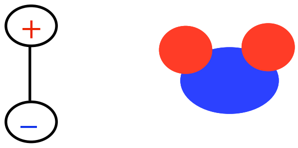
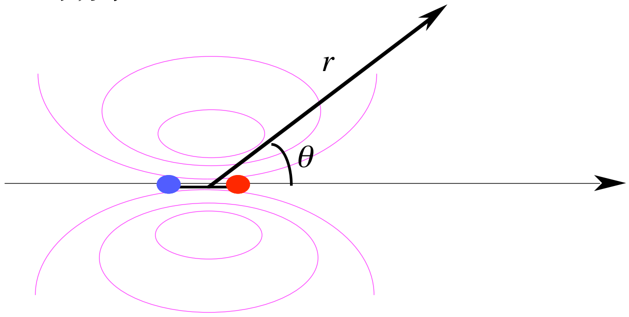
いろいろな電場と電位

1）双極子



水分子など



一般には距離と角度の複雑な関数

$\theta = 0$ の場合

ポテンシャル

$$
\begin{aligned}
V(x) &= V(x+a/2) + V(x-a/2) \\
&= -\frac{kQ}{x+a/2} + \frac{kQ}{x-a/2} \\
&\sim -kQ\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x}\right) = -kQa \cdot \frac{1}{a}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x}\right) \\
&= -kQa \cdot \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{kaQ}{x^2} \equiv \frac{kp}{x^2}
\end{aligned}
$$

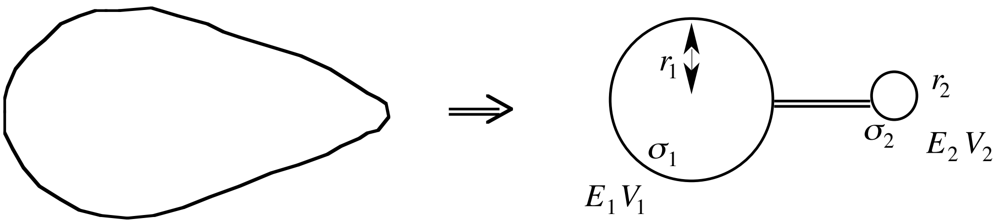
$p = aQ$：双極子

電場の x 成分

$$E = -\frac{d}{dx}\frac{kp}{x^2} = 2\frac{kp}{x^3}$$

電荷のクーロンの法則のように遠方まで到達しない

2）曲率の違いによる電場



$$V_1 = k\frac{Q_1}{r_1} \quad = \quad k\frac{Q_2}{r_2} = V_2$$

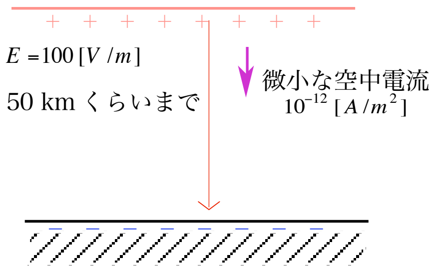
$$Q_1 = 4\pi r_1^2 \sigma_1, \quad Q_2 = 4\pi r_2^2 \sigma_2$$

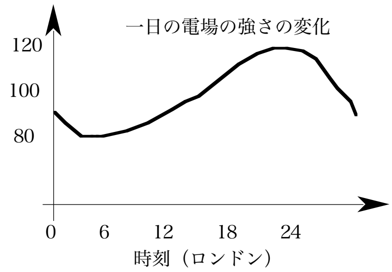
$$k\frac{4\pi r_1^2 \sigma_1}{r_1} = k\frac{4\pi r_2^2 \sigma_2}{r_2} \quad \Rightarrow \quad r_1\sigma_1 = r_2\sigma_2$$

$E = \sigma / \varepsilon_0$　を使って

$r_1 > r_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 < \sigma_2 \Rightarrow E_1 < E_2$　　曲率の小さなところほど電場が強い

３）地上の電場

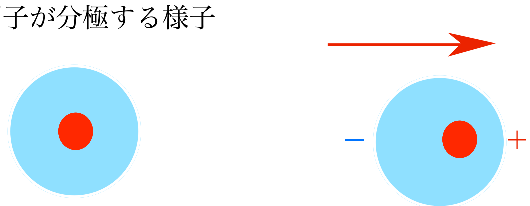




問　人がこの電位差を感じない理由を説明せよ
問　地表の面電荷密度を求めよ
問　地上に立った人が持っているマイナス１のイオンの数を概算せよ。
問　空中電流が流れることで、地表の電荷がなくなるのにかかる時間を、概算せよ

４）誘電体
自由に動ける電荷（イオンや電子）がない電場の中では誘電分極が起こる

原子が分極する様子



・コンデンサーの容量を増やす働き

問　電気的に中正なものは、電荷を帯びた物体の近くでは引かれることを説明せよ

静電エネルギー

平行板コンデンサーの例

$$V = Ea \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad => \quad Q = \varepsilon_0 \frac{S}{a} V$$

これから、平板コンデンサーの容量は

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{a}$$

エネルギーの計算
電位差 V のところに微小電荷 dQ を移動するのに必要なエネルギー

$$dU = VdQ = Ea \cdot dQ = \frac{aQ}{\varepsilon_0 S} dQ$$

これを電荷ゼロから Q まで増加させる。このとき、電位差は $V = \dfrac{Q}{C}$ となっている。

$$U = \int_0^U dU = \int_0^Q VdQ = \frac{a}{\varepsilon_0 S} \int_0^Q QdQ = \frac{1}{2} \frac{a}{\varepsilon_0 S} Q^2$$

問　右辺を変形して $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2}QV = \dfrac{1}{2}CV^2$ を示せ。
問　さらにこの式の電荷を電場で表すことによって

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}(aS)E^2$$

を示せ。

この式から、コンデンサーに蓄えられるエネルギーはそれによって作られる電場（空間）に蓄えられていると解釈することが出来る。

例　半径Ｒの導体球の容量と、それに電荷Ｑが与えられたときのエネルギーの計算。

電位：$V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$　（クーロンの法則）　＝＞　$Q = 4\pi\varepsilon_0 R \cdot V = CV$

エネルギー：$U = \dfrac{Q^2}{2C}$

これを、電場のエネルギーと比較してみる：

$$U = \int_R^\infty \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

これは先に求めた結果に等しい

問　電子を半径ａの非常に軽い導体として、その周りに出来る電場が電子の質量を生成すると考えてみると、電子の半径はどの程度であれば良いか。

注意：エネルギーと質量の等価性 $E = mc^2$ を使う。この結果は現実に全く合わない。