関連話題と問題

四元運動量

$$(E,\vec{p}) = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$$ なので

$$(E,\vec{p}) = m\left(c^2\frac{dt}{d\tau},\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right) \xrightarrow{c=1} m\frac{d}{d\tau}(t,\ \vec{x})$$

[illegible]とmはローレンツ変換の元で不変なので

$(E,\vec{p})$ は $(t,\ \vec{x})$ と同じように変換する

四元ベクトル

$(E, \vec{p})$ のように、ローレンツ（座標）変換の元で

$(t,\ \vec{x})$ と同じように変換する量を、四元ベクトルという

ベクトル

（１）成分をもった量（物理量＝観測される量）
（２）座標変換の元で一定の規則に従って移り変わる量

スカラー

座標変換の元で変換しない、一定（固有）の量

一般にはテンソル

$T_{ijk\cdots}$

自然単位

光速度不変　=>　自然の基本的な定数　$c = 1$

ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}}, \quad x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

4元運動量

$$(E, \vec{p}) = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = m \frac{d}{d\tau}(t, \vec{x})$$

特に静止エネルギー

$$E = m$$

速度

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\vec{p}}{E} \qquad \left(cf: \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \right)$$

不変量

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \Rightarrow E = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \qquad \left(cf: \quad E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \right)$$

ニュートン極限　$u, v << 1$

ローレンツ変換ー＞ガリレイ変換

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}}, \quad x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

$$\longrightarrow$$

$$t' = t, \quad x' = -ut + x, \quad y' = y, \quad z' = z$$

運動量

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \quad \rightarrow \quad m\vec{v}$$

エネルギー

$$E = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \quad \rightarrow \quad m + \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

超相対論極限

$$u, v \to 1$$

$$v = 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad v^2 \sim 1 - 2\varepsilon$$

$$(E, p) = \left(\frac{m}{\sqrt{2\varepsilon}}, \quad \frac{mv}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m}{\sqrt{2\varepsilon}}, \quad \frac{m(1-2\varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon}} \right)$$

発散する

有限の値 k にとどめようとすると

$$\frac{m}{\sqrt{2\varepsilon}} = k \quad \Rightarrow \quad m = k\sqrt{2\varepsilon} \to 0$$

光速度で運動する粒子は質量ゼロ

$$E = p, \quad v = 1$$

ミンコフスキー空間

ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - ux}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$x' = \frac{-ut + x}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\rightarrow \quad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \begin{pmatrix} 1 & -u \\ -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

ここで $\cosh\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \sinh\phi = -\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

さらに

虚数時間と虚数角度を導入

$$t \to it \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -i\sinh\phi \\ i\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$$\phi \to i\theta \qquad \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換は回転と密接に関係

さらに虚数の導入で不変量は

$$+t^2 - x^2 \to -t^2 - x^2$$

$$\left(+E^2 - p^2 \to -E^2 - p^2 \right) \qquad 計量$$

反粒子(1926, P.A.M. Dirac)

理論的に予言された

エネルギーと運動量が同等に扱われるとすると

$$(E,\vec{p})=\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}},\ \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)=m\frac{d}{d\tau}(t,\vec{x})$$

関係式　$E=\sqrt{m^2+\vec{p}^2}$　は、E と $\vec{p}$ について非対称

２乗して　$E^2=m^2+\vec{p}^2$　とすると　$E=\pm\sqrt{m^2+\vec{p}^2}$

のように正負の2つの解が存在。Diracはこれらに対応するものとして、粒子と反粒子を導入した

Diracの芸当

電子の相対論的電子論で行ったこと＝Dirac方程式

$E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ に対応する線形の関係式を考察した

$$E = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + bm$$

線形の式を2乗すると

$$E^2 = \left(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + bm\right)^2$$

$$= b^2 m^2 + a_1^2 p_1^2 + a_2^2 p_2^2 + a_3^2 p_3^2 + 2ba_1 m p_1 + 2ba_2 m p_2 + 2ba_3 m p_3$$

$$+2a_1 a_2 p_1 p_2 + 2a_2 a_3 p_2 p_3 + 2a_3 a_1 p_3 p_1$$

この式を $E^2 = m^2 + \vec{p}^2 = m^2 + {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2$

にするような係数 a_1, a_2, a_3, b は存在しない。

しかし

係数を「数」ではなく、「行列（演算子）」としては、、、

$$E^2 = (a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + bm)^2$$

$$= b^2 m^2 + a_1^2 p_1^2 + a_2^2 p_2^2 + a_3^2 p_3^2$$

$$+ (ba_1 + a_1 b) mp_1 + (ba_2 + a_2 b) mp_2 + (ba_3 + a_3 b) mp_3$$

$$+ (a_1 a_2 + a_2 a_1) p_1 p_2 + (a_2 a_3 + a_3 a_2) p_2 p_3 + (a_3 a_1 + a_1 a_3) p_3 p_1$$

として

$$\boxed{\begin{array}{l} b^2 = a_1^2 = a_2^2 = a_3^2, \\ ba_1 + a_1 b = ba_2 + a_2 b = ba_3 + a_3 b = \\ a_1 a_2 + a_2 a_1 = a_2 a_3 + a_3 a_2 = a_3 a_1 + a_1 a_3 = 0 \end{array}}$$

を満たすような行列　a_1, a_2, a_3, b　を探せばよい

答え

この様な行列は4x4

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Dirac行列

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli行列

問題：化学反応の前後における質量保存の法則は厳密には成り立たない。どの程度の破れが生じるか。

$$\mathrm{C} + \mathrm{O}_2 \rightarrow \mathrm{CO}_2 + 394\ [\mathrm{kJ}]$$

１モルあたりの反応エネルギーに相当する質量は

$$\delta M_Q = \frac{Q}{c^2}$$

これを例えば炭素１モルの質量12 gと比較すればよい

$$\Delta = \frac{\delta M_Q}{M_{\mathrm{C}}} \sim \frac{1}{3} \times 10^{-9}$$

問題：100 V/mの電場で電子、陽子を1秒間加速したときのそれぞれの速さと獲得するエネルギーを求めよ。

電場 ε のもとで電荷 q が受ける力 $F = q\varepsilon$ ⇨ $a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{q\varepsilon}{m}$

$$\frac{v}{c} = \frac{\dfrac{at}{c}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{at}{c}\right)^2}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = mc^2\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}$$

$$a_e = \frac{q\varepsilon}{m_e} = \frac{1.6\times10^{-19}\times100}{9.11\times10^{-31}} \sim 1.8\times10^{13}\ [m/s^2]$$

$$a_p = \frac{q\varepsilon}{m_p} = \frac{1.6\times10^{-19}\times100}{1.67\times10^{-27}} \sim 9.6\times10^{9}\ [m/s^2]$$

$$E_e = m_e c^2\sqrt{1+\left(\frac{1.8\times10^{13}}{3\times10^8}\right)^2} \sim m_e c^2\times60000$$

$$E_p = m_p c^2\sqrt{1+\left(\frac{9.6\times10^{9}}{3\times10^8}\right)^2} \sim m_p c^2\times30$$

問題：阪大核物理研究センターの加速器は陽子の運動エネルギーを400 MeVまで加速する。そのときの陽子の速さを光速度の比で求めよ。また、Spring-8のシンクロトロンでは電子が8GeVのエネルギーで運動している。この電子の速さを光速度の比で求めよ。

$$E=\sqrt{m^2+p^2},\quad K=\sqrt{m^2+p^2}-m \quad \Rightarrow \quad p^2=K^2+2mK$$

$$v=\frac{p}{E}=\frac{\sqrt{K^2+2mK}}{K+m}\xrightarrow{K<<m}\frac{\sqrt{2mK}}{m}=\frac{p}{m}$$

$$\xrightarrow{K>>m}\frac{\sqrt{1+2\delta}}{1+\delta}\sim 1-\frac{1}{2}\delta^2+\dots \quad \delta\equiv\frac{m}{K}$$

$$v_{RCNP}=\frac{\sqrt{400^2+2\times 940\times 400}}{400+940}\sim 70\ \%$$

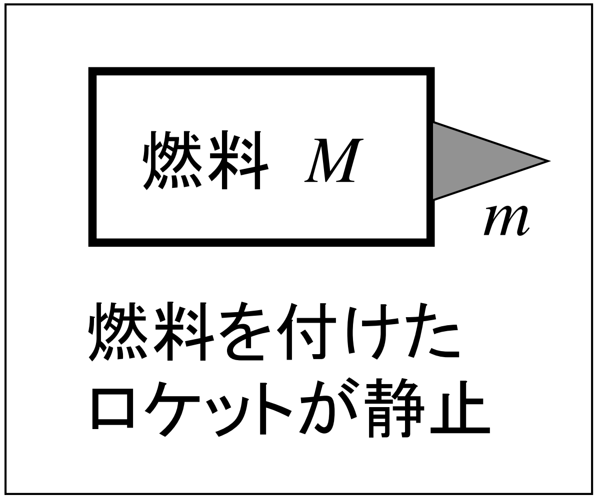
$$v_{SPing-8}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{0.5}{8000}\right)^2$$

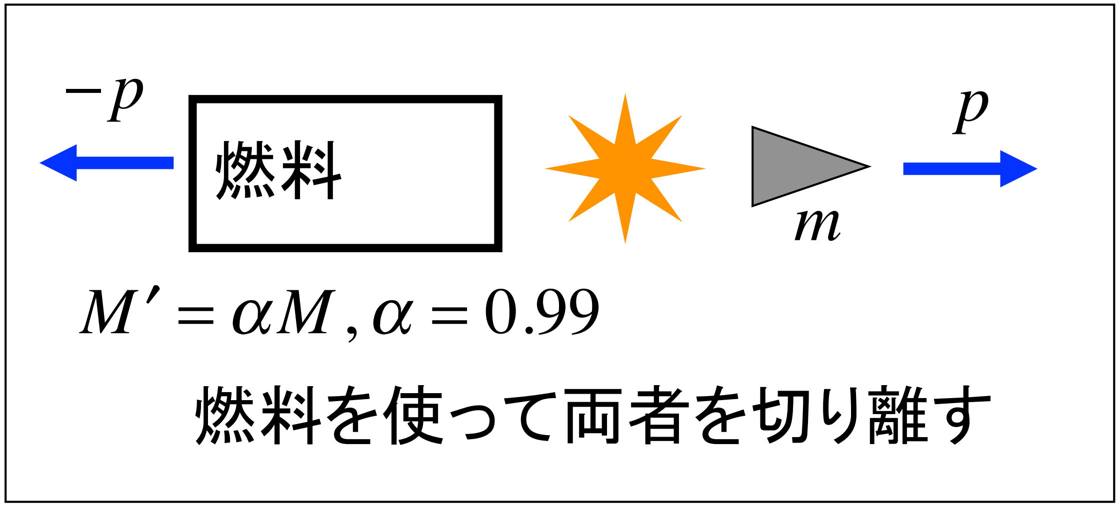
問題:50光年離れた場所まで、1年で着いて1年滞在し1年で戻ってきたいと思う(合計3年)。往復の際は一定の速さで飛行するとして、その速さを求めよ。また、エネルギー効率を100%として、動力は原子力を使うとしてそのために必要な核燃料の量を推定してみよ。

まず50光年を1年で行くための速さは

$$T_{Rocket} = \sqrt{1-u^2}\, T_{Earth} = \frac{T_{Earth}}{50} \quad \Rightarrow \quad u = 0.999$$

核燃料はその質量の1%をエネルギーとして解放するとする





エネルギーの保存

$$\varepsilon = M + m = \sqrt{M'^2 + p^2} + \sqrt{m^2 + p^2}, \qquad M' = \alpha M$$

$$p = \frac{\left(\varepsilon^2 - (M' + m)^2\right)^{1/2}\left(\varepsilon^2 - (M' - m)^2\right)^{1/2}}{2\varepsilon}$$

$$v_m = \frac{p}{E} = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m}{p}\right)^2}}$$

$$\frac{m}{p}=\frac{m}{\dfrac{\left(\varepsilon^2-\left(M'+m\right)^2\right)^{1/2}\left(\varepsilon^2-\left(M'-m\right)^2\right)^{1/2}}{2\varepsilon}}, \qquad \begin{array}{l}\varepsilon=m+M\\ M'=\alpha M\end{array},$$

$$=\frac{2(1+x)}{\left((x+1)^2-(\alpha x+1)^2\right)^{1/2}\left((x+1)^2-(\alpha x-1)^2\right)^{1/2}}$$

$$v_m=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{m}{p}\right)^2}}$$