

電磁誘導

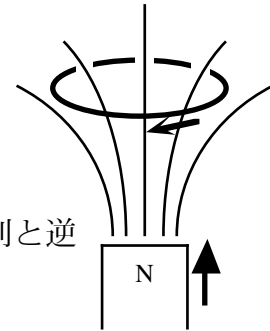
時間的に変動する場 ⇒ 電磁波を含む豊富な物理内容を含んでいる

(1) ファラデーの法則

閉じたループ内を通過していく磁束が変化すると、その変化を妨げるように起電力が生じる

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = BS = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

右ねじの規則と逆



一方、起電力は $V = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ と書けるので、ストークスの定理を使って

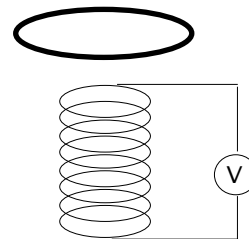
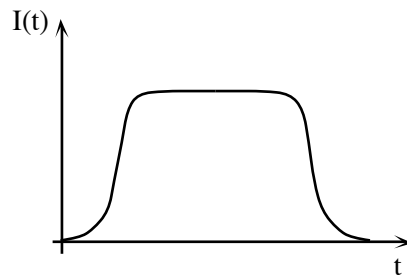
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

を見出す。変化する磁場は渦状の電場を生じる。

- ・コイルを何 (N) 重かに巻くことで、より高い起電力を取り出すことができる：

$$V = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

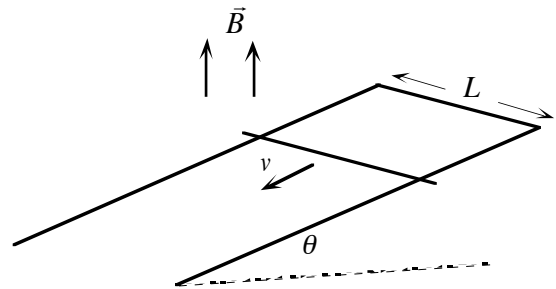
問10 コイルに図のように電流を流すとき、その上に置かれたループに生じる起電力の時間変化を定性的に図に示せ



問 1 1 鉛直方向に強さ B の一様な磁場の中、角度 θ で置かれた幅 l のコの字型レール上を、質量 m の導体棒が転がり落ちるとき、速さを求めよ。空気抵抗や摩擦などは無視し、レールと導体棒が作るループの抵抗を R (一定) とする。

棒が速さ v で落ちるときに、ループに生じる起電力と誘導電流は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = lBv \cos \theta, \quad I = \frac{V}{R} = \frac{lBv \cos \theta}{R}$$

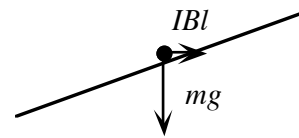


この電流が磁場から受ける力 $F = lBl$ は、重力を打ち消すように作用する (このことを確かめよ) :

$$F \cos \theta = mg \sin \theta$$

$$\frac{(lB \cos \theta)^2 v}{R} = mg \sin \theta$$

$$v = \frac{mgR \sin \theta}{(lB \cos \theta)^2} \quad (\text{答え})$$



一方、この速さで落ちる時に重力のする仕事 (率) は、

$$P_{gravity} = mgv \sin \theta = \left(\frac{mg \sin \theta}{lB \cos \theta} \right)^2 R$$

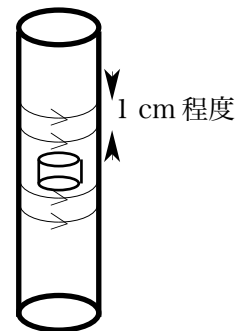
この仕事率は電流が消費するジュール熱に等しいことを確かめることができる。

同様の例として、鉛直に置かれた銅筒内を一定の速さで落下する磁石を考える
筒の半径を 1cm、銅版の厚さを 1 mm として、銅の抵抗率

$\rho = 1.7 \times 10^{-8} [\Omega m]$ を用いる。磁石の重さを 5g として、通過する点の上下幅 1 cm 程度の帯状の電流が筒壁面を流れるとする。それぞれの帯の部分の抵抗は

$$R = \rho \frac{l}{S} \sim 1.7 \times 10^{-8} [\Omega m] \cdot \frac{\pi 30 \times 10^{-3} [m]}{20 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-3} [m^2]} \sim 1 \times 10^{-4} [\Omega]$$

ゆっくりと一定の早さ落下する速さを 10 cm/sec とすると、毎秒消費される重力エネルギーは mgv 。これが電流のエネルギー $2RI^2$ (2 倍は帯が 2 つあることによる) に変わっているので



$$mgv = 2RI^2 \rightarrow I = \sqrt{\frac{mgv}{2R}} \sim \sqrt{\frac{5 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 10 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-4}}} \sim 1.2 [A]$$

また、電圧は $V \sim IR = 1.2 [A] \times 1 \times 10^{-4} [\Omega] = 1.2 \times 10^{-4} [V]$ 程度である。

(2) 自己インダクタンス

抵抗 R の回路に、スイッチを閉じて電圧 V_0 を加える。すぐに電流計の針は振れ目盛りは $I_0 = V_0 / R$ を指す。一瞬にしてこの電流が流れ始めたように見えるが、実際には、スローモーションでみれば、電流計の針はゼロから徐々に立ち上がり、一定の電流（定常値） $I_0 = V_0 / R$ に達するはずである。どのくらい早くこの値に達するかは回路の持つ慣性によって決まり、慣性が大きいほど時間がかかり、小さいほど素早く定常値に到達する。

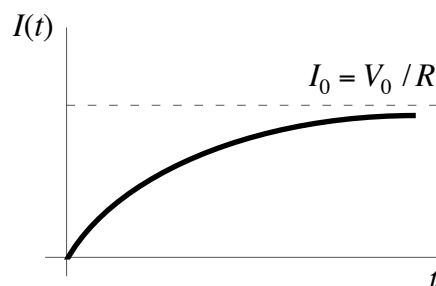
単純な閉回路に流れ始めた電流が、右の図のように変化する場合を考えよう。電流を時間の関数として $I(t)$ と書くことにする。電流 $I(t)$ は磁場（磁束密度） $B(t)$ をその周りに作り、従って回路内には $B(t)$ に比例する磁束 $\Phi(t)$ が通過する。このように、回路に流れる電流自身によってできる磁束はその電流に比例する：

$$\Phi(t) = LI(t)$$

この時速の変化によって回路には、誘導起電力 $V(t)$ が発生する：

$$V(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -L \frac{dI(t)}{dt}$$

この比例係数 L を自己インダクタンスという。



問 単位長さに n 回巻かれているソレノイドの自己インダクタンスを求めよ。ソレノイドの断面積を S とする。

解：ソレノイド内の磁場は $B = n\mu I$ なので $\Phi = SB = n\mu IS$ 。従って

$$V(t) = -\frac{d(n\mu IS)}{dt} = -n\mu S \frac{dI}{dt} \rightarrow -L \frac{dI}{dt}$$

より、 $L = n\mu S$ 。

回路に流れ始める電流の時間変化

電池によって供給される電圧 V_0 に、誘導起電力 $V(t) = -L \cdot dI(t) / dt$ が加わった全電圧が電流 $I(t)$ を流すので、次のオームの法則が成り立つ：

$$V_0 - L \frac{dI(t)}{dt} = RI(t)$$

この式は、電流 $I(t)$ に関する 1 階の常備分方程式である。これを初期条件 $t=0$ のとき $I(t=0) = 0$ のもとで解くことを考える。変数分離によって

$$dt = L \frac{dI}{V_0 - RI}$$

初期条件を満足するように積分すると、

$$I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

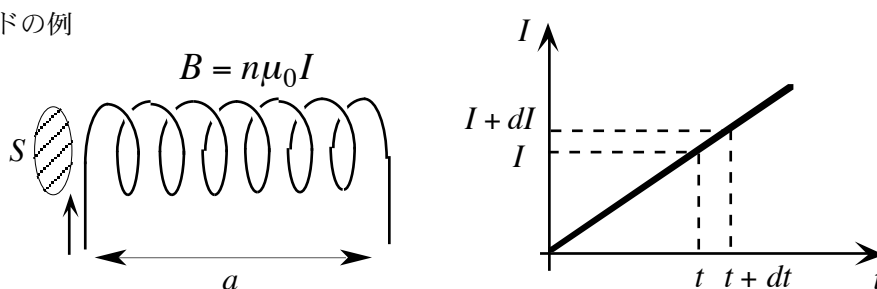
この式（あるいは右の図）から、定常状態に達する時間はおよそ $\tau = L / R$ 程度である。

問 半径 1cm の鉄心のまわりに、半径 0.5 mm の銅線が単位長さあたり 100 回巻かれた、長さ 10 cm のソレノイドがある。抵抗 R とインダクタンス L および τ を求めよ。

問 上のソレノイドにあらかじめ 1.5 V の電池をつないで電流を流しておく。電池を離れた瞬間に加わる誘導電圧を求めよ。

(3) 磁場に蓄えられるエネルギー

ソレノイドの例



ソレノイドに時刻 $t=0$ から電圧をゆっくり加えていく。電流が増えれば、それに伴い誘導起電力生じる。それに逆らうように電圧を増やしていく。そのときに必要なエネルギーが磁場に蓄えられる。このエネルギーは次のようにして勘定することが出来る。

ソレノイドの巻き数を単位長さあたり n 回、ソレノイドの長さを a 、断面積を S とする。ある時刻 t のとき、ソレノイドに $I(t)$ の電流が流れているとする。このとき、ソレノイドの内部には $B(t) = n\mu_0 I(t)$ の磁場（磁束密度）が生じる。この電流は時間とともに変化していて次の瞬間の時刻に $I(t + dt) = I + dI$ に変化したとすると、ソレノイド全体には誘導起電力として

$$V = -na \frac{d\Phi}{dt} = -na \frac{dB}{dt} S = -na \frac{d(n\mu_0 I)}{dt} S = -n^2 a \mu_0 S \frac{dI}{dt}$$

が生じる。この式では、1巻あたりに生じる誘導起電力 $d\Phi/dt$ をソレノイドの全巻数 na 倍して全体の起電力を求めている。この起電力に対抗するように、電圧を加えていく際に必要になる微小エネルギーは

$$W = QV = V \frac{Q}{t} t \rightarrow VI dt \text{ の関係から、}$$

$$dW = VI dt = n^2 a \mu_0 S \frac{dI}{dt} I dt = n^2 a \mu_0 S I dI$$

したがって電流ゼロの状態から I の状態まで増加させるのに必要なエネルギーは

$$W = an^2 \mu_0 S \int_0^I I dI = \frac{a}{2} n^2 \mu_0 S I^2 = \frac{1}{2\mu_0} (n\mu_0 I)^2 a S = \frac{1}{2\mu_0} B^2 a S$$

この式の最後の表現は、エネルギーが（密度 $= B^2 / 2\mu_0$ ） \times （体積 $= aS$ ）と解釈することができることを示している。以前に学んだことと合わせて、電磁場のエネルギー密度として

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

とまとめることができる。

(4) 変化する磁場と電場

定常状態のマックスウエルの方程式は

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{i}\end{aligned}\quad (*)$$

であったが、磁場が変化する場合には、2番目の方程式が変更を受けて

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

となることをみた。右辺は磁場が時間とともに変化する場合に現れる項である。そこで、もし電場も、時間とともに変化したらどうなるであろうか？予想は、(*)の4番目の式に、電場の時間変化を表す項が足されることである：

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + k \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2)$$

ここで、 k はこれから決める定数である。(1)式に磁流の項がないのは、磁荷 (magnetic monopole) が存在しないからである。この係数 k を決めるために、(2)式両辺の発散を取ってみる ($\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ に注意して)：

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{i} + k \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \frac{k}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3)$$

すなわち、

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \frac{k}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

でなければならない。一方で、電荷と電流の間には連続の式 (電荷の保存)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

が成り立つので、もし、 $k = \epsilon_0 \mu_0$ ならば、(3)がこの関係と矛盾せずに成り立つことになる。こうして、電場と磁場が変動する場合も含めて、マックスウエルの方程式は以下の4つの式にまとめることができる：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (6-1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6-2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (6-3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6-4)$$

この4つ1組の式によって、電荷分布と電流分布がわかれば、それによって発生する電場と磁場の様子を
 知ることができる。電荷と電磁場の相互作用の形を規定したもので、電磁気学の最も基本となる方程式で
 ある。これにより、実に多くの電磁気現象を（量子力学がかかわらなくても済む場合に、という制限がつ
 くが）説明する。

(5) 電磁波

ある場所にある電荷が源になって、そこから、電磁波が電荷のない場所（真空～図のAのあたり）を伝
 わっていく様子を考える。まずは、電荷が電磁波を発生する機構について（図のBのあたり）は考えない
 ことにする。そこで、(6-1,2,3,4)で ρ と \vec{j} をゼロに置いてしまう。以下は、式の変形である。(6-4)式の
 時間微分を取ってみる：

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

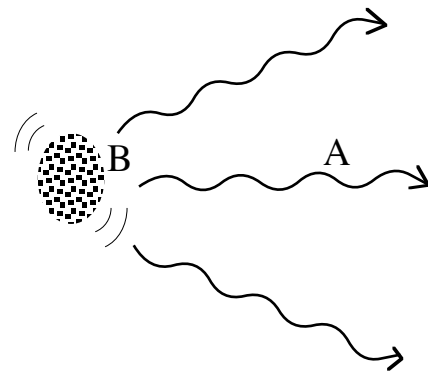
ところが、(6-2)を用いて $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ を消去してみると、

$$-\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

公式 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$ を使って左辺を書き直すと

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (7)$$

以下で見るように、この式は一定の速さで進む波を表す方程式になっている。



(6) 速さ v で伝わる波

高等学校で習った(?) ように、速さ v で伝わる調和波の式は

$$y(t, x) = A \cos(\omega t - kx + \alpha) = A \cos 2\pi \left[\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \alpha \right]$$

であらわすことができる。ここで、

A : 振幅	α : 初期位相
ω : 角振動数	T : 周期
k : 角波数	λ : 波長

である。これらのパラメータの間には、速度との関係

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \quad (f \text{ は周波数})$$

が成り立つ。

問 1 2 電場の 1 成分 (例えば z 成分) を考え、それが x 座標のみに依存する場合を考えることにする。すなわち、 $\vec{E}(t, x, y, z) \rightarrow E_z(t, x)$ とする。このとき、(7) 式は、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_z(t, x) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z(t, x)}{\partial t^2}$$

と書ける。波の進む速さ v を適当に選ぶことにより、調和波はこの方程式を満足することを示せ。このことにより、マックスウエルの方程式は、光速で伝わる波を表現できることがわかる。

問 1 3 真空中のマックスウエルの方程式において、電場 \vec{E} を消去することで、磁場 \vec{B} に対する (7) と同様の方程式を導け。

問 1 4 x 方向に進む電磁波を $\vec{E}(t, x, y, z) = \vec{p} \cos(\omega t - kx + \alpha)$ (\vec{p} は定数ベクトル) と表す。真空中の (6-1) 式 ($\rho = 0$ とする) を使って、電磁波の揺れ (振幅) の方向 \vec{p} が進行方向 (x 方向) に直交することを示せ。このことから、電磁波は横波であることがわかる。