関連話題と問題

四元運動量

$$(E, \vec{p}) = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$$ なので

$$(E, \vec{p}) = m\left(c^2 \frac{dt}{d\tau}, \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) \xrightarrow{c=1} m\frac{d}{d\tau}(t, \ \vec{x})$$

τとmはローレンツ変換の元で不変なので

$(E, \vec{p})$ は $(t, \ \vec{x})$ と同じように変換する

四元ベクトル

$(E, \vec{p})$ のように、ローレンツ（座標）変換の元で

$(t, \ \vec{x})$ と同じように変換する量を、四元ベクトルという

ベクトル

（１）成分をもった量（物理量＝観測される量）
（２）座標変換の元で一定の規則に従って移り変わる量

スカラー

座標変換の元で変換しない、一定（固有）の量

一般にはテンソル $T_{ijk\cdots}$

自然単位

光速度不変　＝＞　自然の基本的な定数 $c=1$

ローレンツ変換

$$t' = \frac{t-ux}{\sqrt{1-u^2}}, \quad x' = \frac{-ut+x}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y'=y, \quad z'=z$$

4元運動量

$$(E,\vec{p}) = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = m\frac{d}{d\tau}(t,\vec{x})$$

特に静止エネルギー

$$E=m$$

速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{p}}{E} \qquad \left(cf: \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \right)$$

不変量

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \Rightarrow E = \pm\sqrt{m^2+\vec{p}^2} \qquad \left(cf: \quad E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \right)$$

ニュートン極限　$u, v << 1$

ローレンツ変換ー＞ガリレイ変換

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}}, \quad x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$\longrightarrow$$

$$t' = t, \quad x' = -ut + x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

運動量

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \quad \to \quad m\vec{v}$$

エネルギー

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad \to \quad m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

超相対論極限　$u, v \to 1$

$$v = 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad v^2 \sim 1 - 2\varepsilon$$

$$(E, p) = \left(\frac{m}{\sqrt{2\varepsilon}}, \quad \frac{mv}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m}{\sqrt{2\varepsilon}}, \quad \frac{m(1-2\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon}} \right)$$

発散する

有限にとどめようとすると

$$\frac{m}{\sqrt{2\varepsilon}} = k \quad \Rightarrow \quad m = k\sqrt{2\varepsilon} \to 0$$

光速度で運動する粒子は質量ゼロ

$$E = p, \quad v = 1$$