１　原子の安定性

１．１　原子の大きさとアボガドロ数

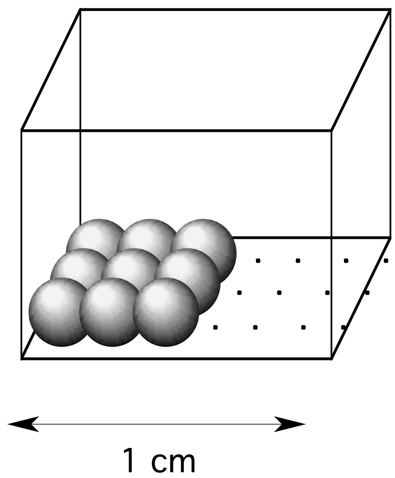
問１　水１モルは１８ｇ（ml）であることを用いて、水分子１個の占める体積を算出せよ。

このことから、１原子や１分子の大きさはその種類にあまりよらず、長さにしておよそ

であることが予想される。そこで原子の大きさを特徴づける単位として、$1\times10^{-8}cm=1\times10^{-10}m$＝１Å（オングストローム）がよく使われる。これはちょうど我々が１ｍを日常の単位でよく使う事情とよく似ている。

さて、ここで疑問として、
・なぜ、原子の大きさは１Å程度なのか？
・なぜ、すべての同一原子は同じ大きさなのか？
等を、投げかけることができる。

残念ながらこれに対して、かの Newton 力学は答えを与えてくれない！



１．２　古典力学のスケーリング則

簡単のために、水素原子の問題を考えてみよう。陽子と電子の簡単な系で、それらの間には静電気力のみが作用するものとする。したがって、運動方程式は

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \tag{1}$$

とかける。この方程式の解の一つを $R(t)$ としよう。すると、距離、時間ともにスケールされた関数 $r(t)=aR(a^{-2/3}t),\quad (a>0)$ もこの方程式を満たす。

問２　このスケーリング則を示せ。またこれが天体のケプラーの第３法則に等価であることを説明せよ。

このような事情で、古典力学の枠組みでは、原子は勝手に自由な大きさを持つことになってしまうが、現実はそうなっていない。現在最も精度の良い測定において、異なる大きさの水素原子を見いだすことには成功していない。「同じ大きさの原子」が単なる偶然ではなく、量子力学（自然の摂理）の必然であることを、この講義で見ていくであろう。

１．３　電磁崩壊

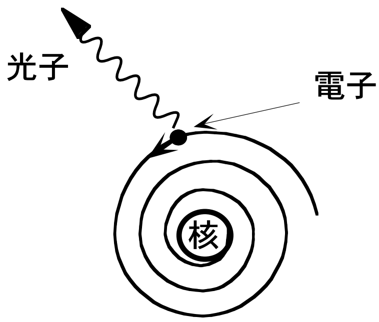
当たり前のことであるが、我々の身のまわりで、原子が崩壊して物質が変質するという話を聞いたことはない。しかしながら、諸君がこれまでに何度も聞いてきて正しいと信じてきた（だろうか？）Maxwell の理論を原子の問題に適用すると、途端にこの問題が生じてくる。結局のところ、（古典的な）Maxwell の理論をそのままで原子の理論に用いることはできないのである。

厄介ではあるが、少し苦労してこのことを確認してみよう。

古典的な Maxwell の理論によると、加速度運動をする荷電粒子は、電磁波を放出しながらエネルギーを失なっていく。このことを、水素原子の場合に電子が半径r の等速円運動をするとして応用すると、エネルギーの放出率$I\,[J/\sec]$に対して

$$I=\frac{2e^2r^2\omega^4}{3c^3} \tag{2}$$

であることがよく知られている。エネルギーを放出するにつれて、電子の軌道半径は減少する（図を見よ）。



この過程において、角運動量は保存される。そこで、

$$L=|\vec{r}\times\vec{p}|=mvr=mr^2\omega \tag{3}$$

を使ってωを消去すると、

$$I=\frac{2e^2r^2\omega^4}{3c^3}=\frac{2e^2r^2}{3c^3}\left(\frac{L}{mr^2}\right)^4=\frac{2e^2L^4}{3c^3m^4r^6} \tag{4}$$

一方、水素原子のエネルギーは

$$E=-\frac{e^2}{2r} \tag{5}$$

なので、$dE=-Idt$ によって式 (4)(5) を組み合わせると、

$$\frac{e^2}{2r^2}dr=-Idt=-\frac{2e^2L^4}{3c^3m^4r^6}dt$$

を得る。この式を積分して

$$\frac{1}{2}\int_{r_0}^{0}r^4dr=-\frac{2L^4}{3c^3m^4}\int_0^T dt$$

この式は、はじめ$t=0$のとき半径がr_0だった水素原子が、$t=T$ のときに$r=0$ となる

（つぶれてしまう）ことを意味している。そこで、Tについて解くと、

$$T = \frac{3c^3 m^4 r_0^{\ 5}}{20L^4} \tag{6}$$

を得る。この時間の具体的な値を求めるために

$$\xrightarrow{L=mv_0r_0} \frac{3c^3 r_0}{20 v_0^4} = \frac{3}{20}\left(\frac{c}{v_0}\right)^4 \frac{r_0}{c} \tag{7}$$

とすると、

$$T = \frac{3}{20}(137)^4 \frac{5.3\times10^{-11}}{3\times10^8} = 9.3\times10^{-12} \ \mathrm{sec} \tag{8}$$

をみいだす。すなわち、水素原子は10^{-11}秒というごく短時間のあいだにつぶれてしまうという結論に至るのである。しかし、このようなことを我々は見たことは決してない。さらに不都合な点は、この間にほうしゅつされるエネルギーは無限大であるということである。水素原子から、無限大のエネルギーが放出されるといことも決してあり得ることではない。

以上の水素原子の問題は、古典的な物理法則が原子の世界では全く無力であることを示している。

問３　電磁気学の教科書で (2) 式を確認せよ。どの教科書を見たか各自報告せよ。

問４　角運動量の関係式 (3)、および水素原子のエネルギー(5) を確認せよ。どの教科書を見たか各自報告せよ。

問５　水素原子中の電子の速さと光速度の比を求めよ。

２　黒体輻射

１９世紀の後半．．．溶鉱炉の温度　をいかにして知るか？－＞鉄の質

熱いものは熱放射によって温度に依存した光（電磁波）を放出する。黒体の条件（かまどに開けられた小さな穴（孔）から、かまどの内部を覗く）が満たされると、光の色は物質によらず、温度のみによって決まる。

かまどの絵

黒体輻射曲線の絵

黒体の温度Tと放出される光の強度が最大となる波長$\lambda_{\max}$の間には一定の関係が知られていた（ウイーンの変位則）：

$$T\lambda_{\max} = const = 2.90\times 10^{-3}\ \mathrm{m\cdot K} \quad (9)$$

一見なんの変哲もない様に見えるこの関係式に、実は非常に重要な意味が潜んでいる。熱力学で現れるボルツマン定数kをかけ、光速度cで割ってみよう：

$$\begin{aligned}\frac{kT\lambda_{\max}}{c} &= const' = \frac{1.38\times 10^{-23}}{3\times 10^{8}} 2.90\times 10^{-3}\ (\mathrm{J/K})\cdot(\mathrm{sec/m})\cdot \mathrm{m\cdot K} \\ &= 1.33\times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot sec}\end{aligned} \tag{10}$$

この量は作用（エネルギー×時間）の次元を持ち、物理（自然界）においてとりわけ重要な意味を持つ。このことを理解するためには、もう少し自然について勉強しないといけない。結果的に黒体という物質に固有の性質によらない方法を採用することによって、自然界の基本的な定数が見いだされたことは、強調されるべきことである。有名なプランク定数との間に 4.98 倍の差があるのみである

$$h = 6.63\times 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot sec} \tag{11}$$

プランクの詳しい統計力学的な計算によって、輻射の強度分布は

$$E(\lambda, T) = \left(\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\right)\frac{1}{\exp(hc/\lambda kT)-1} \tag{12}$$

となることが示された（1900 年 12 月 14 日、ベルリン、ドイツ物理学会）。

問 6　(12) 式で$T = const$として$\partial E(\lambda,T)/\partial\lambda = 0$の解を求め、ウイーンの変位則 (9) を示せ。

2　光電効果と物質波

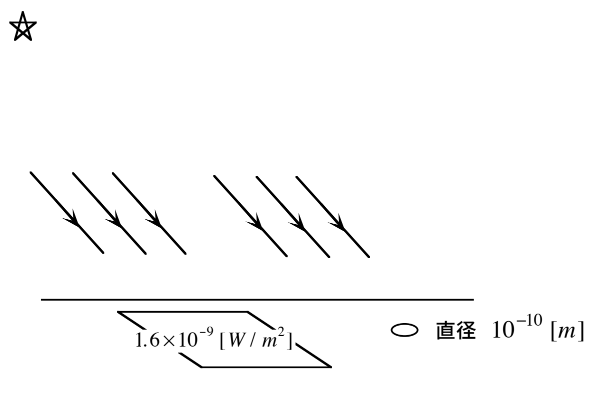
2．1　光電効果（Photoelectric effect）

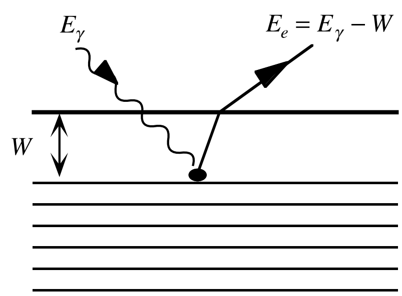
　物質が光を吸収して電子を放出する現象のこと。放出される電子のことを特に光電子という。この現象は、放電現象の研究から 1887 年に Hertz により発見され、その後 Lenard によって以下の事柄が明らかにされた。

（１）光電子のエネルギーは光の強度（エネルギーの流れの強さ）には無関係で、光の振動数が大きいほど大きい
（２）振動数を保ったまま光の強度を増す（明るくする）と、飛び出す光電子のエネルギーは増えず、かわりのその個数が増す
（３）金属に光をあてる場合、その金属に特有な振動数 ω_0 より大きな振動数の光でないと光電子は飛び出さない
（４）どんなに強度の弱い光でも、その振動数が ω_0 を越えていれば、直ちに光電子の放出が見られる

　以上の特徴は、光が波であるすると説明がつかない。

問１　以下の手順にしたがって、光が波動であるとする古典的な考え方によると、夜空に輝く星が我々の目には全く見えなくなってしまうことを示せ。
（１）１等星の明るさは、地上でおよそ$1.6\times10^{-9}\ [W/m^2]$のエネルギーの流れに相当する。１個の原子が（半径を$10^{-10}\ [m]$とせよ）毎秒吸収するエネルギーを求めよ。
（２）網膜中の電子が光を吸収して外に飛びだし、脳に伝わる信号とになるためには、網膜を構成する原子中の電子１個につき、約$1\,[eV]=1.6\times10^{-16}\ [J]$ のエネルギーが必要になるとしよう。（１）で得られたエネルギーを原子１個が吸収し、外に飛び出してくるのにのに要する時間を求めよ。





この問題を解決するために、１９０５年、アインシュタインは次のような仮説を立てた（光量子仮説）：

振動数が f [Hz] の光は、

$$E = hf = \hbar\omega \qquad (1)$$

であらわされるエネルギー E [J] を持つ粒子の流れと考えることができる

問２　この考えによって Lenard の事項を説明してみよう。ただし、金属中の自由電子が外に飛びだすためには一定のエネルギー W_0 を要するものとする。

電磁気学によると、電磁波（光）のエネルギーが E のとき、同時に運動量

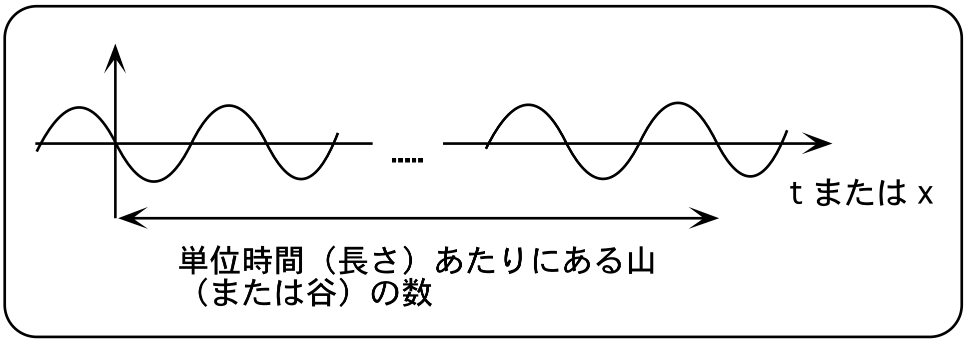
$$p = E / c \qquad (2)$$

を運ぶことが知られている[1]。そこで波の基本公式 $v = f\lambda$（ここでは $v = c$）を用いると

$$p = \frac{E}{c} = h\frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad (3)$$

を得る。ここに、角波数は $k = 2\pi / \lambda$ で定義される。

＊　波を表すパラメータに関する豆知識
振動数＝時間的な（単位時間あたりの）周期運動の回数　f
１回の振動を回転とみなして２ π をかけて角振動数とする　$\omega = 2\pi f$
波数　＝空間的な（単位長さあたりの）周期運動の回数　κ
１回の振動を回転とみなして２ π をかけて角振動数とする　$k = 2\pi\kappa$



1) この関係式は相対論のより一般的な関係 $E^2 = p^2 + m^2 \ (c = 1)$ の特別な場合 $m = 0$ になっていることに注意せよ。

以上をまとめて書くと、光量子仮説においては光子のエネルギーと運動量が以下のように量子化される

$$E = \hbar\omega\,, \quad p = \hbar k \qquad (4)$$

すなわち、１個の光子のエネルギーと運動量は、振動数（または等価なことではあるが波数）によって(4)であらわされる値をとり、したがって光のエネルギーと運動量はそれらの整数倍となる。

問３　ある放送局の電波の振動数は 80 MHz である。この電波の光子１個のエネルギーは何 [J] か。また出力が 100 [kW] のとき、放送局からは毎秒何個の光子が放出されるか。

問４　60 [W] の蛍光灯から放出される光子のおよその数を算出せよ。５ [m] 離れた場所からこの蛍光灯を見るとき、目に入ってくる光子の数はおよそ何個か。

２．２　物質波

１９２３年ド・ブロイは、
「波（光）が粒子の性質をもつならば、粒子（電子）は波の性質をもつだろう」
という発想に至った。すなわち、(4) は(ω, k)の波動は(E, p)の粒子である、と読めるので、これを逆に読んで、

「(E, p)の粒子は(ω, k)の波動として振る舞うだろう」

速さvの電子のエネルギーと運動量は$E = (1/2)mv^2,\ p = mv$と表されるので、この電子は

振動数：　$\omega = \dfrac{E}{\hbar} = \dfrac{mv^2}{2\hbar}$　　または　　$f = \dfrac{E}{h} = \dfrac{mv^2}{2h}$

波数：　$k = \dfrac{p}{\hbar} = \dfrac{mv}{\hbar}$　　または　　波長　$\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$

で表される振動数と、波数（または波長）を持つ波動として振る舞うことになる。

問５　10 [kV] で加速された電子の波長を求めよ。
問６　電子顕微鏡が光学顕微鏡に比べ、より小さなものを見ることができる理由を説明せよ。

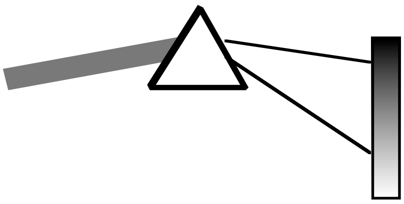
３　ボーアの原子模型

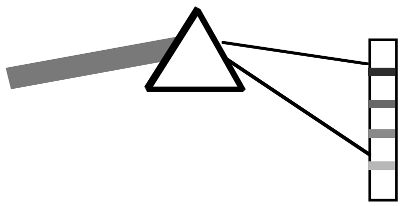
２０世紀の初頭までに知られていた原子の性質を説明するために、ボーアはいくつか仮説を立てた。その中には、後のドブロイの電子波の考えによって無理なく説明できるものがあるので、ここでは、ドブロイの考えを採用することにする。

３．１　水素原子の特徴

原子、特に水素原子から放出される光は、特定の波長を持ったものしか観測されておらず、これらを線スペクトルといって、太陽や白熱電灯の光に見られる連続スペクトルと区別する。

連続スペクトルとは、プリズムに通して分光したときにいろいろな色（波長）の光が連続的に現れる光のことをいう。これに対して、線スペクトルとはプリズムに通すと、特定の色の光が不連続に現れるものをいう。


連属スペクトル


線スペクトル

水素原子の線スペクトルに対して次の事実がバルマーによって１８８５年に発見されていた（バルマーは中学の教師だった）。

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)\qquad \text{バルマー系列}$$

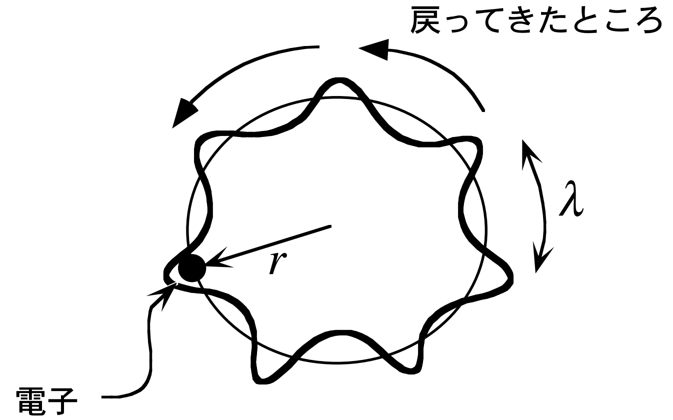
ここに、$R=1.0973\times 10^7\ m^{-1}$ はリュードベリ定数という。その後、ライマン、パッシェン系列等も知られていて、それらを合わせて

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right)$$

と表すことができる。$n=1$ がラインマン、$n=2$ がバルマー、$n=3$ がパッシェン系列である。

３．２　電子波による原子模型

原子の中で、電子は定常波を作り強めあうという条件を課すことにする。すなわち、半径 r の円周に沿って１周して元に戻ると、位相が元に戻るという条件である。



問１　元に戻ってきたときに、電子波の位相が少しずれるとしよう。電子波が何度も周回を繰り返し、それらが重ね合わせられるにつれて、合成波がどのようになるか調べよ。計算機をうまく使って調べればよい。

この条件は、１周の長さが電子波の波長の整数倍となることである：

$$2\pi r = n\lambda$$

ここでドブロイの量子化条件 $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$ を用いると、

$$2\pi r = n\frac{h}{p} \qquad \text{あるいは} \qquad pr = n\frac{h}{2\pi} \equiv n\hbar$$

を見いだす。エイチバー $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ は、もとのプランク定数 h 以上にしばしば使われる。

問２　pr は作用（エネルギー×時間）の次元を持つことを示せ。

半径 r の円周上を等速円運動する電子を考える。その向心力は陽子からのクーロン力（引力）によるとする。運動方程式は

$$m\frac{v^2}{r}=k\frac{e^2}{r^2}、\qquad ただし\quad k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

である。この式をドブロイの量子化を用いて書き直す：

$$m\frac{v^2}{r}=k\frac{e^2}{r^2}\quad\rightarrow\quad\frac{p^2}{m}=k\frac{e^2}{r}\quad\rightarrow\quad\frac{n^2\hbar^2}{mr^2}=k\frac{e^2}{r}$$

この関係式から

$$r_n=\frac{n^2\hbar^2}{mke^2}\qquad と\qquad E_n=-k\frac{e^2}{2r_n}=-\frac{mk^2e^4}{n^2\hbar^2}$$

を見いだすことができる。すなわち、水素原子中の電子は整数 n によって表される半径とエネルギーをとることができる。これらは連続的に任意の値を取るのではなく、整数 n によって特徴付けられるとびとびの値を取るのである。E_n を特にエネルギー準位という。

このように、とびとびの値を取ることを一般的に量子化という。

問３　以上の関係式を各自確認せよ。

問４　具体的な数値を代入し、$E_n-\frac{13.6}{n^2}\,[eV],\quad r_n=0.529\times10^{-10}n^2\,[m]$となることを示せ。

さらにボーアは原子に吸収、原子から放出される光のエネルギーは

$$E_{photon}=\frac{mk^2e^4}{\hbar^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right)$$

によって与えられると考えた。

問５　リュードベリ定数を計算せよ。

問６　原子から放出される（または吸収される）光が線スペクトルとなることを説明せよ。

４回目　波動と粒子の二重性

アインシュタインの光電効果　　光子（波動）の粒子性
ドブロイの物質波　　　　　　　電子（粒子）の波動性

すべてのものは波動と粒子の二つの側面を持っている　−＞　二重性（duality）

波動の特徴　重ね合わせの原理による干渉
　　　　　　位相がそろうと強めあい、位相が逆になると弱めあう
　　　　　　空間に（そしてエネルギー、運動量的にも）連続的に分布する

粒子の特徴　１個、２個、・・・と数えることができる
　　　　　　空間に（そしてエネルギー、運動量的にも）離散的に分布する

これらは相いれないように見える。そして、同一のものが両方の性質を兼ね備えているとは全く想像できない。ここに、量子論が難しい、より正確には「理解しにくい」点がある。

・相対論はアインシュタイン１人によるところが大きかったが、量子論の完成には多くの天才を必要とした。
・創設者であるプランク、アインシュタイン、ドブロイですら量子論の本当の意味を受け入れることを拒否した（アインシュタインは「神がさいころを振るとは信じがたい」と言った）。

４．１　思考実験

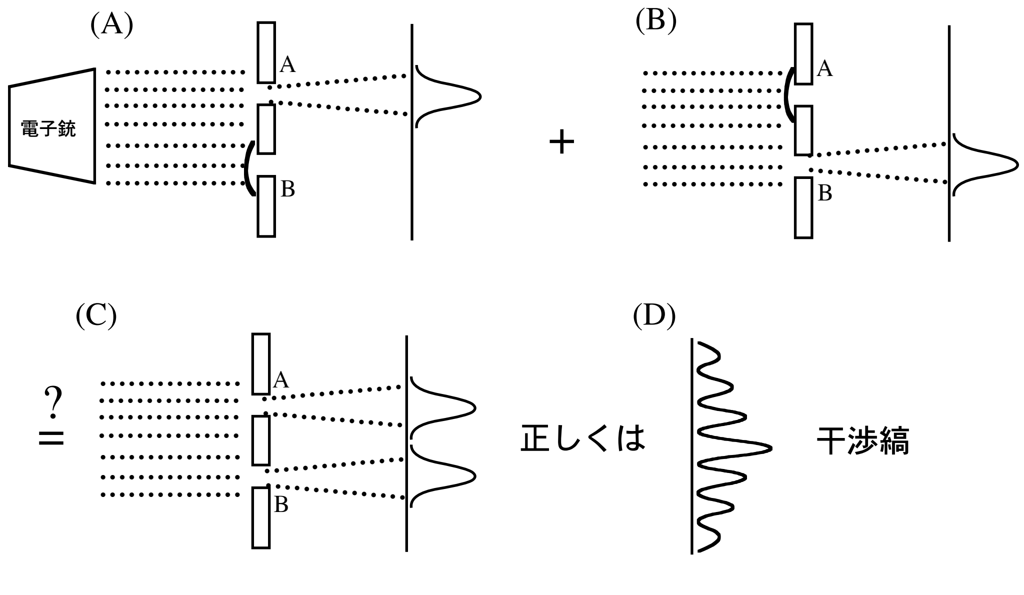


図１　二重スリットを通過する電子

電子の動きを、その一つ一つについて観測できたとしよう。(A) の様に、もしスリット B を閉じたとすると、電子はスリット A を通過せざるを得ない。逆に、(B) の様に、スリット A を閉じたとすると、電子はスリット B を通過せざるを得ない。それぞれ一方のスリットを「通過した」場合には、スクリーン上の強度は図に示した通りである。そこで、２つスリットを開けた場合には、１つ１つの電子はいずれか一方のスリットを通過するので、「全体の強度分布」は「それぞれの場合の強度分布」の和になることが、自然に予想される。しかし現実は、「波の干渉縞」の様な分布になる！

このことは、初めの仮定、すなわち下線部の内容が不適当であることを示している。すなわち、電子の一つ一つについてその奇跡を観測することがでず、そのため、電子がいずれか一方のスリットを通過したと言うこと自体、意味をなさなくなるのである。電子が波の様に振る舞っていると認めざるを得ない。波は確かに、スリット A, B を同時に通過し、その結果干渉縞を生じるのである。

一方で、さらに奇妙なことは、電子銃の強度を弱めると、スクリーンに電子が「あたる」たびに一ヶ所が輝点として輝く。そして、時間が経つにつれ、輝点数の分布が干渉縞のようになる（下左の図）。連続的に見える干渉縞の強度は、電子の数が非常に大きいためであり、その数が少なくなってくる（強度が弱くなる）と、一つ、二つと数えられるようになるのである。

干渉縞の強度はスクリーンに現れる電子の輝点数の確率分布と解釈する

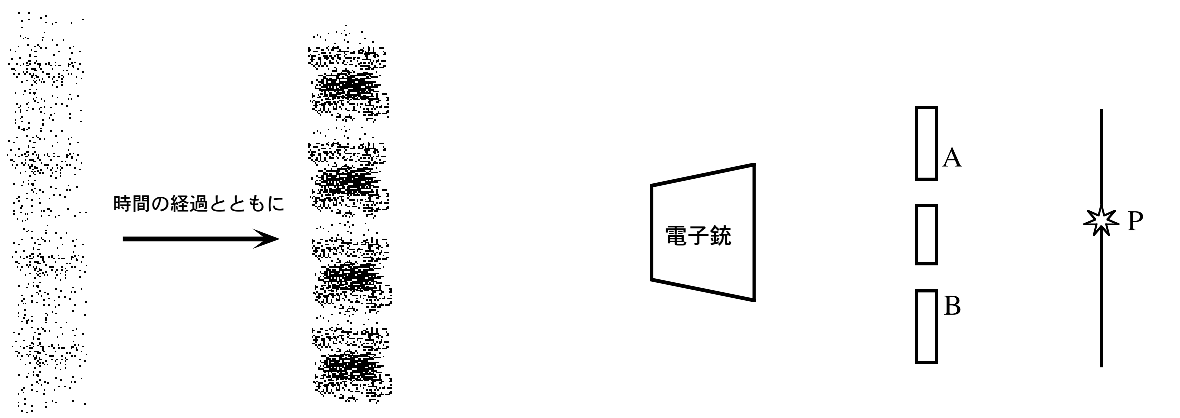


図２　電子の確率分布の様子

それでは上の右図のように、スクリーン上の一点 P が光った場合、そこにやって来た電子は、A, B いずれのスリットを通過してきたと言えるだろうか？答えは、「両方」なのである。そもそも、「A, B いずれのスリットを通過してきた．．．」と言うこと自体無意味になる。なぜなら、そのような質問をすること自体、電子の奇跡を測定できることを前提にしているからである。

さらに、どのようにして１個の電子が「A, B いずれのスリットを同時に通過する」ことができるのであろうか？二つに分かれるのであろうか？二つに分かれた電子を捕まえ

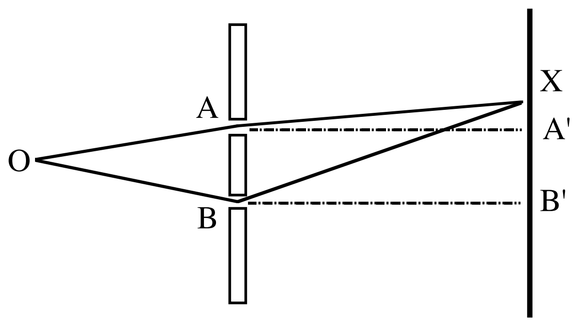
ることはできるのだろうか？この答えもまた否定的である。

スリット A, B の場所に電子の観測装置を置いてみよう。１つの電子が A を通過した瞬間にこの装置はそのことを知らせてくれる。このことによって、我々は、電子がスリット A を通過したことを知る。その後電子は図１ (A) の様な確率でスクリーン上に姿を現す。別の電子がスリット B を通過したとすると、その電子は図１ (B) の様な確率でスクリーン上に姿を現す。十分時間が経って、スクリーン上に電子が多数たまってくると、その分布の様子は、図１ (C) の様になるのであろう。

すなわち、我々が、スリット A,B のところに測定装置を置いたことによって、電子１個が A または B を通過したことが観測され、その時点で、電子は A, B の両方を通過するという波の性質を奪われてしまう。その結果、スクリーンから干渉縞は消えてしまうのである。

４．２　状態と波動関数

さらに考察を進めていこう。電子波を表す波動関数を ψ と書くことにする。思考実験の結果をどのように数学的に表現していくかが、我々の課題である。「波動」の特徴は重ね合わせの原理の結果「強めあい」「弱めあう」ことができる点にある。このことを可能にするのは、波動の「位相」という性質である。



$$l_{OAX} = OA + AX$$
$$l_{OBX} = OB + BX$$
$$OA = OB \qquad AX \neq BX$$

図３

図３に示したように、波がスリット A, B を通過してスクリーン上の点 X にやって来ることを考えよう。A を通過する波を ψ_{OAX}、B を通過する波を ψ_{OBX}とすると

$$\psi_{OAX} = a\exp(ikl_{OAX}), \quad \psi_{OBX} = b\exp(ikl_{OBX})$$

となる。ここに、a, b は A', B'をピークとする振幅であり、図１ (A), (B) の強度部分布の平方根である。平方根となる理由は、波の強度が振幅の２乗に比例するからである。量子論の教えるところによると、X における波動関数 ψ_{OX}は ψ_{OAX}と ψ_{OBX}の「重ね合わせ」であり、強度はその絶対値の２乗に比例する：

$$\begin{aligned} \psi_{OX} &= \psi_{OAX} + \psi_{OBX} = a\exp(ikl_{OAX}) + b\exp(ikl_{OBX}) \\ Strength &= |\psi_{OX}|^2 = |a\exp(ikl_{OAX}) + b\exp(ikl_{OBX})|^2 \end{aligned} \tag{2}$$

量子論ではψ_{OAX}を A を通過する「状態」、ψ_{OBX}を B を通過する「状態」という。X における電子の状態は、A を通過した「状態」と B を通過した「状態」の重ね合わせにあるという。

確率分布が、

「２つの波動関数の和」の絶対値の２乗（(2) 式）

ではなく、

「２つの波動関数の絶対値の「２乗の和」

であるとすると図１ (C) の結果が得られることになる。このこととあわせて、(2) 式の意味を、以下の演習によって確かめてみよう。

演習

２重スリットの配置を図のようにとる。簡単のために$a = b$として計算をする。

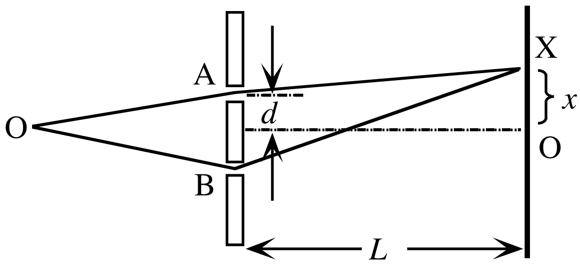


図４

（１）$a = 1$、$d = 0.1\,mm$、$L = 1\,m$として$\psi_{OX} = a\exp(ikl_{OAX}) + a\exp(ikl_{OBX})$を$x$の関数として、実部と虚部をプロットしてみよう。このとき、距離 OA, OB は等しいので、二つの項に共通の位相因子（初期位相）としてのみ寄与するので、この部分は考えなくて良いことに注意せよ。

（２）$|\psi_{OX}|^2 = |\exp(ikl_{OAX}) + \exp(ikl_{OBX})|^2$を$x$の関数としてプロットせよ。

（３）この結果と、$|\psi_{OAX}|^2 + |\psi_{OBX}|^2$とを比較せよ。

４．３　不確定性原理

今度は単スリットによる回折を思い起こしてみよう。

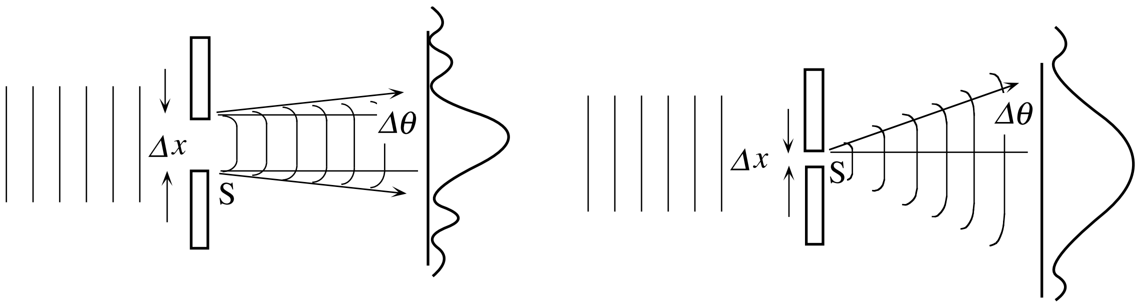


図５　単スリットの回折

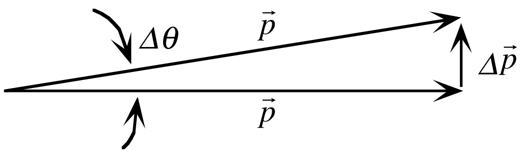
スリットの幅によって、波の回折の程度が変わる。詳しい実験、および計算によると、

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{\Delta x} \qquad (1)$$

であることが知られている。すなわち、スリットの幅を狭くするにつれて、それに反比例して回折角$\Delta\theta$は大きくなる。以上の内容を、電子波の場合に翻訳してみよう。

左からやって来る電子は一定の方向に進んで来るので、その運動量（の向き）は定まっている。このとき、電子ビームの幅はスリットの幅に比較して、十分広がっている注1。電子がスリットにやって来るまでの間は、測定装置はなく電子がどこを通っているかということを知ることはできない。

さて、スリットを通過することによって、スリットの位置 S において、電子の位置を Δx に制限する。見方を変えると、スリットは電子の位置をΔx の程度の精度で測定していることになる。同時に、電子は回折を起こし、その進行方向は$\Delta\theta$の程度不確定になってしまう。



$\Delta\theta$はそれほど大きくないとすると、直角三角形の 2 つの辺の長さはほぼ同じとしてよく、$\Delta p \sim p\Delta\theta$が成り立ち、これをドブロイの関係式を用いて書き直すと、

$$\Delta p \sim \frac{h}{\lambda}\Delta\theta$$

この関係式を (1) に代入すると、

$$\Delta p \Delta x \sim h$$

この関係式を、ハイゼンベルグの不確定性関係という。

一定に定まった運動量をもって左から入射してくる電子は、横に無限大に広がっているため、x 方向の位置は全く不確定である。スリットを通過することにより、位置がΔxの程度に定まるが、同時に運動量にはΔp程度の不確定さが生じることになるのである。

以上の説明で明らかなように、「不確定性関係」は「波動の基本法則」を、ドブロイの関係を用いて粒子の言葉（位置とか運動量）で言い換えたものと、言うことができる。

注１：一方向に進む平面波は、数学的には$\exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x})$と表される。ここで、波数ベクトル$\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)$が進行方向を表す。例えば、$\vec{k}=(0,0,k)$ととると、$\exp(i\omega t - i\vec{k}\cdot\vec{x})=$ $\exp(i\omega t - ikz)$となり、そこには x 依存性が全く無くなる。すなわち、この波は横（進行方向に垂直）方向に、無限大に広がっていることを示している。