では、積分して

$$\Phi = \int d\Phi = k\frac{Q}{r^2}\int dS = k\frac{Q}{r^2}4\pi r^2$$

$$= 4\pi kQ = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

電場は電荷と等価である（ε_0 を除いて）

任意の閉曲面の場合



上の図より、任意の面（S）を通過するフラックスは
フラックスに垂直な面を通過するフラックスに等しい。
従って、

$$\Phi = \int_{\text{any surface}} d\Phi = \int_{\text{spher}} k\frac{Q}{r^2}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

閉曲面を通過していく力線の量は、その内部に存在する電荷の総量（の ε_0 分の１）に等しい

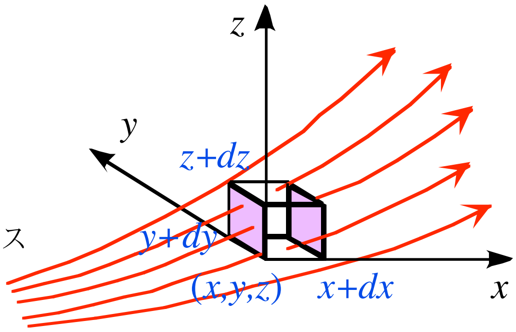
問１２　半径 a の球面上に電荷が一定の面密度 ρ で分布している場合、ガウスの法則を使って球の内側、外側の電場を求めよ。

問１３　半径 a の球内に電荷が一定の密度 ρ で分布している場合、ガウスの法則を使って球の内側、外側の電場を求めよ。

ガウスの定理とガウスの法則の微分形

フラックスが微小立方体に出入りする量を考える（断面積を $dS = dxdy(= dydz = dzdy)$ とする）

・(x,y,z) に位置する yz 面を通過する電場フラックス



$$d\Phi_{yz}(x,y,z) = \vec{E}\cdot d\vec{S} = -E_x(x,y,z)\,dS$$

（なぜマイナスがつくか？）

$(x+dx,y,z)$ に位置する yz 面を通過する電場フラックス

$$d\Phi_{yz}(x+dx,y,z) = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E_x(x+dx,y,z)\,dS$$

差し引き（合計）

$$\begin{aligned} d\Phi_{yz}(x+dx,y,z) + d\Phi_{yz}(x,y,z) &= \left(E_x(x+dx,y,z) - E_x(x,y,z)\right)dS \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x}(x,y,z)\,dxdydz \end{aligned}$$

・同様に、(x,y,z) と $(x,y+dy,z)$ に位置する２つの zx 面を通過する電場フラックスの合計は

$$\begin{aligned} d\Phi_{zx}(x,y+dy,z) + d\Phi_{zx}(x,y,z) &= \left(E_y(x,y+dy,z) - E_y(x,y,z)\right)dS \\ &= \frac{\partial E_y}{\partial y}(x,y,z)dxdydz \end{aligned}$$

・全く同様に残りの２面を通過するフラックスの合計は

$$\begin{aligned} d\Phi_{xy}(x,y,z+dz) + d\Phi_{xy}(x,y,z) &= \left(E_z(x,y,z+dz) - E_z(x,y,z)\right)dS \\ &= \frac{\partial E_z}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz \end{aligned}$$

６面合計するて、立方体を出入りするフラックスの合計として

$$\begin{aligned} &d\Phi_{yz}(x+dx,y,z) + d\Phi_{yz}(x,y,z) \\ &+d\Phi_{zx}(x,y+dy,z) + d\Phi_{zx}(x,y,z) \\ &+d\Phi_{xy}(x,y,z+dz) + d\Phi_{xy}(x,y,z) \quad = \quad \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz \end{aligned}$$

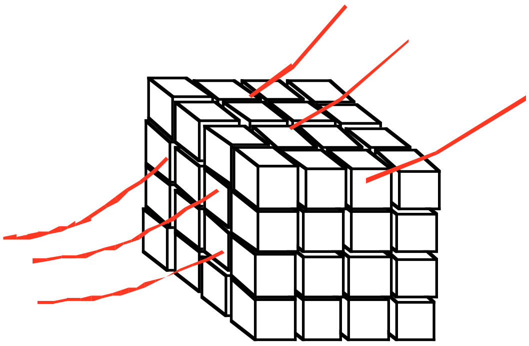
ところが、閉曲面（この場合立方体の６面）を通過する全フラックスの量はその内部の電荷に等しいので

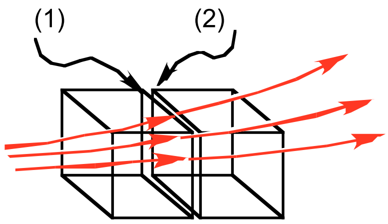
$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dxdydz = \frac{\rho}{\varepsilon_0}dxdydz \qquad \text{あるいは} \qquad \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

微分ベクトル記号 $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \vec{\nabla}$ （ナブラ）を導入して

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

を得る。これを「ガウスの法則」の微分形と言う。





(1)から出ていくフラックスと
(2)に入るフラックスの量は等しい

次に有限の領域を通過していくフラックスを考る。微小体積要素を通過していくフラックスを全て足し合わせた量は

$$（フラックスの総和）= \int dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

微小体積要素の接する面どうし（図の (1) と (2)）では、フラックスは打ち消しあうので、この和は表面での和が残る。従って

$$\int_{Volume} dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{Surface} d\vec{S} \cdot \vec{E}$$

体積積分（左辺）を表面成分に書き直すこの公式を「ガウスの定理」という。これは、１次元の積分公式

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$$

の３次元版である。

ガウスの定理を使えばガウスの法則の微分形を積分して

$$\int_{Volume} dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \rightarrow \int_{Surface} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \int dV\, \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\int_{Surface} d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

ガウスの法則の積分形

全表面を通過していく正味のフラックスの総和は、その内部に存在する総電荷に等しい。