



# 原子核反応論入門

NITEP lecture series



おがた かずゆき

緒方 一介

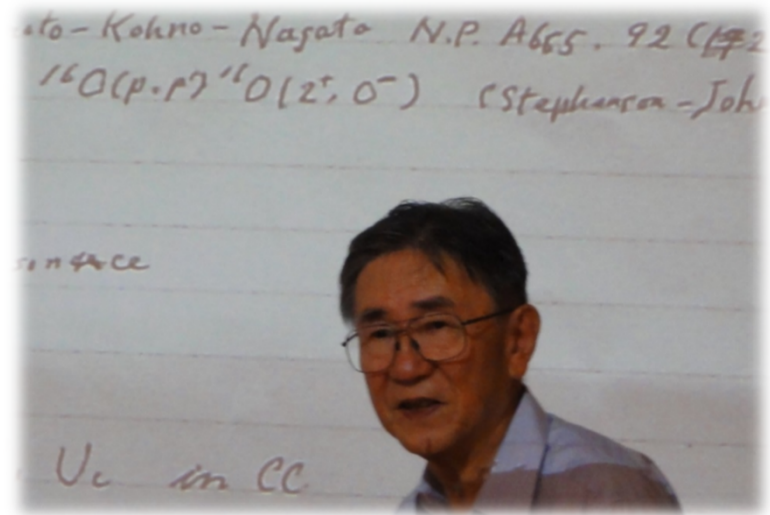
大阪市大&NITEP / 大阪大学 RCNP

1. 核反応研究の概観と模型空間の設定
2. 波束の理論と定常散乱波の理論
3. Lippmann-Schwinger方程式と遷移行列
4. 多重散乱理論と微視的光学ポテンシャル
5. 3体反応の難点とその克服
6. 連続状態離散化チャネル結合法(CDCC)
7. CDCCを用いた反応研究の紹介

# 略歴

- 1996-1997年度(M)  
九州大学大学院にて、河合光路名誉教授の指導の下、核反応の研究に着手。
- 1998年度～2001年12月(D → PD)  
2001年3月、学位取得。4月、大阪大学核物理研究センターにCOE特別講師として着任。
- 2002年1月～2010年度(助手 → 助教)  
九州大学大学院理学研究院において反応研究を進める。
- 2011年度～ (准教授)  
2011年4月、大阪大学核物理研究センターに着任。  
2018年4月より、大阪市立大学大学院理学研究科 任期付き准教授(クロスアポイントメント 2022年度末まで)。

# 1. 核反応研究の概観と 模型空間の設定

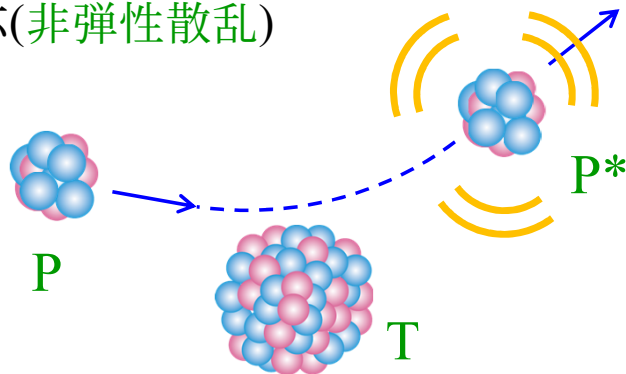


原子核反応または略して核反応は一つの原子核と他の粒子との相互作用によって起こる現象の総称である。その様相は非常に多彩である。その機構を明らかにすることが核反応論の目的である。また、それによって反応に関与する原子核、衝突粒子の状態についての情報を得ることも重要な課題である。

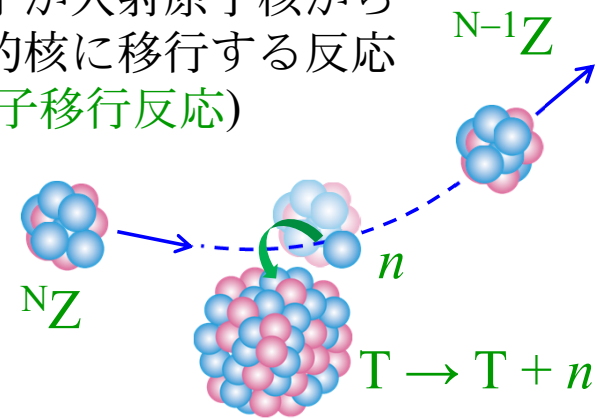
河合 光路『核反応』（丸善）

# 多彩な核反応

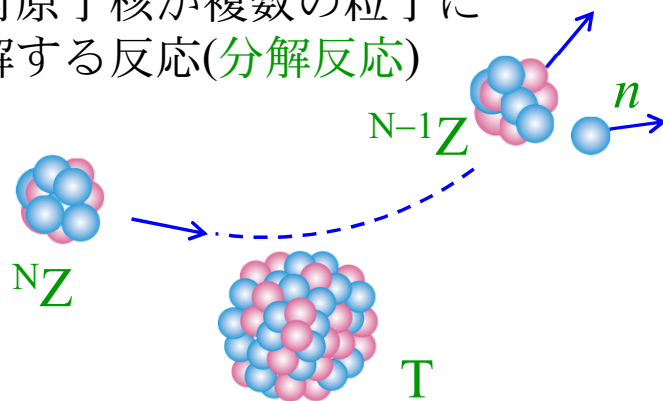
- 入射原子核が励起する反応(非弾性散乱)



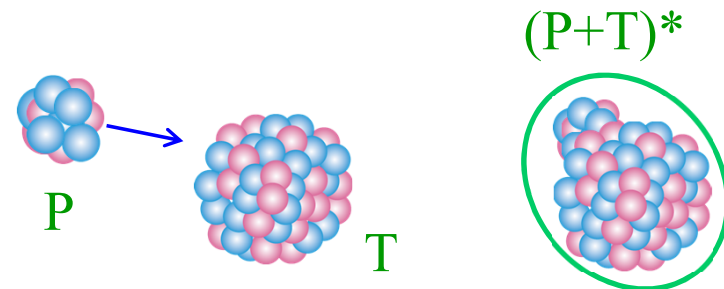
- 核子が入射原子核から標的核に移行する反応(核子移行反応)



- 入射原子核が複数の粒子に分解する反応(分解反応)



- 入射原子核が標的核に吸収される反応(融合反応)





# 原子核反応の描述

ある反応が起きる確率は、次の遷移行列が得られれば、その絶対値自乗(の定数倍)によって与えられる(3.を参照)。

$$T_{\beta\alpha} = \langle \Phi_{\beta}^{\text{free}} | V_{\beta} | \Psi_{\alpha} \rangle$$

$\Phi_{\beta}^{\text{free}}$  : 終状態の構成粒子の波動関数と、それらの間の自由波の積

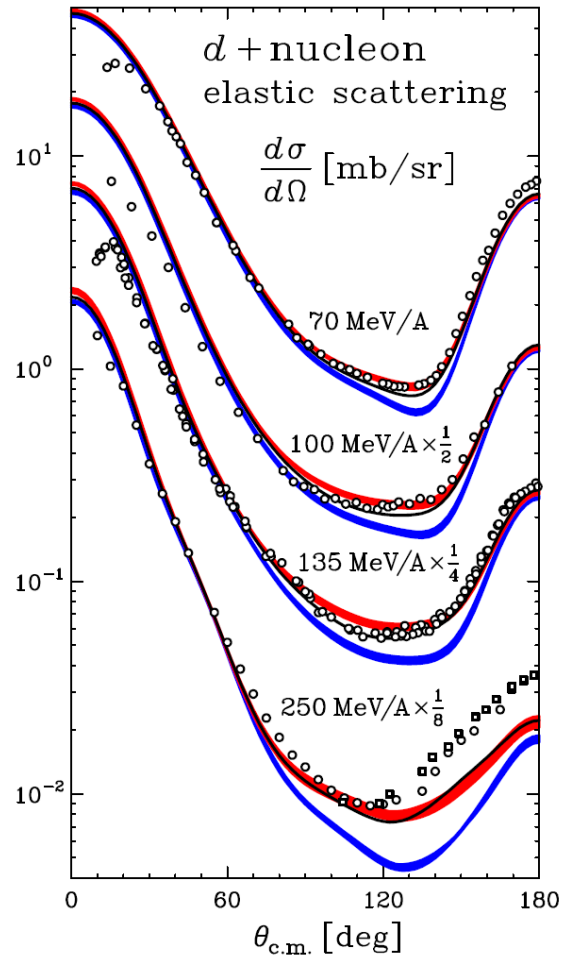
$V_{\beta}$  : 終状態の構成粒子間の相互作用

$\Psi_{\alpha}$  : 始状態( $\neq$ 入射状態)の正確な波動関数

系の基本構成要素(核子)の間の相互作用はよくわかっているのに、何が難しいのか?

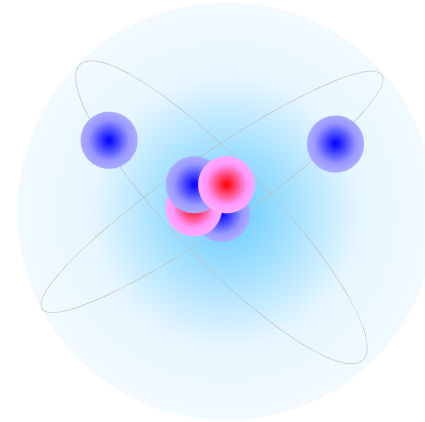
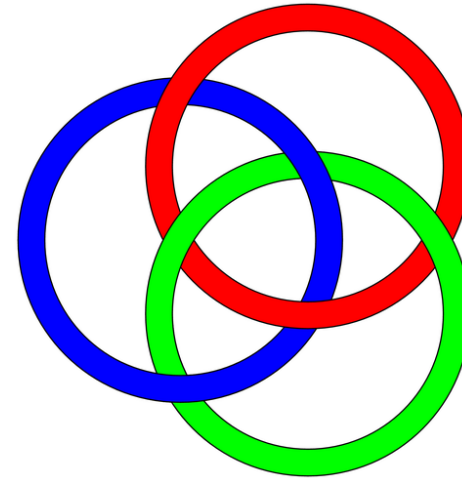
A. 多体系(多自由度)だから。+ 相互作用がえぐいから。

# 3粒子系の豊かさ



*K. Sekiguchi et al., Phys. Rev. C 65, 034003 (2002).*

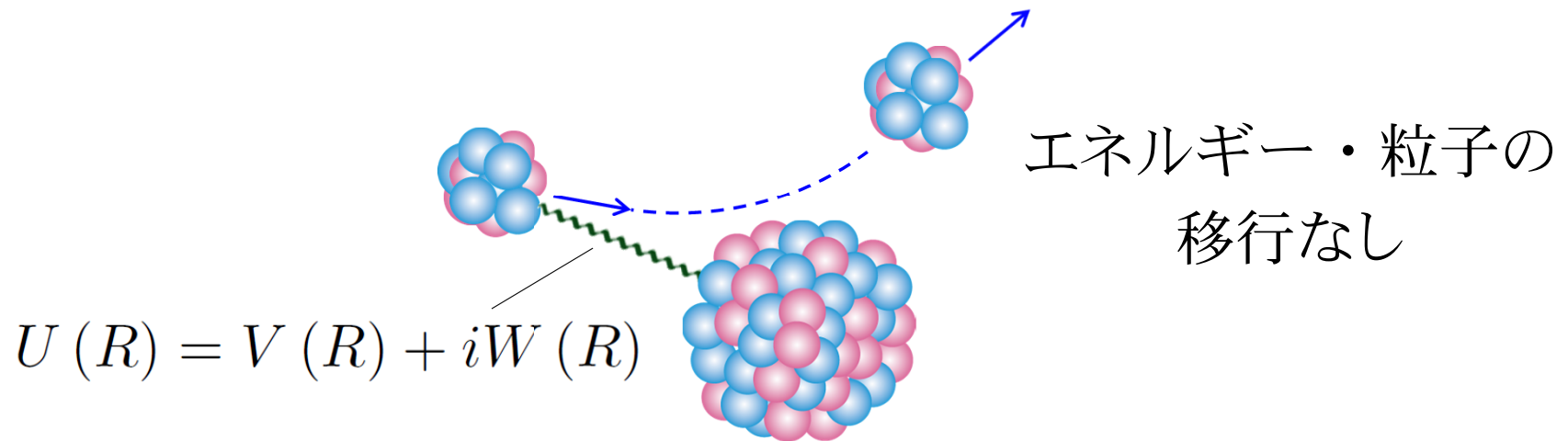
基礎相互作用がわかってても...



ボロミアン核( ${}^6\text{He}$ )

# 原子核反応の多自由度性の象徴

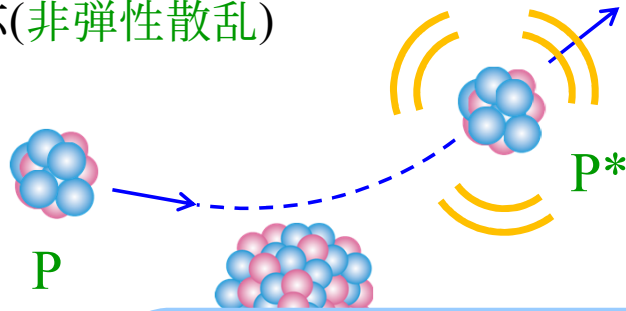
光学ポテンシャル = 弾性散乱を記述する複素一体ポテンシャル



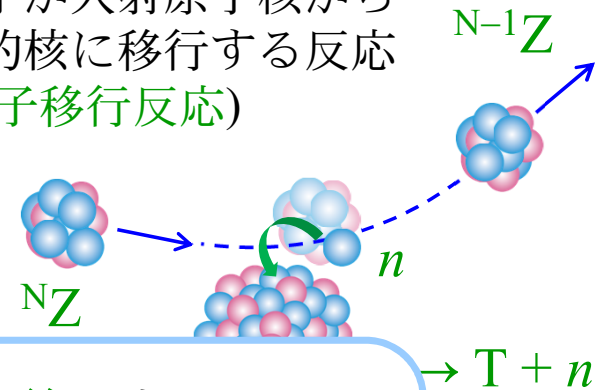
- 弾性散乱のような簡単な反応の記述に、どうしてそのような得体の知れないものが必要なのか?
- $W(R)$  は入射流束の吸収をもたらす。この吸収とは何か?

# 多彩な核反応

- 入射原子核が励起する反応(非弾性散乱)



- 核子が入射原子核から標的核に移行する反応(核子移行反応)

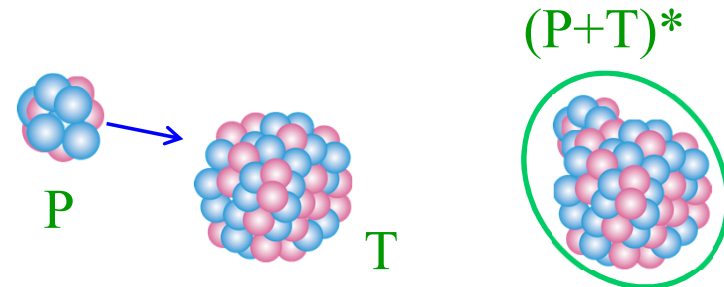


多種多様な反応が弾性散乱の背後にあり、その全てが“吸収”として扱われる(吸収 ≠ 融合)

- 入射原子核が標的核を分解する反応(分解反応)



- 入射原子核が標的核と融合する反応(融合反応)



吸収される

# 模型空間の設定(核反応論の“神髄”)

弾性チャンネル以外の(視ない)チャンネル: **Q**  
(追跡不可能)

流束の還元

弾性(視る)チャンネル: **P**  
(チャンネル: 反応系の指標)

流束の還元

吸収 = 流束の消失

cf. 全反応断面積

注意: 弾性(視る)チャンネル以外に逃げる流束の総量は記述可能。

# Feshbachの射影演算子の方法

$$(H - E)\Psi = 0, \quad \Psi = \hat{P}\Psi + \hat{Q}\Psi.$$

$$\hat{P} + \hat{Q} = 1, \quad \hat{P}^2 = \hat{P}, \quad \hat{Q}^2 = \hat{Q}, \quad \hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0.$$

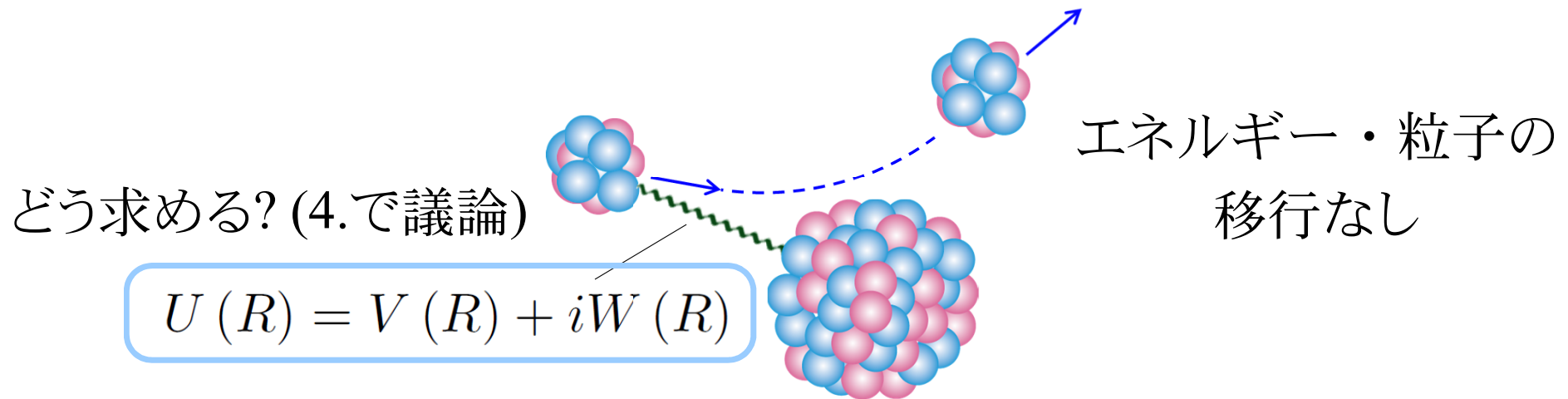
$$\left\{ \begin{array}{l} (\hat{P}H\hat{P} - E)\hat{P}\Psi + \hat{P}H\hat{Q}\Psi = 0, \\ (\hat{Q}H\hat{Q} - E)\hat{Q}\Psi + \hat{Q}H\hat{P}\Psi = 0. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{※}i\eta\text{の意味は3.を参照} \\ \hat{Q}\Psi = \frac{1}{E - \hat{Q}H\hat{Q} + i\eta}\hat{Q}H\hat{P}\Psi. \end{array}$$

$$\left( \hat{P}H\hat{P} + \hat{P}H\hat{Q} \frac{1}{E - \hat{Q}H\hat{Q} + i\eta} \hat{Q}H\hat{P} - E \right) \hat{P}\Psi = 0.$$

エネルギー依存, 複素, 非局所相互作用

# 原子核反応の多自由度性の象徴

光学ポテンシャル = 弾性散乱を記述する複素一体ポテンシャル



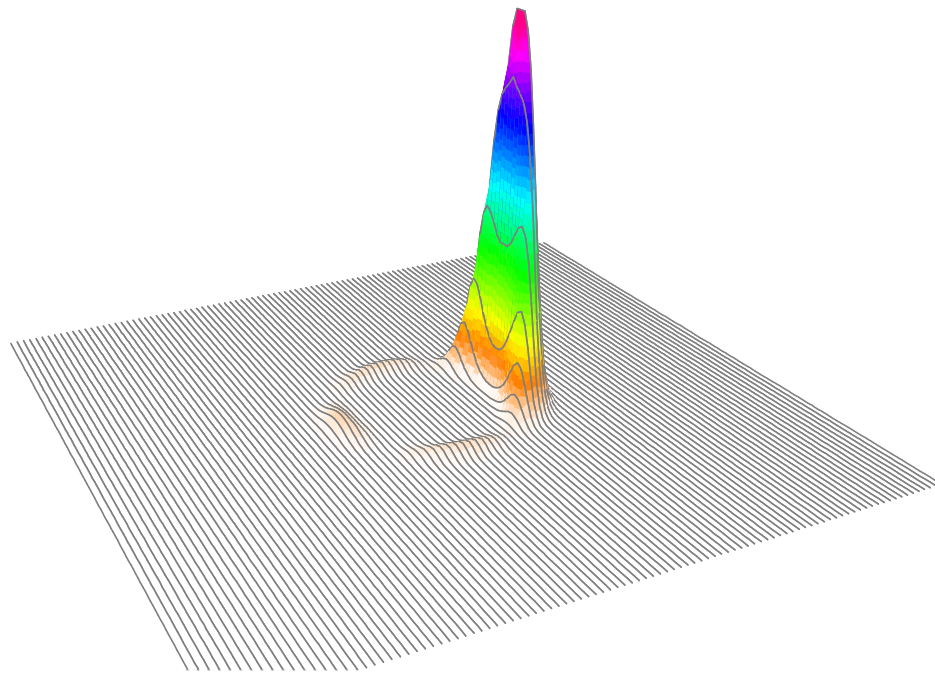
- 弾性散乱のような~~簡単な~~反応の記述に、どうしてそのような得体の知れないものが必要なのか?
- $W(R)$  は入射流束の吸収をもたらす。この吸収とは何か?

# 核反応研究の概観と模型空間の設定のまとめ

- 核反応研究の目的は、核子多体系の動的な振る舞いの理解である。
- 核反応は極めて多彩な現象であり、入射・標的核(反応系)の組み合わせ、入射エネルギーによって様々な反応が起きる。
- 少数個のチャンネルのみを視る(陽に扱う)際、膨大な数の視ていないチャンネルが背後に存在するため、現象の記述に得体の知れないポテンシャルが必要となる。その代表例が、弾性散乱を記述する際に現れる複素一体ポテンシャル(光学ポテンシャル)である。
- 直接反応研究の1つの神髄は、模型空間の設定にある。
- 近年では核反応の第一原理計算も発達しており、非常に重要(ただしその価値観はこの講義の思想とは異なる)。



## 2. 波束の理論と定常散乱波の理論



$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta_R) \frac{e^{iKR}}{R}$$



# 散乱理論の教科書によれば…

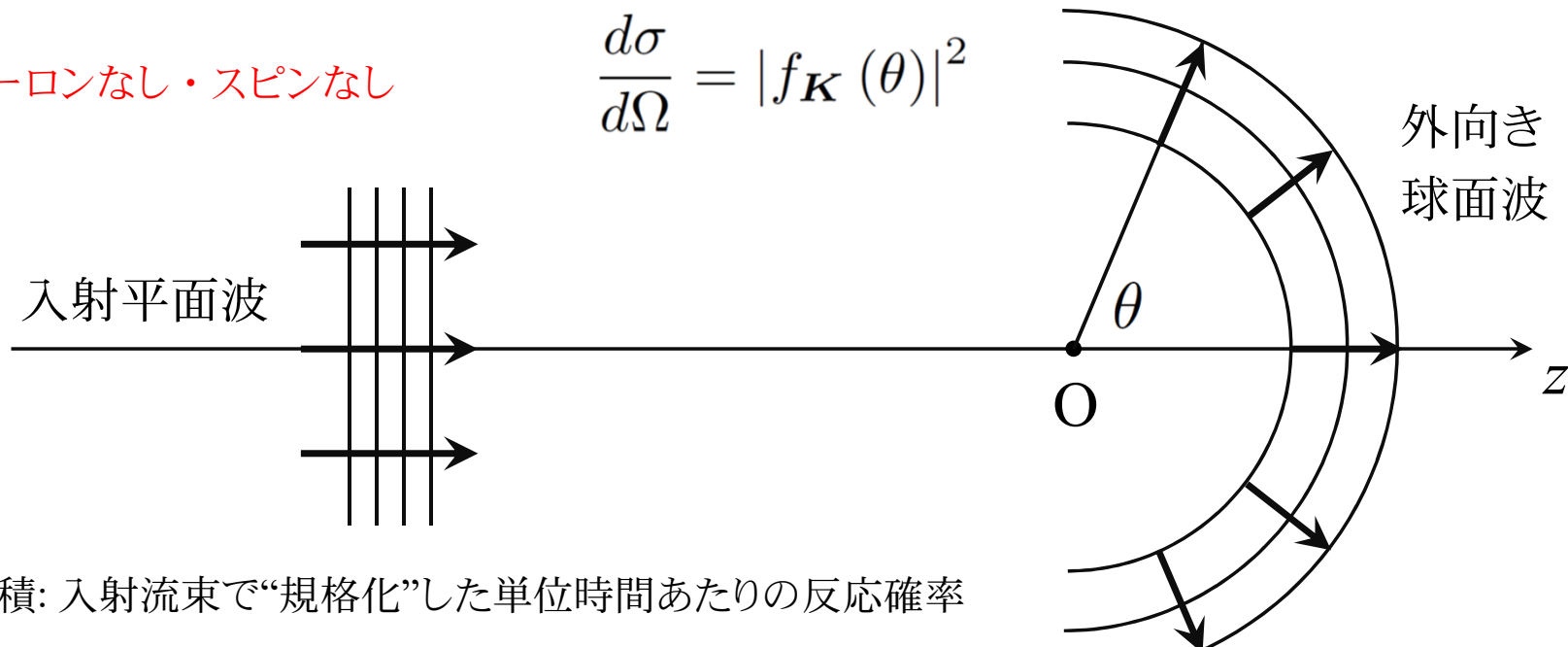
適切な境界条件を満足する散乱波は、無限遠方において

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta_R) \frac{e^{iKR}}{R} \equiv \chi_{\mathbf{K}}^{\text{asym}}(\mathbf{R})$$

となる。このとき、微分散乱断面積は以下のように与えられる。

クーロンなし・スピンなし

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{K}}(\theta)|^2$$



※断面積: 入射流束で“規格化”した単位時間あたりの反応確率

# 疑問

- 突然「適切な境界条件」と言われても....。
- 仮にそういう形で散乱波を表現しただけだとしても、 $|f_{\mathbf{k}}(\theta)|^2$  が観測される断面積になるというのはどうにも腑に落ちない。
- 波動関数の時間依存性はどこに？
- 入射平面波って、宇宙の彼方まで広がっているよね？



散乱理論は、実験条件(および直観的な描像)と合致しない。

## 本単元の目的

直観と合致する波束の理論と定常散乱波の理論がどのような関係にあるのかを明らかにする。

# 波束状態

反応の初期状態(初期波束):

$$\Phi(t_0) = \underbrace{\mathcal{G}}_{(2\pi)^{-3/2}}(\mathbf{R} - \underbrace{\mathbf{Z}_0}_{\text{波束中心}}) e^{i\underbrace{\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}}_{\text{波束の運動量(波数)}}$$
$$t_0 = -|\mathbf{Z}_0| \frac{\underbrace{\mu}_{\text{換算質量}}}{\hbar K_0} \quad (\leftarrow \text{初期時刻の定義})$$

$\mathcal{G}$ はエンベロープ関数で、波束の形状を表す(たとえばガウス型)。ここではその具体形は問わない。

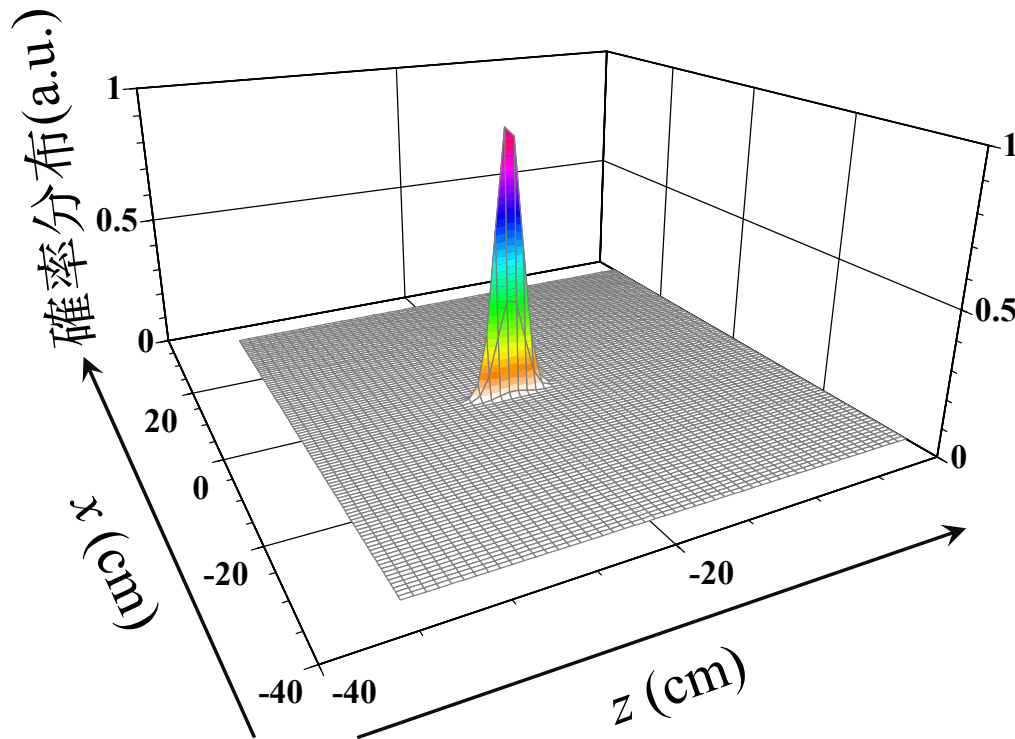
任意の時刻における波束状態:

$$\Phi(t) = e^{-i\underbrace{\hat{H}}_{\text{系のハミルトニアン}}/\hbar(t-t_0)} \underbrace{\mathcal{G}}_{(2\pi)^{-3/2}}(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}}$$

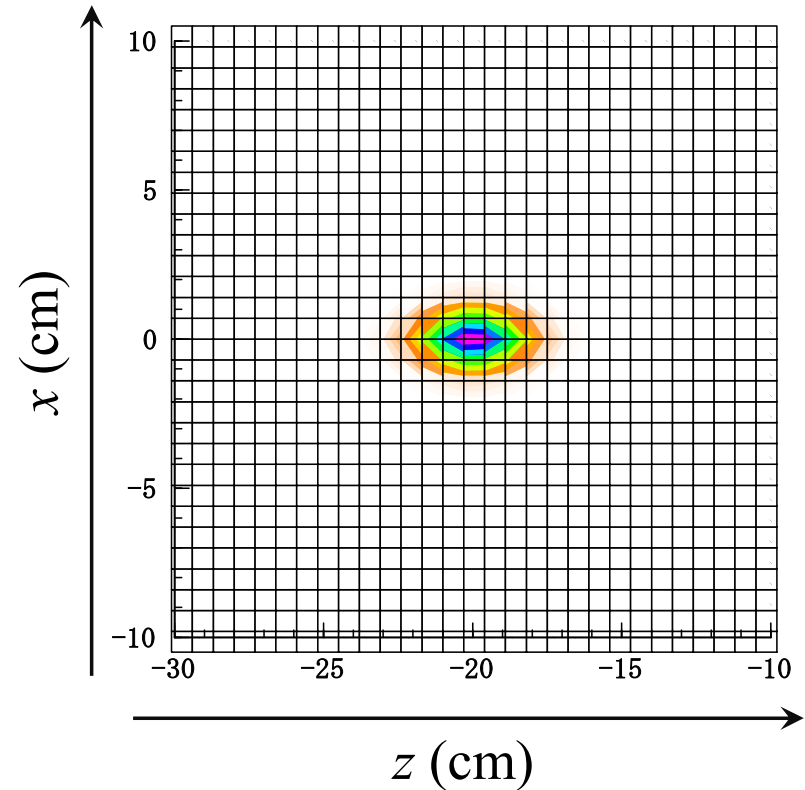
# 初期波束の例(イメージ)

$$v_0 t = -20 \text{ (cm)}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu z^2}$$



$$y = 0$$



※現実の波束のx, y方向の広がりはずっと狭い。

## 3つのスケール

### 反応領域の大きさ

fm のスケール。換算ド・ブロイ波長  $1/K_0$  に相当。

※波数  $K_0$  の波は位置変化  $1/K_0$  を位相変化 1 として“検出”する。

### 波束の広がり

典型的には cm のスケール。長さ  $w$  として表現する。このとき  
運動量(波数)は幅  $1/w$  ( $\sim 10^{-13}$  1/fm)に集中している。

### 漸近領域の距離

典型的には m のスケール。粒子を撃ち込んだり検出器で測定したりする領域。波動関数の漸近形が利用できる。 $|Z_0|$  に相当。

$$\frac{1}{K_0} \ll w \ll |Z_0|$$

# 初期波束のフーリエ展開

$$\begin{aligned}\int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}\Phi(t_0)d\mathbf{R} &= \int e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}\mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)\underbrace{e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}}}_{(2\pi)^{-3/2}}d\mathbf{R} \\ &= \underbrace{(2\pi)^{-3/2}}_{(2\pi)^{-3/2}}\int \mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}}d\mathbf{R} \\ &= \underbrace{(2\pi)^{-3/2}}_{(2\pi)^{-3/2}}e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}\int \mathcal{G}(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{Z}_0)}d\mathbf{R} \\ &= \underbrace{(2\pi)^{-3/2}}_{(2\pi)^{-3/2}}\boxed{a(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)}e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0} \\ &\quad \mathcal{G} \text{ のフーリエ変換} (\sim 1/w \text{ の極めて狭い幅に分布})\end{aligned}$$

逆変換:  $\Phi(t_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)e^{-i(\mathbf{P}-\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{Z}_0}\underbrace{e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}}_{(2\pi)^{-3/2}}d\mathbf{P}$

初期波束は  $\mathbf{P} \sim \mathbf{K}_0$  に集中

# 初期波束の定常波動関数による表現

$$\boxed{\Phi(t_0)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) e^{-i(\mathbf{P} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0} \underbrace{e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}}_{(2\pi)^{-3/2}} d\mathbf{P}$$

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$  に局在

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \boxed{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}}(\theta_R) \boxed{\frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{R}}$$

運動量  $\mathbf{K}$

$\mathbf{R} \sim \mathbf{Z}_0$  で運動量  $\sim -\mathbf{K}$



$$I_0 \equiv (\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}), \Phi(t_0)) \approx \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \Phi(t_0) d\mathbf{R}$$

逆変換



$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \underbrace{e^{-i(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{Z}_0}}_{(2\pi)^{-3/2}}$$

$$\boxed{\Phi(t_0) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}}$$



# 測定がなされる時刻での波束と定常波動関数

$$\Phi(t) = e^{-(i\hat{H}/\hbar)(t-t_0)} \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} = e^{-(i\hat{H}/\hbar)(t-t_0)} \Phi(t_0)$$

$$\Phi(t_0) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \overset{(2\pi)^{-3/2}}{e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0}} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

↓  $\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R})$  は  $H$  の固有状態(固有値  $E$ )

$$\Phi(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) d\mathbf{K}$$

幅  $\sim 1/w$

↓ 測定領域では漸近系が利用可

$$\Phi(t) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int \boxed{a(\mathbf{K} - \mathbf{K}_0)} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_0} e^{-(iE/\hbar)(t-t_0)} \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} + f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}}{R} \right] d\mathbf{K} \equiv \Phi_{\text{asym}}(t)$$

方針:  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{K} - \mathbf{K}_0$  とし、 $E$  と  $K$  を  $\mathbf{Q}$  の1次までで評価する。

# 定常散乱波の波数・エネルギー

$$Q \equiv K - K_0 \quad \sim 10^{-11} \text{ MeV}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} K^2 = \frac{\hbar^2}{2\mu} (\mathbf{K}_0 + \mathbf{Q})^2 \sim \frac{\hbar^2}{2\mu} K_0^2 + \frac{\hbar^2}{\mu} (\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Q}) = E_0 + \boxed{\hbar (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q})}$$

$$K^2 \sim K_0^2 + 2(\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{Q}) \rightarrow K \sim K_0 + (\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{Q})$$



積分変数を  $\mathbf{K}$  から  $\mathbf{Q}$  に変更

$$\Phi_{\text{asym}}(t) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{Q})(t-t_0)} \\ \times \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i(\mathbf{Q} + \mathbf{K}_0) \cdot \mathbf{R}} + f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0 \cdot \mathbf{Q})R}}{R} \right] d\mathbf{Q}$$

# 波束の平面波成分

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \\
 &\quad \times e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})(t-t_0)} e^{i(\mathbf{Q}+\mathbf{K}_0)\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{Q} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \underbrace{-|\mathbf{Z}_0| \frac{\mu}{\hbar K_0}}_{\substack{\text{---} \\ \text{---}}} \\
 &\quad \times \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t} e^{i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t_0} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} d\mathbf{Q} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \boxed{\int a(\mathbf{Q}) e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})t} d\mathbf{Q}} \\
 &\quad \quad \quad = (2\pi)^3 \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t) \\
 &= \boxed{e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_0\cdot\mathbf{R}} \boxed{\mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)}
 \end{aligned}$$

Trivialな時間依存性

中心が速度  $\mathbf{v}_0$  で運動する波束  
(入射波束の形を保持)

# 波束の拡散は？

波束の**拡散**を扱うには、 **$Q$** の高次項が必要。ただし今の場合、その効果は無視して良い。

1次元の自由ガウス波束の**確率分布幅**(時間変化):

$$w(t) = \sqrt{w_0^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 w_0^2}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{\mu^2 w_0^4}} = w_0 \sqrt{1 + \frac{(\hbar c)^2 (ct)^2}{(\mu c^2)^2 w_0^4}}$$

( $\hbar c \sim 200$  [MeV · fm],  $ct \sim 10^{15}$  fm,  $\mu c^2 \sim 10^3$  MeV,  $w_0 \sim 10^{13}$  fm)

検出器の距離



$$\frac{w(t)}{w_0} \sim \sqrt{1 + \frac{4 \times 10^4 \times 10^{15 \times 2}}{10^6 \times 10^{13 \times 4}}} \sim \sqrt{1 + 4 \times 10^{-14}}$$

# 波束の球面波成分

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) &\equiv \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int a(\mathbf{Q}) e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{Z}_0} e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} e^{-i(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{Q})(t-t_0)} \\ &\quad \times f_{\mathbf{K}}(\theta) \frac{e^{iK_0 R} e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{Q})R}}{R} d\mathbf{Q} \\ &= e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \frac{e^{iK_0 R}}{R} \int a(\mathbf{Q}) f_{\mathbf{K}}(\theta) e^{i(\hat{\mathbf{K}}_0\cdot\mathbf{Q})(R-v_0 t)} d\mathbf{Q} \end{aligned}$$

積分に關与する  $\mathbf{Q}$  の範囲内では  $f$  の  $\mathbf{K}$  依存性は無視できる。



$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx \boxed{e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}_0}(\theta) \frac{e^{iK_0 R}}{R} \boxed{\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - v_0 t])}$$

Trivialな時間依存性

中心が速さ  $v_0$  で動径  
外向きに運動する波束

# エンベロープ関数について(補足)

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu z^2}$$

- 平面波成分

$$\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + (z - v_0 t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t) = e^{-s(x^2+y^2)} e^{-\nu(z-v_0 t)^2}$$

- 球面波成分

$$\hat{\mathbf{K}}_0(R - v_0 t) = (R - v_0 t)\mathbf{e}_z$$

$$\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0[R - v_0 t]) = e^{-\nu(R-v_0 t)^2}$$

# エンベロープ関数の性質(平面波成分)

$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{PW}}(t) = e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_0 \cdot \mathbf{R}} \mathcal{G}(\mathbf{R} - \mathbf{v}_0 t)$$

- 中心は速さ  $v_0$  で  $z$  軸方向に運動。
- **cm 程度の拡がり**を持つので、散乱領域付近では、 $\mathcal{G}$  の  $x, y$  依存性は無視して良い(正確には  $x, y$  方向の拡がりとは  $z$  方向の拡がりよりも狭いが、それでも巨視的なスケール)。
- 散乱領域の**単位面積あたりに流れ込む確率の総量**は、 $x = y = 0$  として、 $\mathcal{G}$  の  $z$  分布の積分を取ることによって求まる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 z)|^2 dz \equiv \mathcal{G}$$

# エンベロープ関数の性質(球面波成分)

$$\Phi_{\text{asym}}^{\text{SC}}(t) \approx e^{-(iE_0/\hbar)(t-t_0)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f_{\mathbf{K}_0}(\theta) \frac{e^{iK_0 R}}{R} \mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - v_0 t])$$

- 中心は速さ  $v_0$  で動径外向きに運動。
- 動径方向についての分布は初期波束の  $z$  方向の分布と同じ。
- 巨視的なスケールで考えると  $R \sim v_0 t$  であり( $\because$  波束幅  $\sim$  cm)、 $R > 0$  であるから、 $t$  は正であることが示唆される。すなわち球面波成分は  $t \sim 0$  で発生したとみなせる(因果律)。
- $\theta$  方向に出ていく確率の総量は、十分時間が経ったところで求めた  $\mathcal{G}$  の  $R$  分布の積分と、散乱振幅の絶対値二乗の積:

$$|f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \int_0^\infty \left| \mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 [R - R_0]) \right|^2 dR \approx |f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \mathfrak{G}$$

巨視的な距離



# 微分断面積

散乱領域の単位面積あたりに流れ込む確率の総量:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 z)|^2 dz \equiv \mathcal{G}$$

$\theta$  方向に出ていく、単位立体角あたりの確率の総量:

$$|f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \int_0^{\infty} |\mathcal{G}(\hat{\mathbf{K}}_0 R - R_0)|^2 dR \approx |f_{\mathbf{K}_0}(\theta)|^2 \mathcal{G}$$

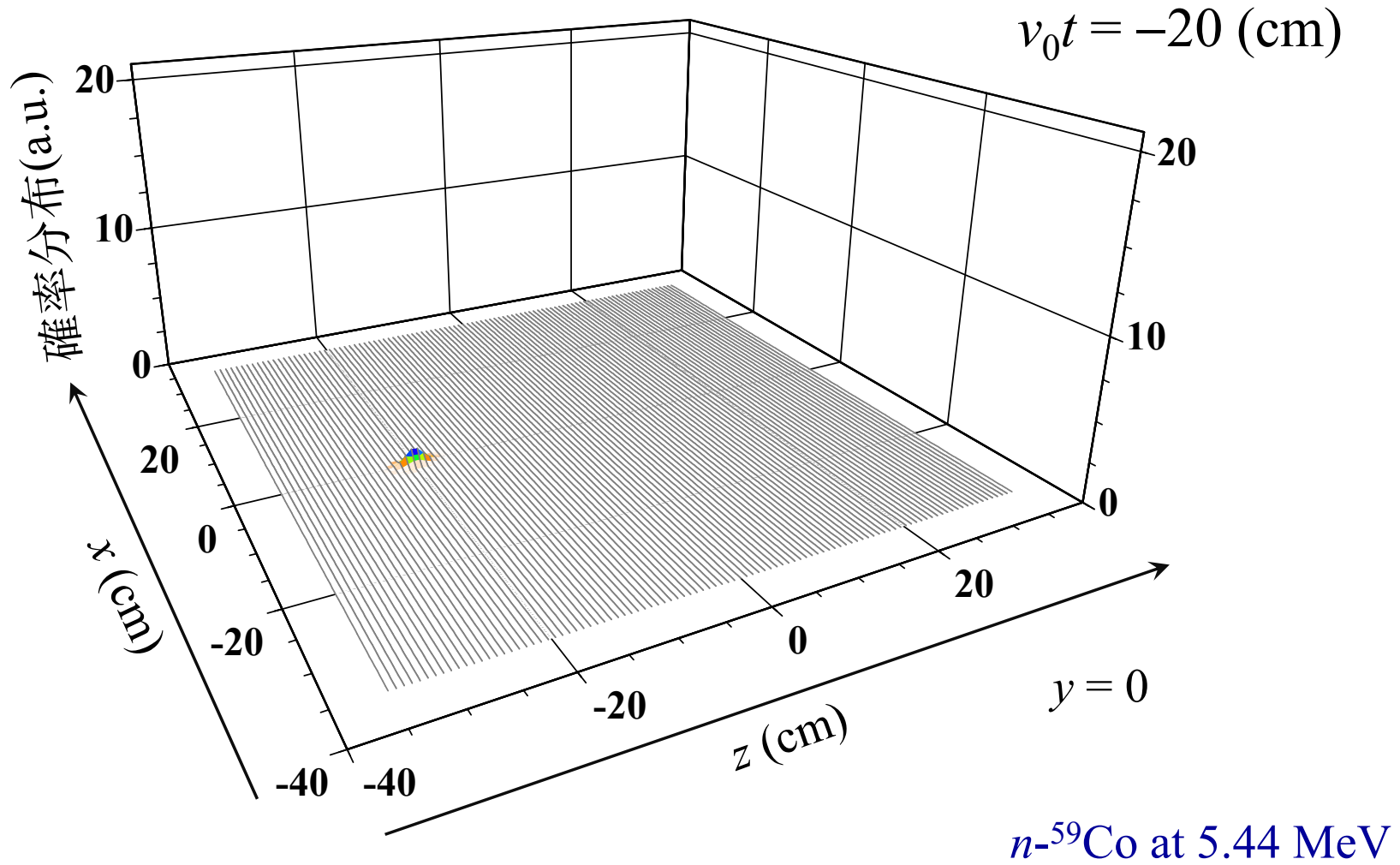


微分断面積

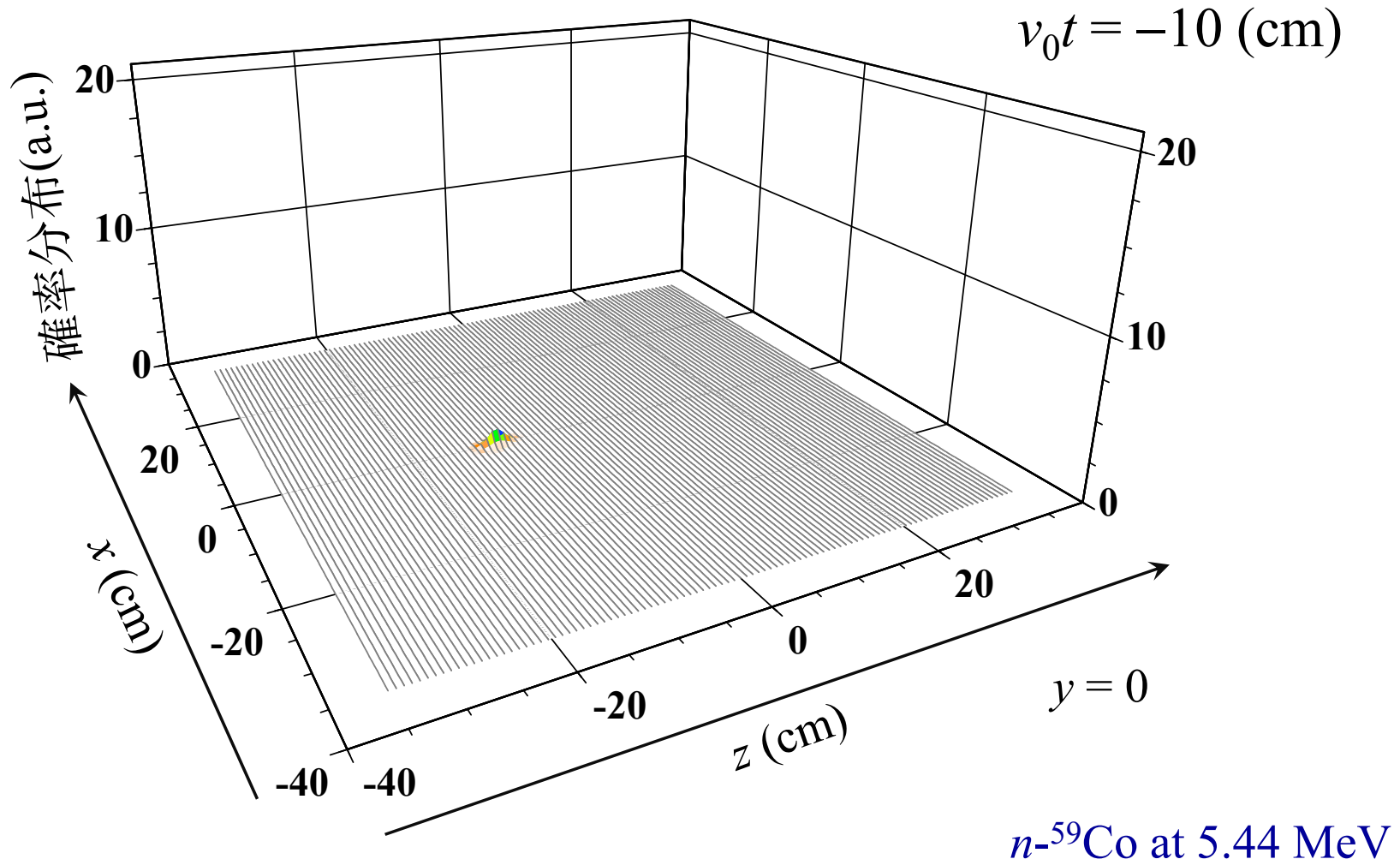
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\mathbf{K}}(\theta)|^2$$

定常散乱波の理論の結論と完全に一致!

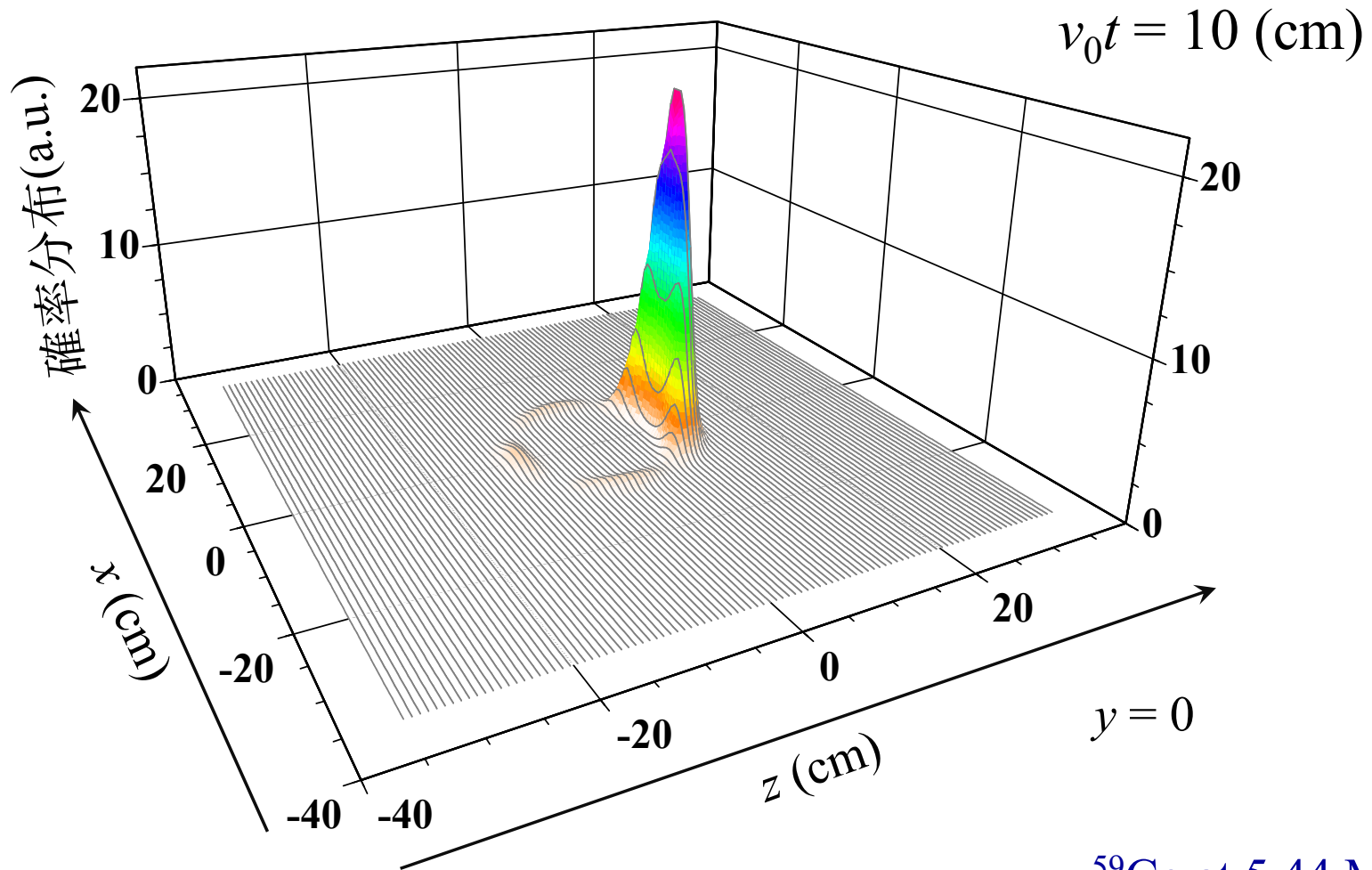
# 波束の伝播の様子



# 波束の伝播の様子

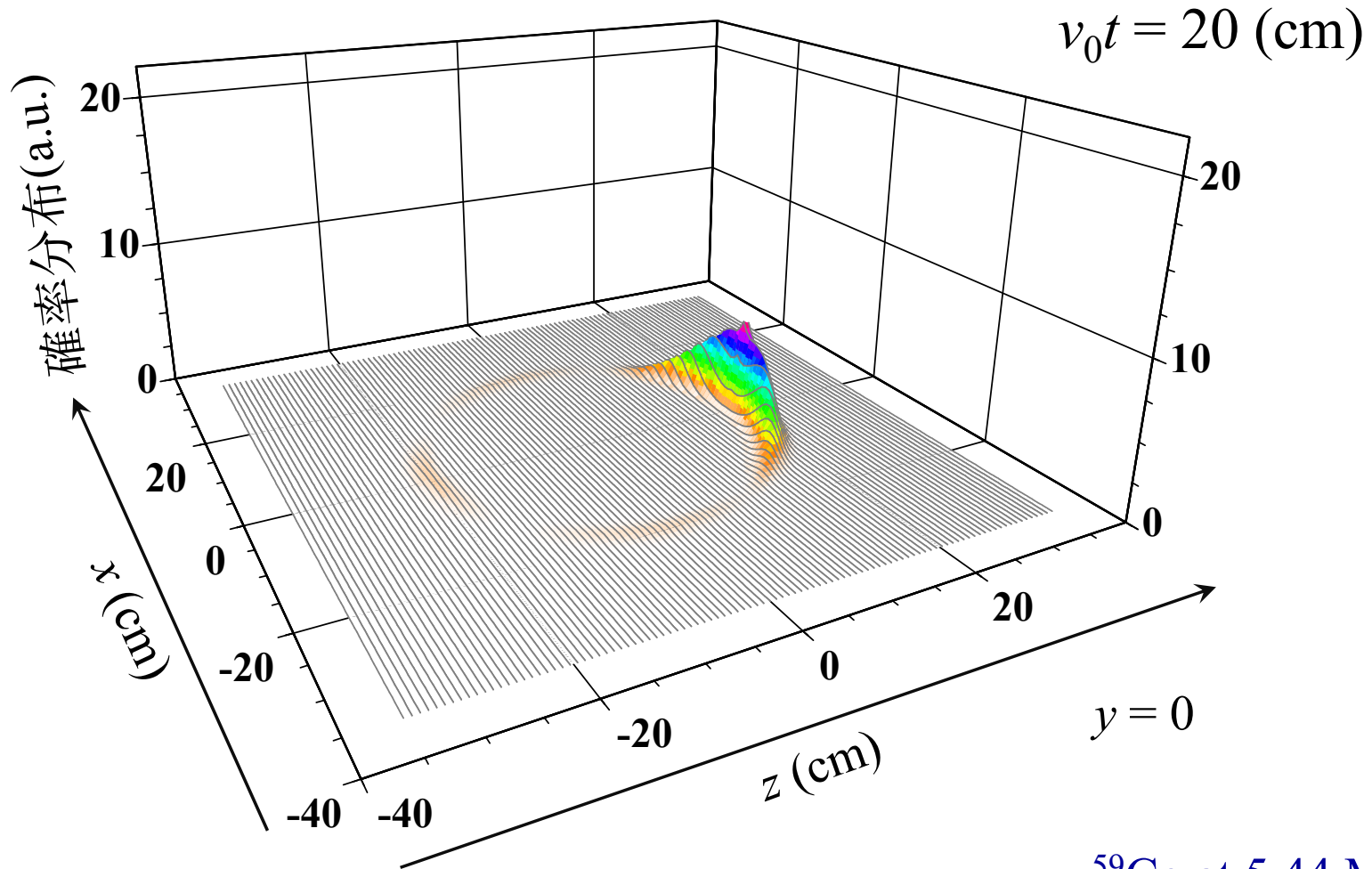


# 波束の伝播の様子



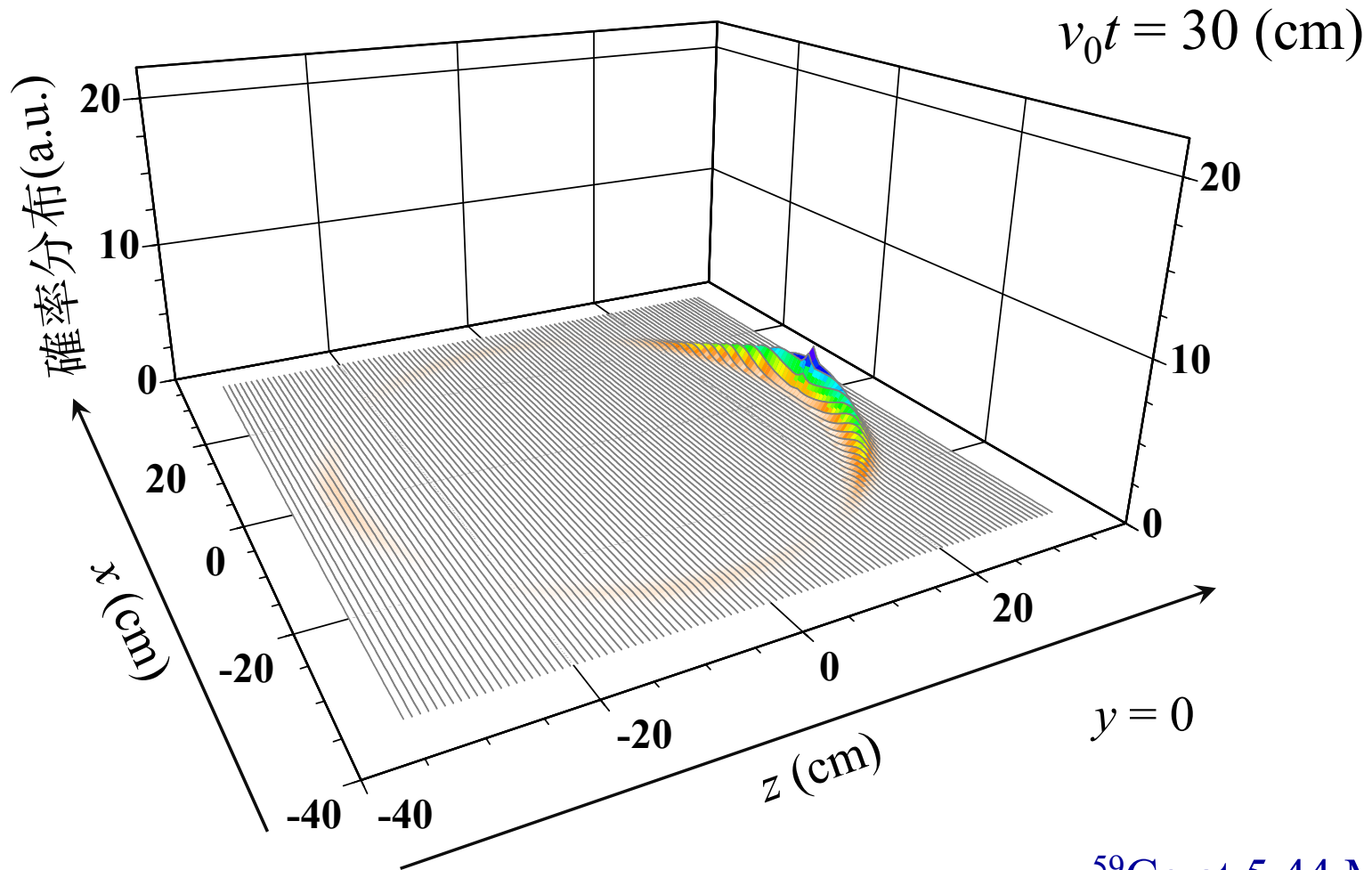
$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV

# 波束の伝播の様子



$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV

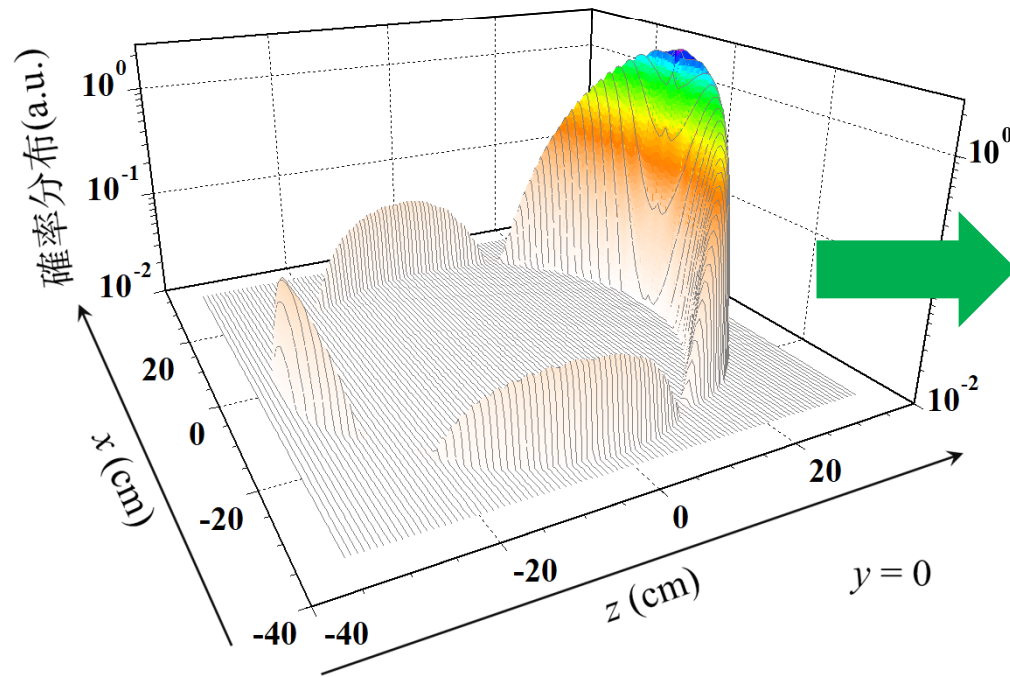
# 波束の伝播の様子



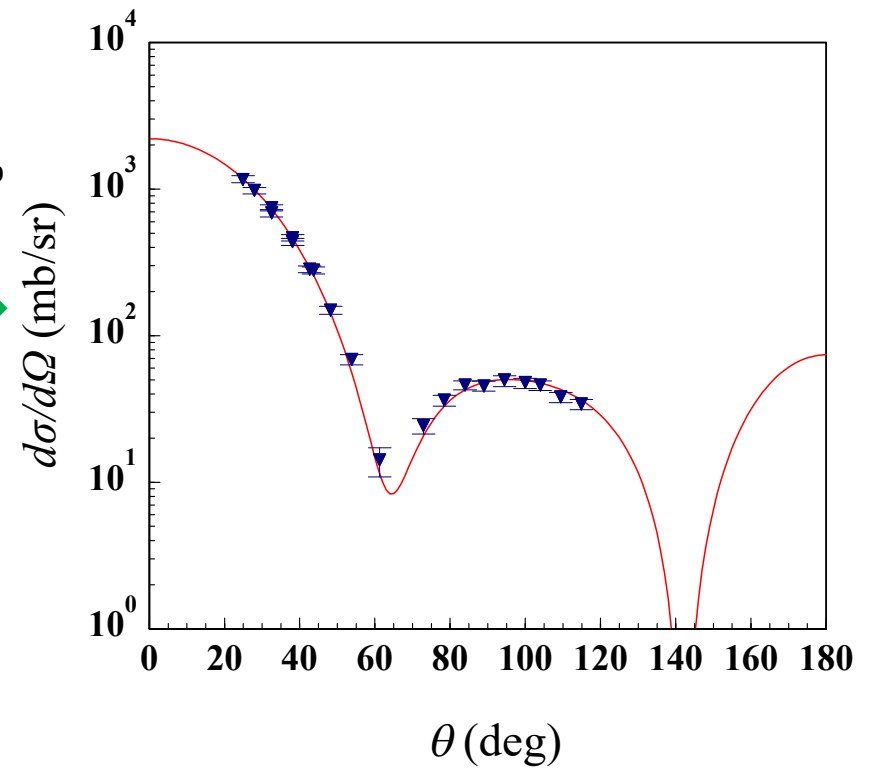
$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV

# 波束の伝播の様子

$v_0 t = 30$  (cm)



$n$ - $^{59}\text{Co}$  at 5.44 MeV





# 波束の理論と定常散乱波の理論のまとめ

- 現実の実験条件や直観的描像と合致する波束の理論と、通常学習する定常散乱波の理論との関係を議論した。
- 運動量に(非常に狭い)幅を持たせる事によって、散乱現象を、直観と合致する波束の運動として描くことができる。
- そのようにして求めた微分断面積の表式は、定常散乱波の理論の結論と完全に一致する。これは本質的には、散乱領域の大きさと比べて、波束の拡がりが無限に大きいと見なせるからである。

※より詳しい議論については、以下を参照(ただしAusternは絶版)。

N. Austern, “Direct Nuclear Reaction Theories” (John Wiley & Sons) [Chap. 1]

笹川辰弥 『散乱理論 (物理学選書20)』 (裳華房) [第2章]

M. L. Goldberger and K. M. Watson, “Collision Theory” (Dover) [Chap. 3]



### 3. Lippmann-Schwinger方程式と遷移行列



- 巨視的な空間に広がった波動関数を用いた時間依存散乱理論を概観する。
- 波束の理論で得られた知見を援用し、時間に依存しない散乱波に、その波が本来有していた時間依存性の名残  $+i\eta$  を与える。
- 散乱の基礎方程式である Lippmann-Schwinger (LS)方程式を導出する。

$$|\chi^{(+)}\rangle = |\alpha\rangle + \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\eta} V |\chi^{(+)}\rangle$$



# 時間依存シュレディンガー方程式(ポテンシャル散乱)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{R}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + V(\mathbf{R}) \right] \Psi(\mathbf{R}, t)$$

巨視的空間( $\mathfrak{W}$ : 1辺の長さ  $L$  の立方体)で規格化された平面波によって展開:

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}}$$



$$\omega_{n'n} \equiv \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar}$$

$$i\hbar \frac{dC_{n'}(t)}{dt} = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} C_n(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

$$\langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} \equiv \int_{\mathfrak{W}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{-i\mathbf{K}_{n'} \cdot \mathbf{R}} V(\mathbf{R}) \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}} d\mathbf{R}$$

# 時間依存シュレディンガー方程式の摂動解

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_n C_n(t) e^{-iE_n t/\hbar} e^{i\mathbf{K}_n \cdot \mathbf{R}}$$

$$i\hbar \frac{dC_{n'}(t)}{dt} = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\text{sp}} C_n(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

無摂動解:  $C_n^{(0)}(t) = \delta_{n\alpha}$  ( $\alpha$  は入射チャンネルのラベル)

$$1\text{次の摂動解: } C_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n | V | \alpha \rangle_{\text{sp}} e^{i\omega_{n\alpha} t'} dt'$$

入射時刻

$$2\text{次の摂動解: } i\hbar \frac{d}{dt} C_{n'}^{(2)}(t) = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\text{sp}} C_n^{(1)}(t) e^{i\omega_{n'n} t}$$

(の方程式)

## 2次の摂動解

$$i\hbar \frac{d}{dt} C_{n'}^{(2)}(t) = \sum_n \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{M}} C_n^{(1)}(t) e^{i\omega_{n'n}t}$$

$$C_{n'}^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum_n \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{M}} e^{i\omega_{n'n}t'} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{M}} e^{i\omega_{n\alpha}t''}$$

$t''$  積分を以下のように処理:

$t \rightarrow -\infty$  で相互作用消失

$$\int_{-\infty}^{t'} e^{i\omega_{n\alpha}t''} dt'' \rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{t'} e^{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)t''} dt'' = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{e^{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)t'}}{i(\omega_{n\alpha} - i\eta/\hbar)}$$

微小な相互作用変化  
(極限は最後に取り)

$$= i\hbar \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{e^{i\omega_{n\alpha}t'}}{E_\alpha - E_n + i\eta}$$

+ $i\eta$  は、現実の散乱が波束の時間発展で表されることを簡便に表現するもの(+は無限の過去で自由状態という意味)。

## 2次の摂動解(つづき)

$$C_{n'}^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \sum_n \int_{-\infty}^t \langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'n}t'} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}} \left( i\hbar \frac{e^{i\omega_{n\alpha}t'}}{E_\alpha - E_n + i\eta} \right) dt'$$

$$= \frac{1}{i\hbar} \sum_n \int_{-\infty}^t \frac{\langle n' | V | n \rangle_{\mathfrak{W}} \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}}}{E_\alpha - E_n + i\eta} e^{i\omega_{n'\alpha}t'} dt'$$

※この時間依存因子の処理は、フェルミの黄金律の議論を参照。

lim は省略(以下も同様)。1次の摂動解とまとめて

$$C_{n'}^{(1)}(t) + C_{n'}^{(2)} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n' | V | \chi^{(+)(1)} \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'\alpha}t'} dt'$$

$$|\chi^{(+)(1)}\rangle \equiv |\alpha\rangle + \sum_n \frac{|n\rangle \langle n | V | \alpha \rangle_{\mathfrak{W}}}{E_\alpha - E_n + i\eta} = |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V |\alpha\rangle$$

1次の摂動入り散乱波

$$G_0^{(+)} \equiv \frac{1}{E_\alpha - H_0 + i\eta} = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{E_\alpha - E_n + i\eta}$$

グリーン関数のスペクトル展開

# Lippmann-Schwinger方程式

同様にして摂動の高次まで取り入れる。

$$\bar{C}_{n'}(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} C_{n'}^{(i)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t \langle n' | V | \chi^{(+)} \rangle_{\mathfrak{W}} e^{i\omega_{n'\alpha} t'} dt'$$

$$|\chi^{(+)}\rangle \equiv |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V |\alpha\rangle + G_0^{(+)} V G_0^{(+)} V |\alpha\rangle + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left( G_0^{(+)} V \right)^i |\alpha\rangle$$

## Lippmann-Schwinger (LS)方程式

$$|\chi^{(+)}\rangle = |\alpha\rangle + \frac{1}{E_{\alpha} - H_0 + i\eta} V |\chi^{(+)}\rangle$$

LS方程式は、適切な境界条件を満たす散乱波の形式解を与える。  
+ $i\eta$  を含む式は、無限の過去で平面波状態であったこと、それが相互作用によって平面波+外向波となることの双方を保証する。

# 遷移行列(有効相互作用)

ポテンシャル散乱の遷移行列要素

$$T_{\beta\alpha} = \langle \beta | V | \chi_{\alpha}^{(+)} \rangle \equiv \langle \beta | T | \alpha \rangle$$

(演算子としての)遷移行列

$$T = V + VG_0^{(+)}V + VG_0^{(+)}VG_0^{(+)}V + \dots$$

$$T = V + VG_0^{(+)}T$$

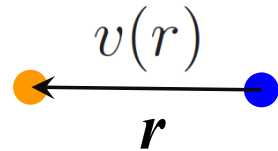
$T$ には相互作用 $V$ の効果が無限次まで入っている(“有効相互作用”)。

$$V | \chi_{\alpha}^{(+)} \rangle = T | \alpha \rangle$$

(このケースでは)  $T$ を相互作用として含むシュレディンガー方程式を解くことはない。  
 $T$ の虚部は吸収を意味しない。

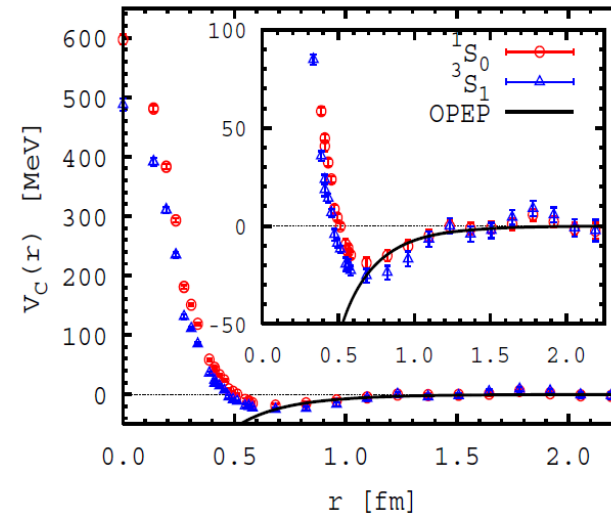
# 核力による2核子散乱の記述

2核子間にはたらく生の核力  $v$  は非常に良くわかっているとする。  
(例えばQCDから決定した  $v$  が使える)



シュレディンガー方程式

$$[T_{\mathbf{r}} + v(r) - E] \psi(\mathbf{r}) = 0$$



N. Ishii, S. Aoki, and T. Hatsuda, PRL99, 022001 (2007).

これを解けば、2核子間の相対波動関数  $\psi$  が得られる。

$\psi$  は核力の斥力芯を適切に扱えるほどに正確。

しかし、その正確さを核子多体計算で実現するのは困難。



# 有効相互作用(有効核力)

## 多重散乱理論の要

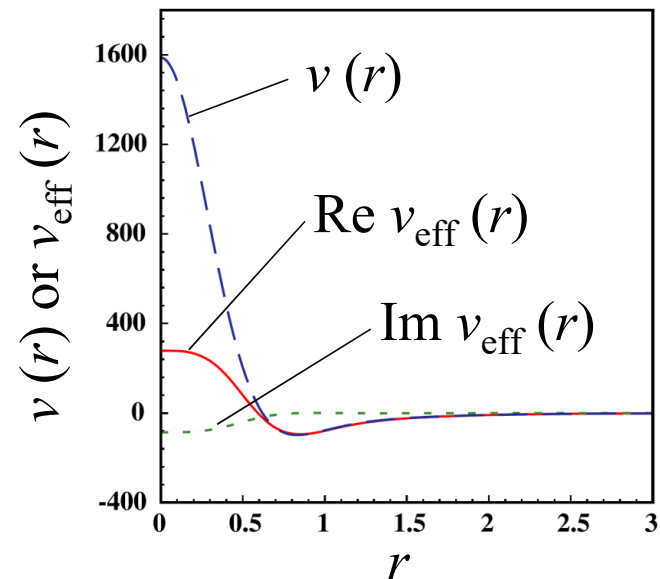
$$v(r)\psi(\mathbf{r}) = v_{\text{eff}}(r)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

自由波(平面波)に核力が無限次作用して正確な波動関数となるプロセスを、1回の相互作用で表現したもの。

- 有効相互作用は斥力芯を持たず、扱いが容易(多体計算向き)。
- エネルギーに依存する複素ポテンシャル。

生の核力と有効核力の比較例

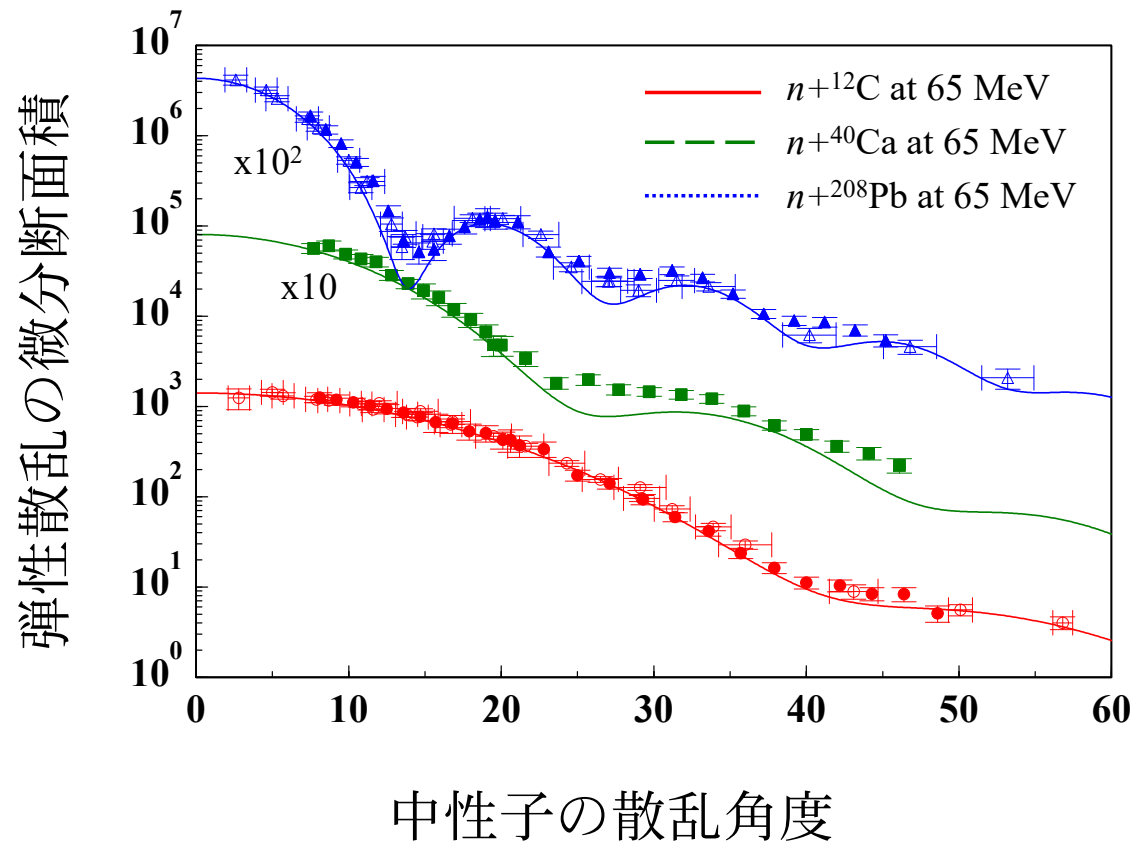
M. Yahiro, Minomo, O, Kawai, PTP120, 767 (2008).



# Lippmann-Schwinger方程式と遷移行列のまとめ

- 波束の理論が定常散乱波の理論と等価である事実に基づき、波束による散乱現象を模倣する処理を行うことで、適切な境界条件を満たす定常散乱波の形式解が得られる。これがLippmann-Schwinger (LS)方程式。
- LS方程式に現れる  $+i\eta$  は、散乱現象が、無限の過去において相互作用を受けていない自由な状態(平面波状態)から始まり、極めてゆっくりと相互作用がはたらいて、平面波+外向波という漸近条件をもつ状態に推移するものであることを保証している。これが、2体散乱における適切な境界条件の実体である。
- 3体反応に対しては、LS方程式は理論的正当性を失う(5.を参照)。
- 相互作用の影響を無限次まで取り入れた有効相互作用を導入した。

## 4. 多重散乱理論と微視的光学ポテンシャル



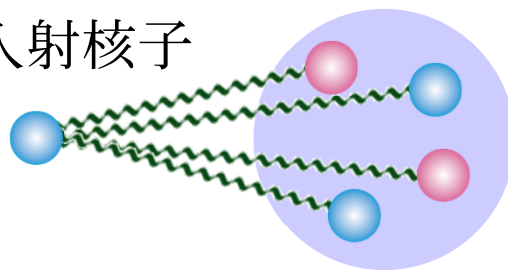


# 核子-原子核散乱の記述

入射核子-核内核子間の核力の和が散乱を引き起こすと考える。

遷移行列をこの形に限ることは、散乱の境界条件の限定を意味する(たとえば組み替えチャンネルは生成できない)。この段階で一部のチャンネルを視ていないことになる。

入射核子



標的原子核

遷移行列

$v$  は極めて強いので扱いにくい!

$$T = \sum_i v_i + \sum_i v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j + \sum_i v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots = \sum_i \Lambda_i$$

(散乱について)自由なグリーン関数

運動エネルギー演算子

原子核のハミルトニアン

$$G_0^{(+)} = \frac{1}{E - (T_{\text{NA}} + H_A) + i\eta}$$

# Resummation (1/3)

$$\Lambda_i \equiv v_i + v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j + v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots$$

$$\Lambda_i = v_i + v_i G_0^{(+)} v_i + v_i G_0^{(+)} v_i G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots$$

$$+ v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} v_j + v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots$$

$$= v_i + v_i G_0^{(+)} \left( v_i + v_i G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots \right)$$

$$+ v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \left( v_j + v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots \right)$$

最後に核子*i*と相互作用する遷移行列成分

$$\Lambda_i = v_i + v_i G_0^{(+)} \Lambda_i + v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

最後に*i*以外の核子と相互作用する遷移行列成分

## Resummation (2/3)

$$\Lambda_i = v_i + v_i G_0^{(+)} \Lambda_i + v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{1 - v_i G_0^{(+)}} v_i + \frac{1}{1 - v_i G_0^{(+)}} v_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

$$\left( t_i = v_i + v_i G_0^{(+)} t_i \right) \quad t_i \equiv \frac{1}{1 - v_i G_0^{(+)}} v_i \quad \longrightarrow \quad \Lambda_i = t_i + t_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} \Lambda_j$$

2核子間有効相互作用  $t$  で書き下した遷移行列

$$T = \sum_i t_i + \sum_i t_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} t_j + \sum_i t_i G_0^{(+)} \sum_{j \neq i} t_j G_0^{(+)} \sum_{k \neq j} t_k + \dots$$

## Resummation (3/3)

遷移行列が作用する波動関数が核子の入れ替えに関して反対称化されていれば、諸量は核子の番号によらない。

$$\sum_{j \neq i} t_j \rightarrow \frac{A-1}{A} \sum_j t_j \equiv \sum_j \bar{t}_j$$

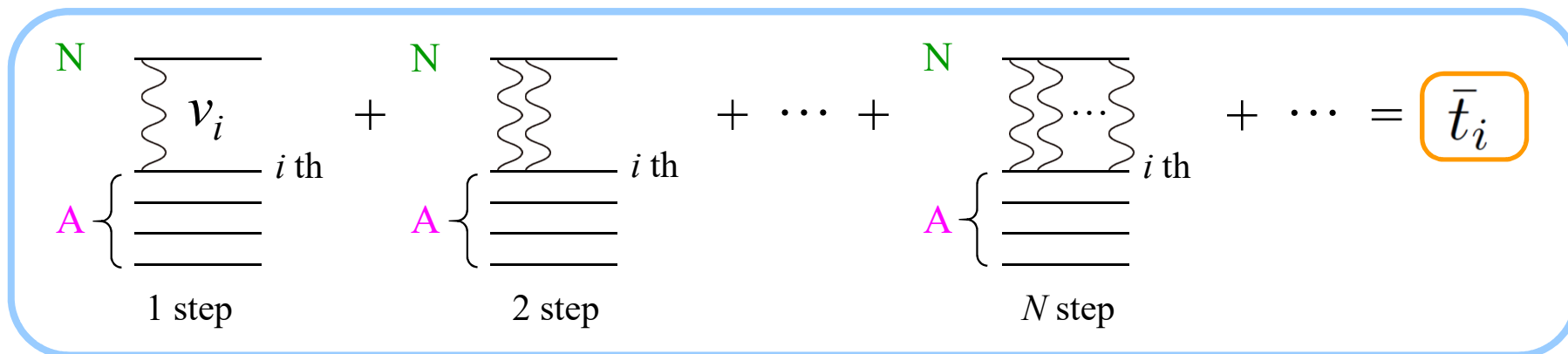
$$T = \frac{A}{A-1} \bar{T}$$

$$\bar{T} \equiv \sum_i \bar{t}_i + \sum_i \bar{t}_i G_0^{(+)} \sum_j \bar{t}_j + \sum_i \bar{t}_i G_0^{(+)} \sum_j \bar{t}_j G_0^{(+)} \sum_k \bar{t}_k + \dots$$

核子-原子核散乱を解く際の相互作用として、(扱いにくい)**2核子力**の和の代わりに(扱いやすい)**2核子間有効相互作用**の和を用いてよい!



# 多重散乱理論



$$\left( T_{\text{NA}} + \sum_i v_i + H_A - E \right) \Psi = 0 \xrightarrow{\text{Resummation}} \left( T_{\text{NA}} + \sum_i \bar{t}_i + H_A - E \right) \bar{\Psi} = 0$$

左の式では散乱の境界条件を限定していないため、波動関数は厳密で、流束は保存する。右の式は限られた境界条件を前提とした式であるため、一部のチャンネルは視ておらず、流束は保存しない。

$$\bar{t}_i = \frac{A-1}{A} t_i, \quad t_i = v_i + v_i G_0^{(+)} t_i$$

- L. L. Foldy, Phys. Rev. **67**, 107 (1945); K. M. Watson, Phys. Rev. **89**, 115 (1953).  
 A. K. Kerman, H. McManus, and R. M. Thaler, Ann. Phys. (NY) **8**, 551 (1959).  
 M. Yahiro, K. Minomo, KO, and M. Kawai, PTP **120**, 767 (2008).

# 多重散乱理論に基づく弾性散乱の記述

※ $c = 0$ : Aの基底状態

$$\left( T_{\text{NA}} + \sum_i \bar{t}_i + H_A - E \right) \bar{\Psi} = 0$$

$$\bar{\Psi} = \sum_c \chi_c \phi_c^A \quad H_A \phi_c^A = \varepsilon_c \phi_c^A \quad \langle \phi_{c'}^A | \phi_c^A \rangle = \delta_{c'c}$$

$$\int \phi_0^{*A} \left( T_{\text{NA}} + \sum_i \bar{t}_i + H_A - E \right) \sum_c \chi_c \phi_c^A d\xi_A = 0$$

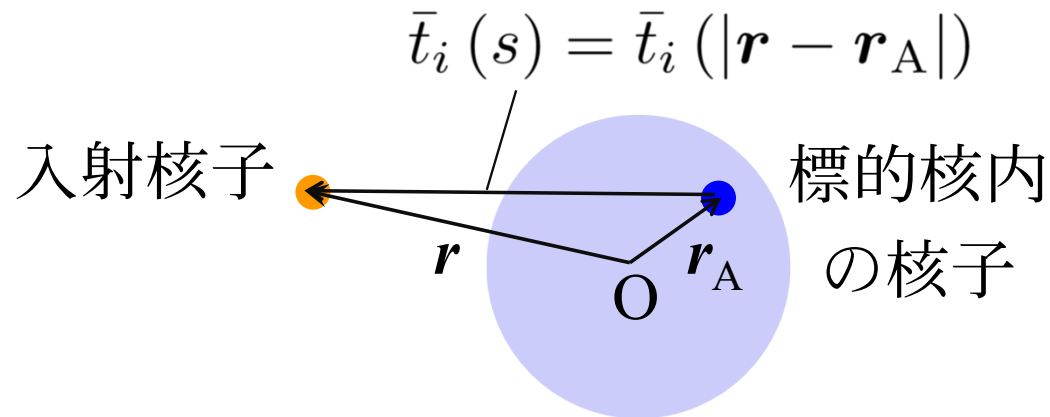
$$\left( T_{\text{NA}} + \int \phi_0^{*A} \sum_i \bar{t}_i \phi_0^A d\xi_A - \cancel{E - \varepsilon_0} \right) \chi_0 = - \sum_{c \neq 0} \left( \int \phi_0^{*A} \sum_i \bar{t}_i \phi_c^A d\xi_A \right) \chi_c$$

畳み込みポテンシャル  
(エネルギー依存, 複素, 非局所)

$\approx 0$   $\bar{t}_i$ で膨大な状態の1つに遷移した後、  
また基底状態に戻る確率は低い。  
(集団励起状態を除く)

# 畳み込みポテンシャル(微視的光学ポテンシャル)

2核子間有効相互作用の“期待値”を核間相互作用とする。



$$U(\mathbf{r}) = \int \phi_0^{*A} \sum_i \bar{t}_i \phi_0^A d\xi_A = (A-1) \int \bar{t}_i(s) \rho(\mathbf{r}_A) d\mathbf{r}_A$$

原子核の密度分布  $\rho_A(\mathbf{r}_A)$  は、核構造計算で求められる。

2核子間有効相互作用をどのようにして求めるかが次の問題。

# インパルス近似に基づく2核子間有効相互作用

$$t_i = v_i + v_i \frac{1}{E - (T_{\text{NA}} + H_A) + i\eta} t_i$$

解くのは大変!  
(多体問題)

$$t_i = v_i + v_i \frac{1}{\boxed{E} - T_{\text{NA}} - T_{iA} \boxed{-H_B - V_{iB}} + i\eta} t_i$$

$\approx E'$

$$t_i^{\text{IA}} = v_i + v_i \frac{1}{E' - T_{\text{NA}} - T_{iA} + i\eta} t_i^{\text{IA}}$$

エネルギーが高く、相互作用する2核子以外の粒子群の影響が無視できると考える。ただし2核子の運動エネルギーの和は全体のエネルギーに一致せず、一般にエネルギー殻外の有効相互作用が必要。(往々にしてオンシェル近似が用いられる。)

# g行列

無限に広がった核物質(密度 $\rho$ )の中での2核子間有効相互作用を、次のベーテ-ゴールドストーン方程式を解いて求める。

$$g(E, \rho) = v + v \frac{\boxed{Q} \text{ パウリの排他演算子}}{E - K_0 - K_1 - \boxed{U_0} - \boxed{U_1} + i\varepsilon} g(E, \rho)$$

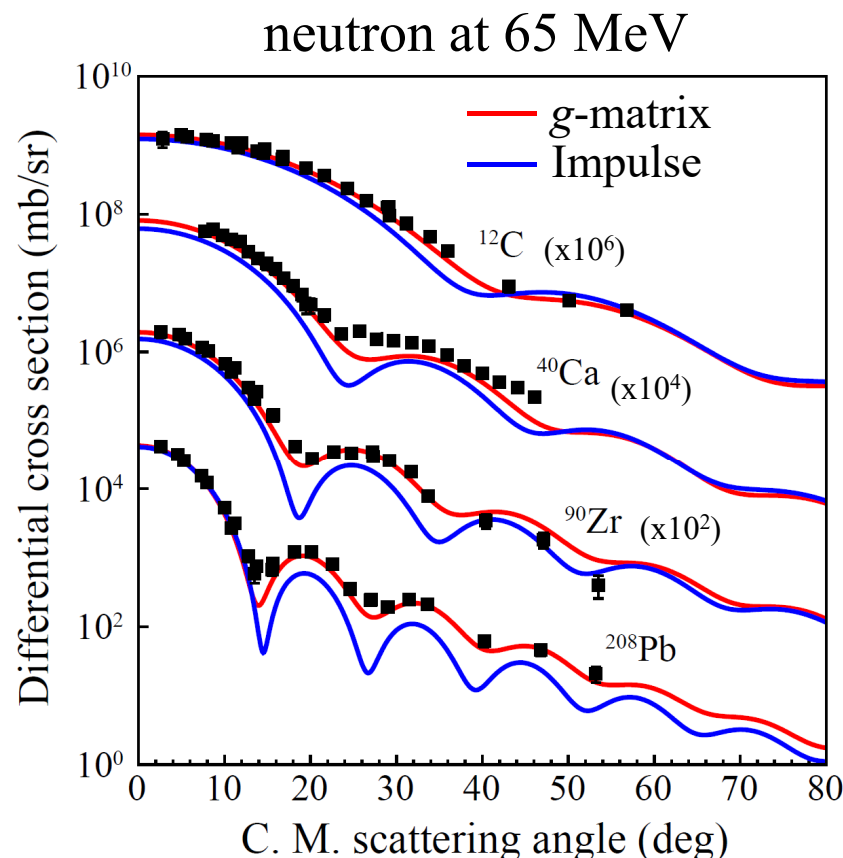
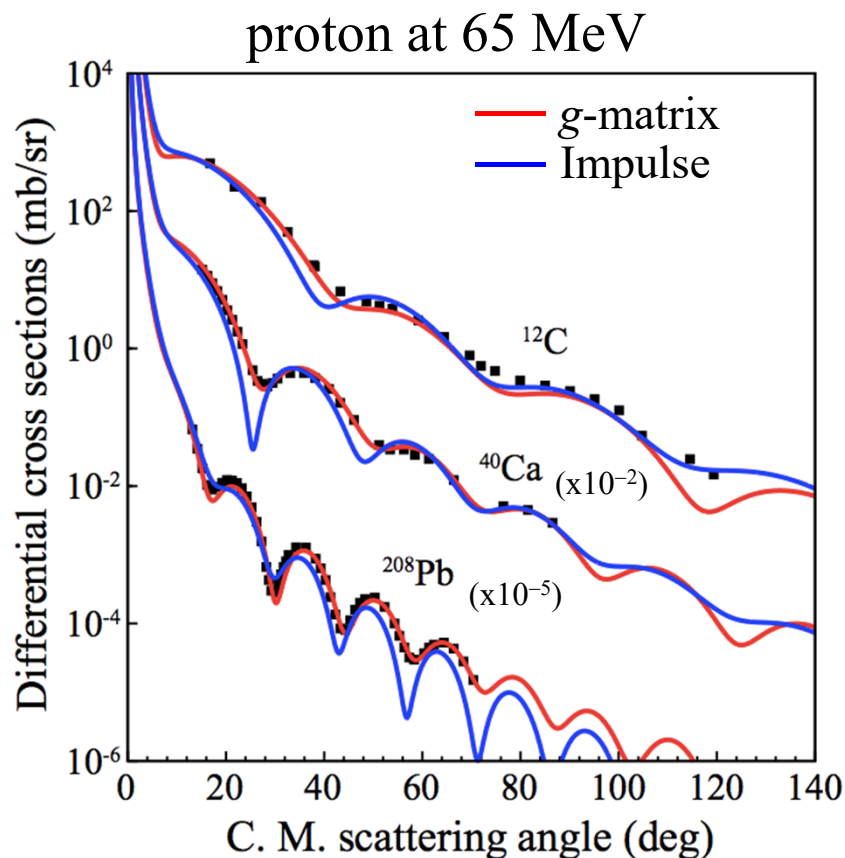
一体ポテンシャル

$$U_i = U(\mathbf{k}_i, E_i; \rho) = \sum_{k' \leq \boxed{k_F} \text{ フェルミ波数}(\propto \rho^{1/3})} \langle \mathbf{k}_i, \mathbf{k}' | g(E_i + e') | \mathbf{k}_i, \mathbf{k}' \rangle$$

$$\equiv V(\mathbf{k}_i, E_i; \rho) + iW(\mathbf{k}_i, E_i; \rho)$$

$$e' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + V(\mathbf{k}', e'; \rho) \quad E_i = \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} + V(\mathbf{k}_i, E_i; \rho)$$

# 核子-原子核系の弾性散乱は理論で描け(つつある)

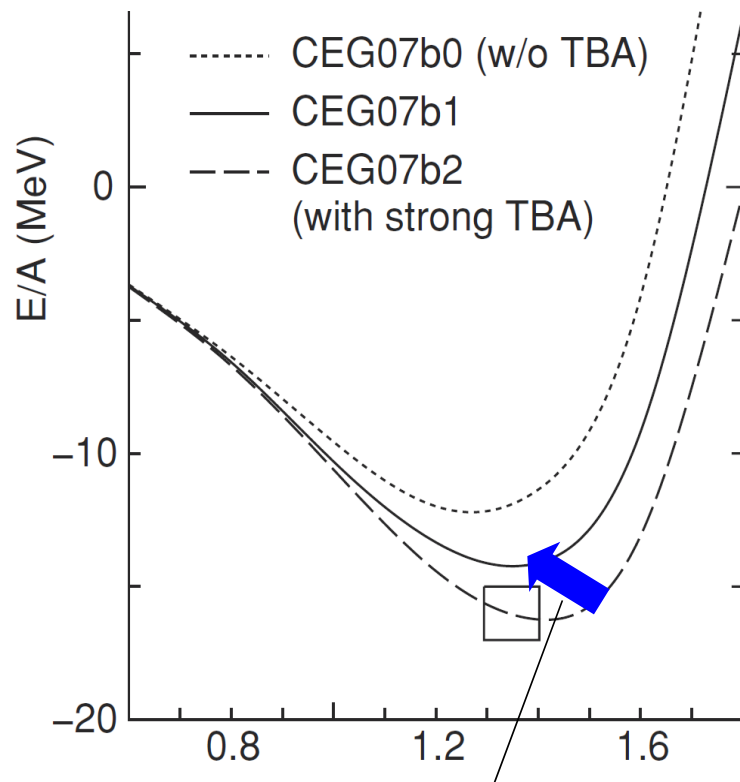


+原子核中での核子間有効相互作用の変化が観測。

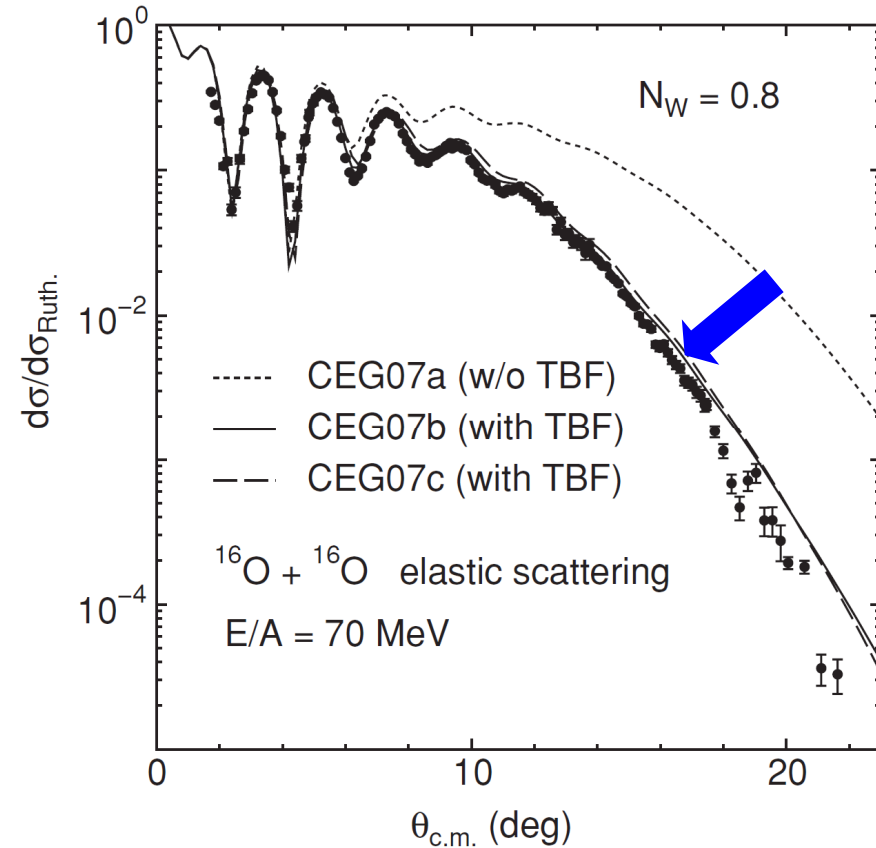
cf. K. Amos+, *Adv. Nucl. Phys.* **25**, 275 (2000).  
T. Furumoto+, *PRC* **78**, 044610 (2008).  
M. Toyokawa+, *PRC* **92**, 024618 (2015).

# 最近の大きな話題: 3体力効果

T. Furumoto, Sakuragi, Yamamoto, *Phys. Rev. C* **80**, 044614 (2009).



Saturation prop. の再現には  
3体力の効果が重要



原子核-原子核反応でプローブ可能



Furumoto  
(Yokohama)



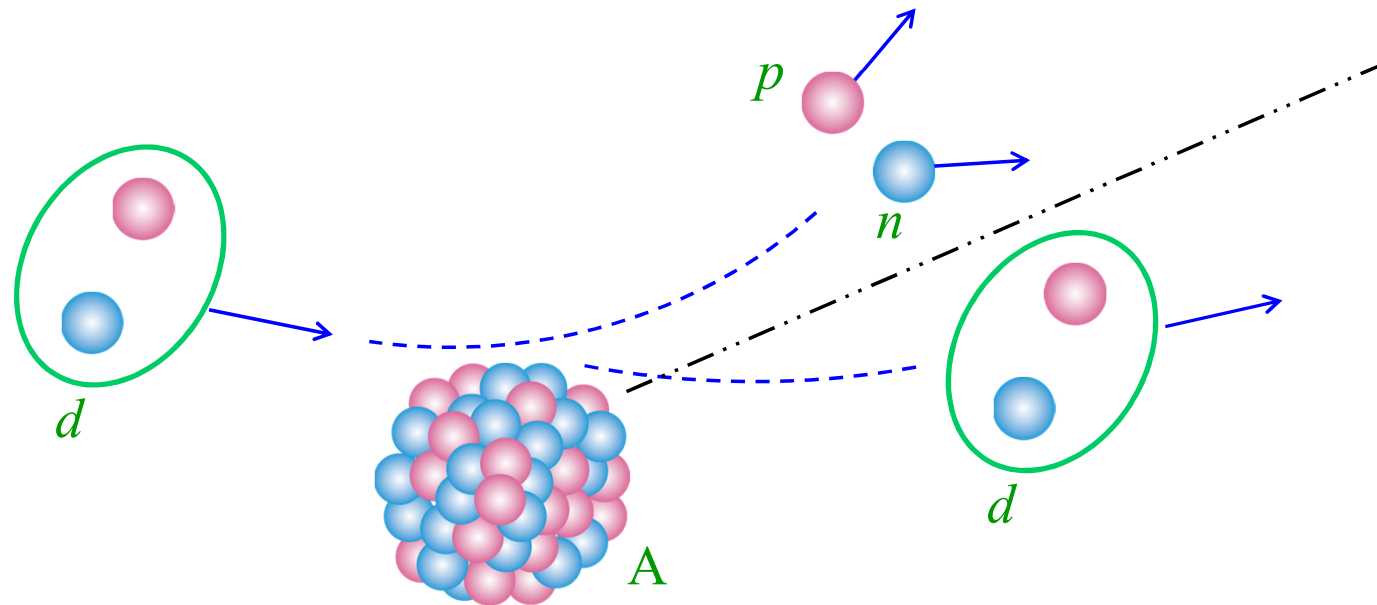
Sakuragi

# 多重散乱理論と微視的光学ポテンシャルのまとめ

- 多重散乱理論によれば、2核子間相互作用を無限次くり込んだ有効相互作用の集積として核子-原子核散乱を記述することができる。
- 2核子間相互作用を原子核の密度分布で畳み込むことで、エネルギー依存, 複素, 非局所型一体ポテンシャルが得られる。
- 核内での2核子間有効相互作用は、 $g$ 行列理論によって近似的に得られ、これを用いた微視的光学ポテンシャルは高い成功を収めている。
- 核物質の密度の飽和性を再現するという意味での3体力効果が注目され、原子核反応での観測の可能性が示唆されている。
- (近似の範囲で)核力に正しく立脚した核反応論が構築され、微視的核反応研究は大きな潮流となっている。



## (予告) 弱束縛系の反応をどう描く？



束縛エネルギーがわずか2.2 MeVの重陽子は、原子核との相互作用によって容易に陽子・中性子に分解する。このとき、陽子+中性子+原子核の3体模型を用いてここまでの話を繰り返せばよいように見える。

しかし... (5. に続く)



# 遷移行列と散乱振幅の関係

散乱波の漸近形は

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(\theta_R) \frac{\exp(iKR)}{R} \quad (R \gg R_N)$$

シュレディンガー方程式と、適切な境界条件を満たす解:

$$(T_{\mathbf{R}} + U - E) \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = 0$$

$$\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} + \int G^{(+)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') U(\mathbf{R}') \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}') d\mathbf{R}'$$

$$(E - T_{\mathbf{R}}) G^{(+)}(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R})$$

座標表示のグリーン関数

$$G^{(+)}(\mathbf{R}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m_n}{\hbar^2} \frac{\exp(iKR)}{R}$$

# 遷移行列と散乱振幅の関係(つづき)

グリーン関数の漸近形

$$|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| = \sqrt{R^2 + R'^2 - 2R\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{R}'} \rightarrow R - \mathbf{e}_R \cdot \mathbf{R}' + O(R'/R)$$

$$\mathbf{K} \rightarrow K\mathbf{e}_R$$

$$K|\mathbf{R} - \mathbf{R}'| \rightarrow KR - \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}' + O(KR'/R)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \rightarrow \frac{1}{R} + O(R'/R)$$



$$\begin{aligned} G^{(+)}(\mathbf{R} - \mathbf{R}') &= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m_n}{\hbar^2} \frac{\exp(iK|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|} \\ &\rightarrow -\frac{1}{4\pi} \frac{2m_n}{\hbar^2} \frac{\exp(iKR)}{R} e^{-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}'} \end{aligned}$$

# 遷移行列と散乱振幅の関係(さらにつづき)

散乱波の漸近形

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) &\rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2m_n}{\hbar^2} \frac{\exp(iKR)}{R} \int e^{-i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}'} U(\mathbf{R}') \chi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}') d\mathbf{R}' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2m_n}{\hbar^2} \frac{\exp(iKR)}{R} (2\pi)^{3/2} T\end{aligned}$$

散乱振幅を用いた漸近形との対応



$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(\theta_R) \frac{\exp(iKR)}{R} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m_n}{\hbar^2} \frac{\exp(iKR)}{R} (2\pi)^{3/2} T$$

遷移行列と散乱振幅の関係式

$$f(\theta_R) = -\frac{(2\pi)^2 m_n}{\hbar^2} T$$

# 講義1日目の補足

# 遷移行列(有効相互作用)

ポテンシャル散乱の遷移行列要素

$$T_{\beta\alpha} = \langle \beta | V | \chi_{\alpha}^{(+)} \rangle \equiv \langle \beta | T | \alpha \rangle$$

(演算子としての)遷移行列

$$T = V + VG_0^{(+)}V + VG_0^{(+)}VG_0^{(+)}V + \dots$$

$$T = V + VG_0^{(+)}T$$

$T$ には相互作用 $V$ の効果が無限次まで入っている(“有効相互作用”)。

$$V | \chi_{\alpha}^{(+)} \rangle = T | \alpha \rangle$$

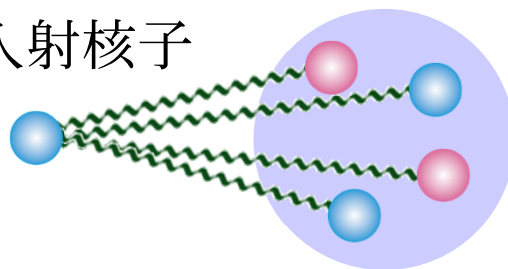
(このケースでは)  $T$ を相互作用として含むシュレディンガー方程式を解くことはない。  
 $T$ の虚部は吸収を意味しない。

# 核子-原子核散乱の記述

入射核子-核内核子間の核力の和が散乱を引き起こすと考える。

遷移行列をこの形に限ることは、散乱の境界条件の限定を意味する(たとえば組み替えチャンネルは生成できない)。この段階で一部のチャンネルを視ていないことになる。

入射核子



標的原子核

遷移行列

$v$  は極めて強いので扱いにくい!

$$T = \sum_i v_i + \sum_i v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j + \sum_i v_i G_0^{(+)} \sum_j v_j G_0^{(+)} \sum_k v_k + \dots = \sum_i \Lambda_i$$

(散乱について)自由なグリーン関数

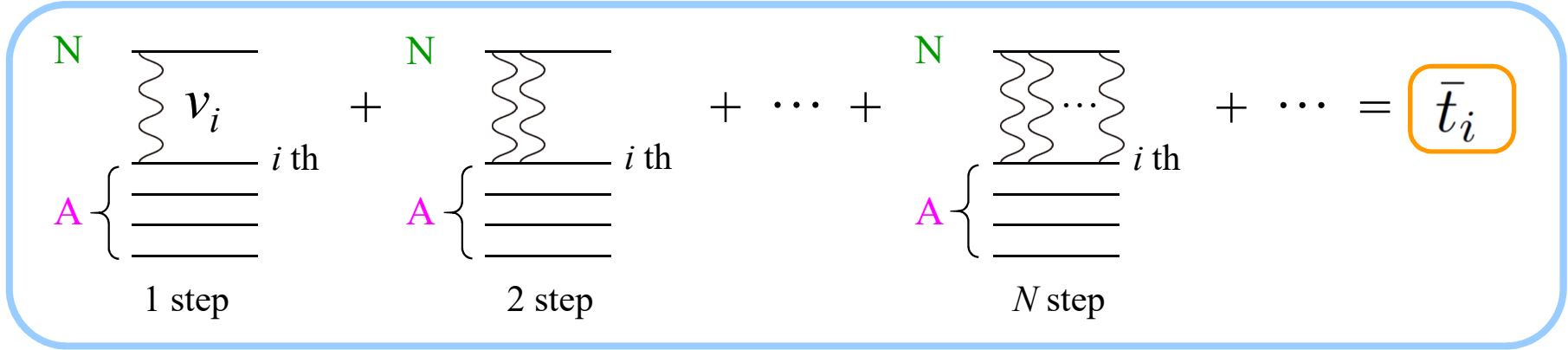
運動エネルギー演算子

原子核のハミルトニアン

$$G_0^{(+)} = \frac{1}{E - (T_{\text{NA}} + H_A) + i\eta}$$



# 多重散乱理論



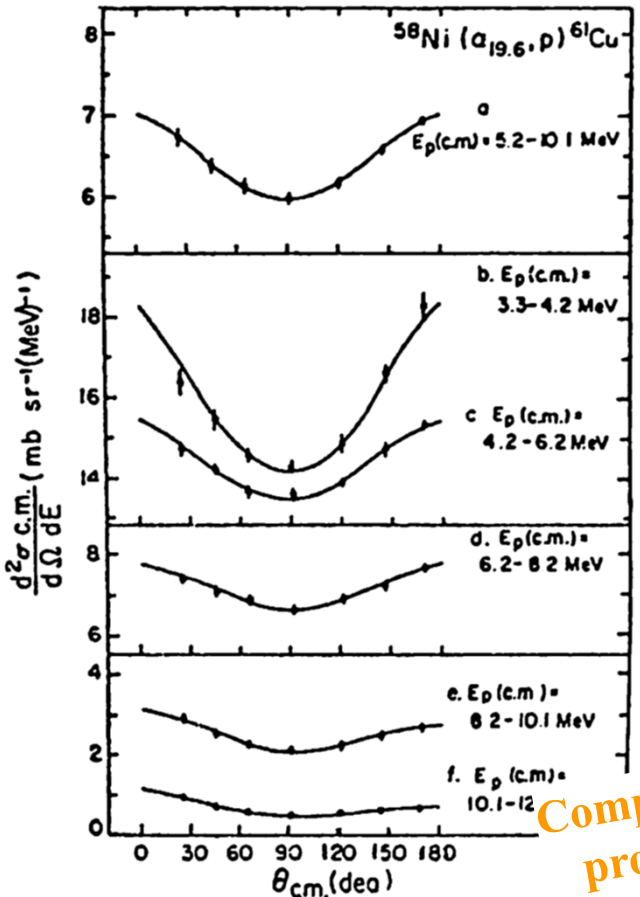
$$\left(T_{\text{NA}} + \sum_i v_i + H_A - E\right) \Psi = 0 \xrightarrow{\text{Resummation}} \left(T_{\text{NA}} + \sum_i \bar{t}_i + H_A - E\right) \bar{\Psi} = 0$$

左の式では散乱の境界条件を限定していないため、波動関数は厳密で、流束は保存する。右の式は限られた境界条件を前提とした式であるため、一部のチャンネルは視ておらず、流束は保存しない。

$$\bar{t}_i = \frac{A-1}{A} t_i, \quad t_i = v_i + v_i G_0^{(+)} t_i$$

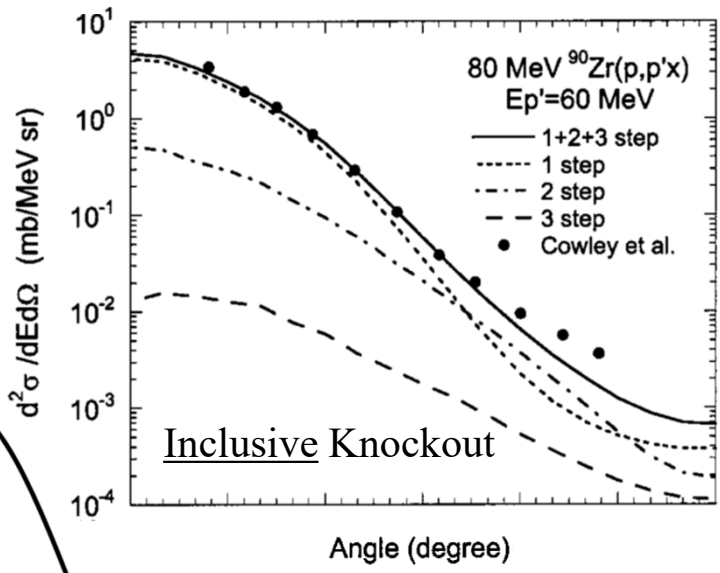
L. L. Foldy, Phys. Rev. **67**, 107 (1945); K. M. Watson, Phys. Rev. **89**, 115 (1953).  
 A. K. Kerman, H. McManus, and R. M. Thaler, Ann. Phys. (NY) **8**, 551 (1959).  
 M. Yahiro, K. Minomo, KO, and M. Kawai, PTP **120**, 767 (2008).

# 原子核反応における“Decoherence”の例

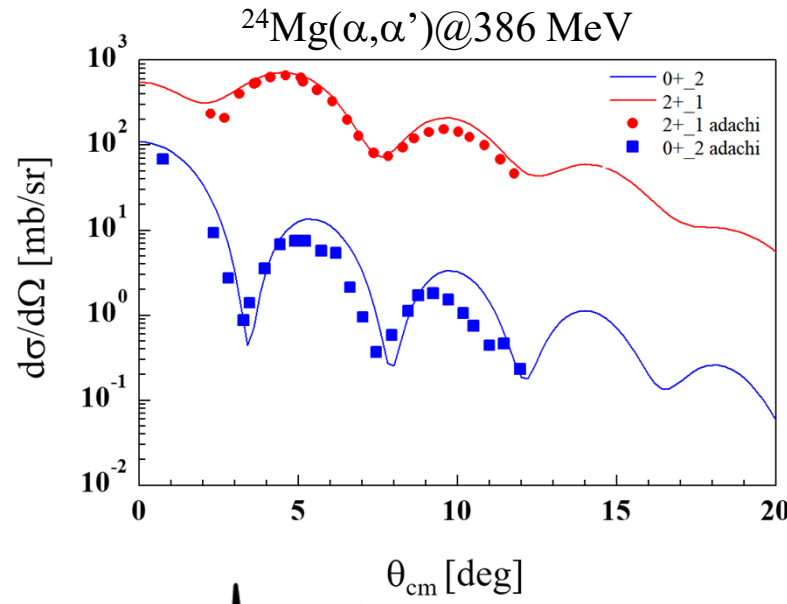


Compound process

W. Sun+, PRC60, 064605 (1999);  
 PRC63, 019903(E) (2000).

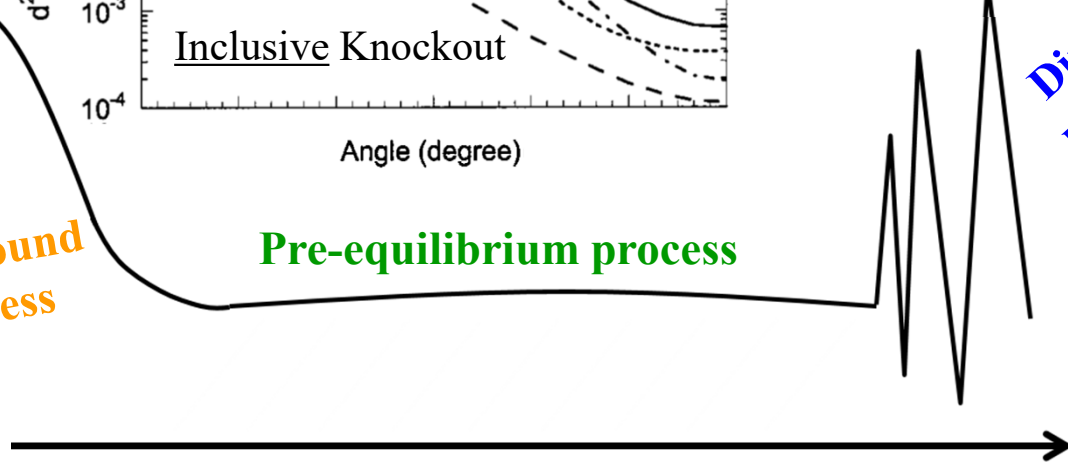


Pre-equilibrium process



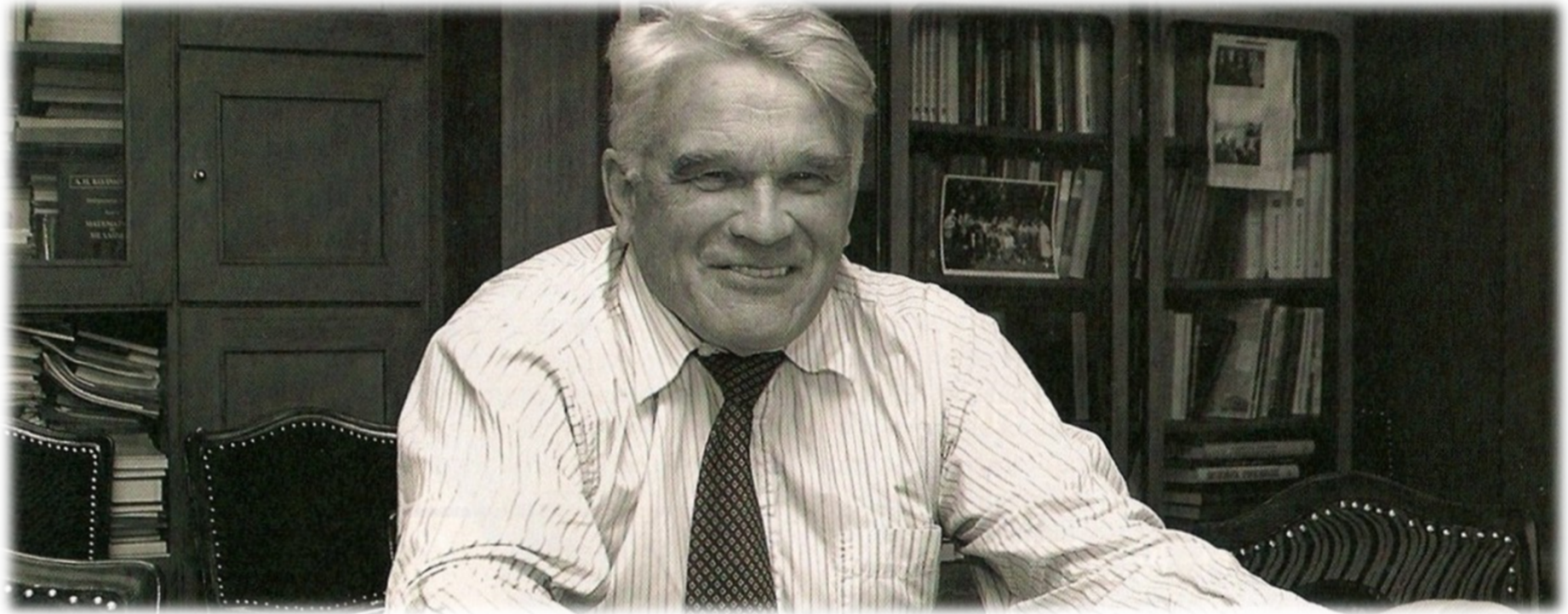
Direct process

from H. Feshbach, “Theoretical Nuclear Physics –Nuclear Reactions–”, p.302.



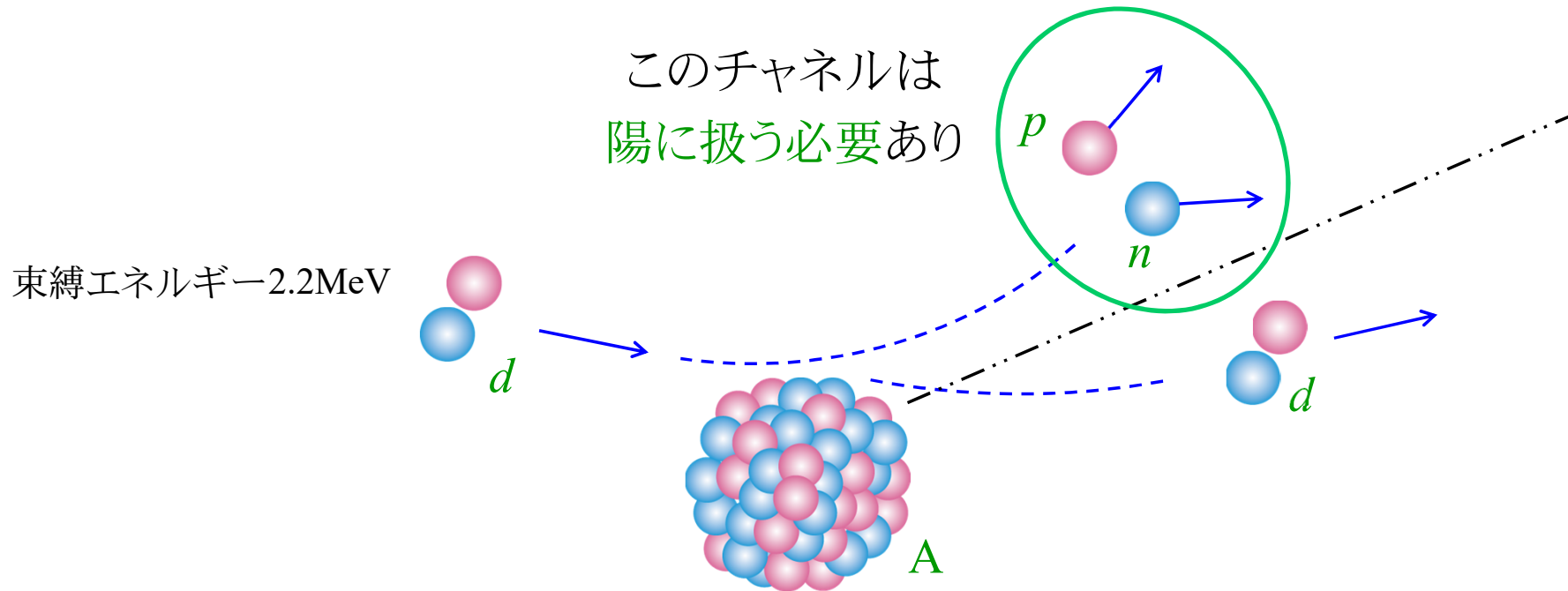
Emission energy 4/28

## 5. 3体反応の難点とその克服



*Ludvig G. Faddeev (1934.3.23–2017.2.26)*

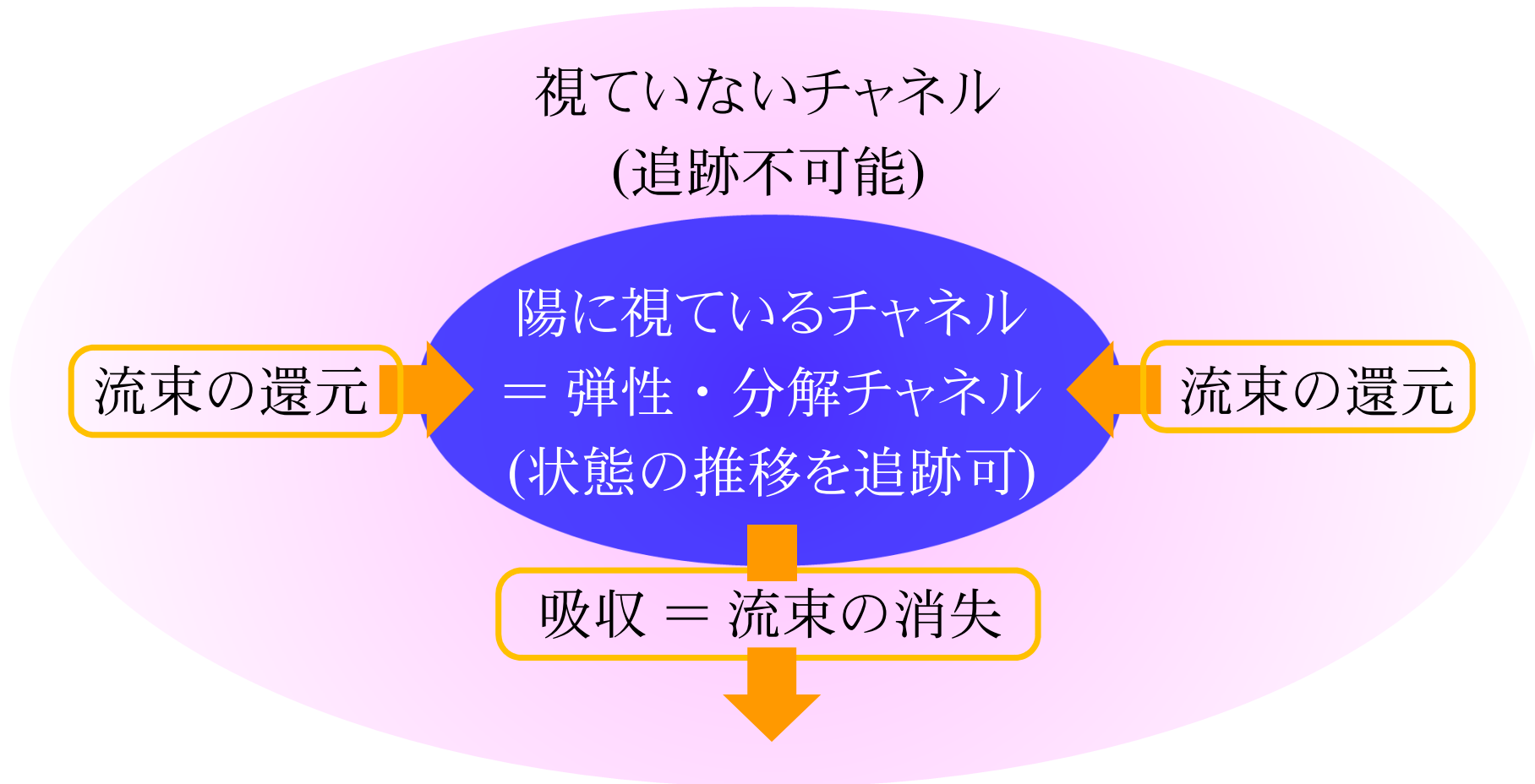
# 弱束縛系の入射・分解反応



弾性チャネル以外の**特定のチャネル**にどのように流束が逃げるか(反応系が遷移するか)を記述しなければならない。

陽子+中性子+原子核の3体模型を用いてLS方程式を解けばよい?

# 分解反応に対する模型空間の設定



吸収の意味は「**視ているチャンネル**」の実体に依存する。

# 問題の設定

ここで議論したい問題は、よく指摘される「3体問題は解けない」というものではありません。つまり、解が解析的に表されるかどうかを、ここでは問いません。そして、3体の束縛問題は解けているという立場を取ります(たとえば量子力学的3体系の束縛状態については、変分法を用いることにより、厳密解と同等とみなせる解が得られています)。

では何が問題か。それは

「3体の散乱問題の解を与える方程式は何か？」

です。ここでは、この問題とその解答であるFaddeev理論を紹介します。

# 準備1

LS方程式

$$|\chi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\eta} V |\chi^{(+)}\rangle$$

↓ 左から  $(E - H_0 + i\eta)$  を作用

$$(E - H_0 + i\eta) |\chi^{(+)}\rangle = (E - H_0 + i\eta) |\phi\rangle + V |\chi^{(+)}\rangle$$

↓  $(E - H_0 + i\eta) |\phi\rangle = i\eta |\phi\rangle$

$$(E - H + i\eta) |\chi^{(+)}\rangle = i\eta |\phi\rangle$$

Møller の波動行列を用いた散乱波の表現

$$|\chi^{(+)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi\rangle \equiv \boxed{\Omega^{(+)}} |\phi\rangle$$

波動行列



## 準備2

グリーン関数  $G^{(+)} = \frac{1}{E - H + i\eta} = \frac{1}{E - H_0 - V + i\eta}$

$$\frac{1}{\hat{A}} - \frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{A}} (\hat{B} - \hat{A}) \frac{1}{\hat{B}} = \frac{1}{\hat{B}} (\hat{B} - \hat{A}) \frac{1}{\hat{A}}$$
$$\hat{A} = E - H + i\eta, \quad \hat{B} = E - H_0 + i\eta$$



$$G^{(+)} = G_0^{(+)} + G_0^{(+)} V G^{(+)} = G_0^{(+)} (1 + V G^{(+)})$$

$$\hat{A} \longleftrightarrow \hat{B} \quad \Rightarrow \quad G_0^{(+)} = G^{(+)} - G^{(+)} V G_0^{(+)}$$



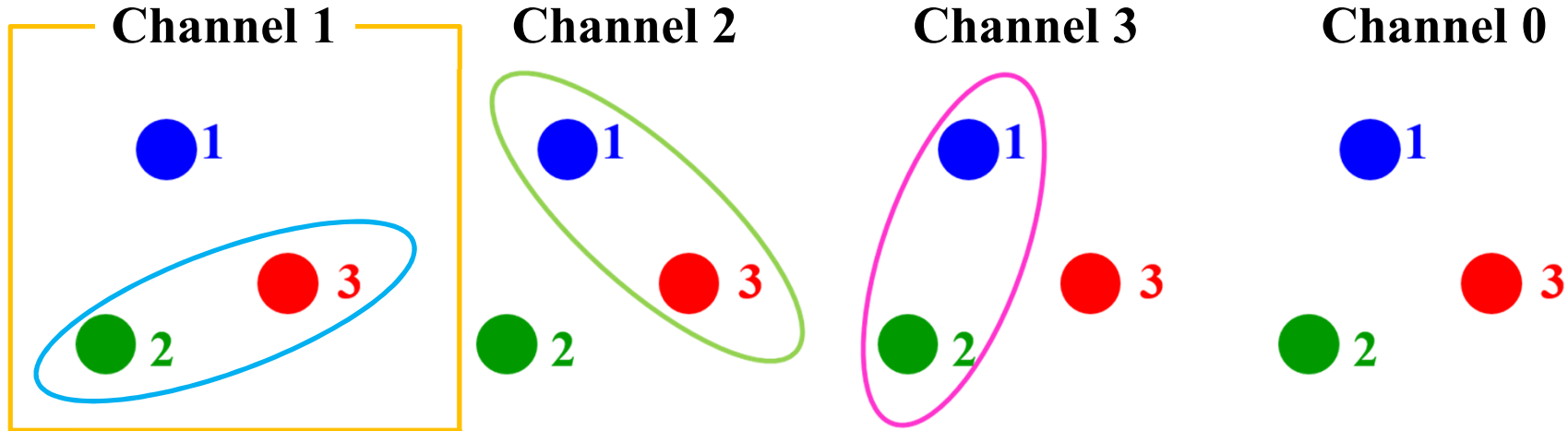
両辺足す

$$G^{(+)} + G_0^{(+)} = G_0^{(+)} + G_0^{(+)} V G^{(+)} + G^{(+)} - G^{(+)} V G_0^{(+)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_0^{(+)} V G^{(+)} = G^{(+)} V G_0^{(+)}$$



# 3体系の散乱問題



ハミルトニアン

$$H = H_0 + V_{12} + V_{23} + V_{31}$$

チャンネル1に入射波が存在する場合の散乱波

入射チャンネルのラベル  $|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle$  23の束縛状態

無限の過去は指定されているが、具体的な終状態が未指定

# LS方程式の解の非一意性

チャンネル1に入射波が存在する場合の散乱波

$$|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = \frac{i\eta}{E - H + i\eta} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle$$

$$G^{(+)}(E) = \frac{1}{E - H_1 - V_{31} - V_{12} + i\eta} = G_1^{(+)}(E) \left[ 1 + (V_{31} + V_{12}) G^{(+)}(E) \right]$$



$$\times G_i^{(+)}(E) \equiv \frac{1}{E - H_i + i\eta}$$

$$\begin{aligned} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle &= \frac{i\eta}{E - H_1 + i\eta} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ &= |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

終状態は、 $V_{31} + V_{12}$ で生成される散乱状態のみ(3つばらばらの状態も含む)。31および12の束縛状態は生成されない。

(「そういう終状態は見ない」と宣言するだけで済めばよいが...)

# LS方程式の解の非一意性(つづき)

チャンネル2に入射波が存在する場合の散乱波

$$|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle = |\phi_2\rangle|\Phi_{31}\rangle + G_2^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23})|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle$$

$$\begin{aligned} |\chi_{(2)}^{(+)}\rangle &= \frac{i\eta}{E - H_1 + i\eta}|\phi_2\rangle|\Phi_{31}\rangle + G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle \\ &= G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

チャンネル1に入射波が存在する場合の散乱波

$$|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle$$

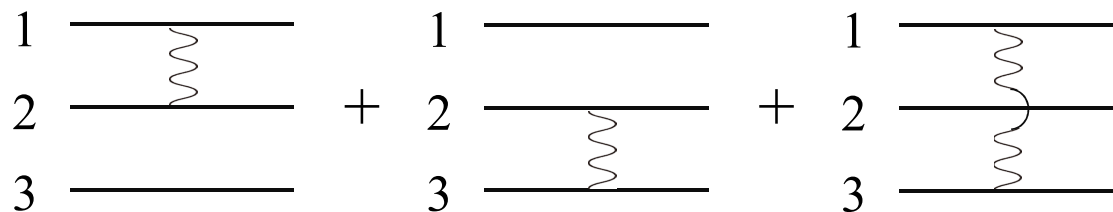
$|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle + \beta|\chi_{(2)}^{(+)}\rangle$  は上の方程式を満たす( $\beta$ は任意の定数)。すなわち単一のLS方程式は、異なるチャンネルに入射波をもつ成分の混在を防げない。これをLS方程式の解の非一意性とよぶ。

# Disconnected Diagram

$$G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G^{(+)}(E)$$

摂動展開

$$G^{(+)}(E) = G_0^{(+)}(E) + \boxed{G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G_0^{(+)}(E)} + G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})G_0^{(+)}(E) + \dots$$



素通りする粒子が存在すると、運動量が等しい平面波のノルム積が表れ、発散が生じる。このような、粒子の素通りを含むダイアグラムを disconnected diagram とよぶ(諸悪の根源)。

# 一意な解を与えるLS方程式のセット

$$\left\{ \begin{array}{l} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E)(V_{23} + V_{31})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{array} \right.$$


※チャンネル2に入射波をもつ波の混入は、2つ目のLS方程式によって防がれている。

## Faddeev分解

$$\begin{aligned} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle &= \frac{i\eta}{E - H_0 + i\eta} |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ &= G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23} + V_{31})|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = \sum_{i=1}^3 |\chi_{i,(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{i,(1)}^{(+)}\rangle &\equiv G_0^{(+)}(E)V_{jk}|\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

## Faddeev方程式(1/3)

$$\begin{aligned}
 G_0^{(+)}(E) V_{23} &\longrightarrow |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 G_0^{(+)}(E) V_{31} &\longrightarrow |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 G_0^{(+)}(E) V_{12} &\longrightarrow |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle
 \end{aligned}$$


 $|\chi_{i,(1)}^{(+)}\rangle \equiv G_0^{(+)}(E) V_{jk} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle$

$$\left\{ \begin{aligned}
 |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle &= G_0^{(+)}(E) V_{23} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_0^{(+)}(E) V_{23} G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle &= G_0^{(+)}(E) V_{31} G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\
 |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle &= G_0^{(+)}(E) V_{12} G_3^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle
 \end{aligned} \right.$$

## Faddeev方程式(2/3)

$$\left\{ \begin{array}{l} |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{23} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_0^{(+)}(E) V_{23} G_1^{(+)}(E) (V_{31} + V_{12}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{31} G_2^{(+)}(E) (V_{12} + V_{23}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \\ |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle = G_0^{(+)}(E) V_{12} G_3^{(+)}(E) (V_{23} + V_{31}) |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{array} \right.$$

$$(H_0 + V_{23} - E) |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle = 0 \longrightarrow G_0^{(+)}(E) V_{23} |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle = |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle$$

$$G_0^{(+)}(E) V_{ij} G_k^{(+)}(E) = G_k^{(+)}(E) V_{ij} G_0^{(+)}(E)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle |\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E) V_{23} (|\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle) \\ |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E) V_{31} (|\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle) \\ |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E) V_{12} (|\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle) \end{array} \right.$$

## Faddeev方程式(3/3)

$$\begin{cases} |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle = |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle + G_1^{(+)}(E)V_{23}\left(|\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle\right) \\ |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle = G_2^{(+)}(E)V_{31}\left(|\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle\right) \\ |\chi_{3,(1)}^{(+)}\rangle = G_3^{(+)}(E)V_{12}\left(|\chi_{1,(1)}^{(+)}\rangle + |\chi_{2,(1)}^{(+)}\rangle\right) \end{cases}$$

チャンネル1に入射波をもつ散乱波

$$\begin{aligned} |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle &= |\phi_1\rangle|\Phi_{23}\rangle \\ &+ \left[ G_1^{(+)}(E)V_{23}G_0^{(+)}(E)(V_{31} + V_{12}) + G_2^{(+)}(E)V_{31}G_0^{(+)}(E)(V_{12} + V_{23}) \right. \\ &\quad \left. + G_3^{(+)}(E)V_{12}G_0^{(+)}(E)(V_{23} + V_{31}) \right] |\chi_{(1)}^{(+)}\rangle \end{aligned}$$

- 解の一意性が保証。
- 全ての組み替えチャンネルが生成される。
- Disconnected diagram は存在しない。



## 3体反応の難点とその克服のまとめ

- 弱束縛原子核の分解反応を記述する際には、**分解チャネルを陽に取り扱う**必要がある。このとき、反応系の構成粒子数は最低でも3となる。
- 3粒子(以上)が関与する反応については、**単一のLippmann-Schwinger方程式(LS方程式)の解は一般に一意ではない**。
- この問題に対して単に「**組み替えチャネルは考えない**」と宣言することは**意味をなさない**。
- 問題の根幹は、**素通りする粒子(disconnected diagram)**の存在にある。
- Faddeevは、**3体反応に対して一意の解を与える厳密理論**を考案した。これを**Faddeev理論**とよぶ。
- ただし、一般にFaddeev理論の計算には**重い数値計算**が必要である。

# 6. 連続状態離散化チャネル結合法

Continuum-Discretized Coupled-Channels method

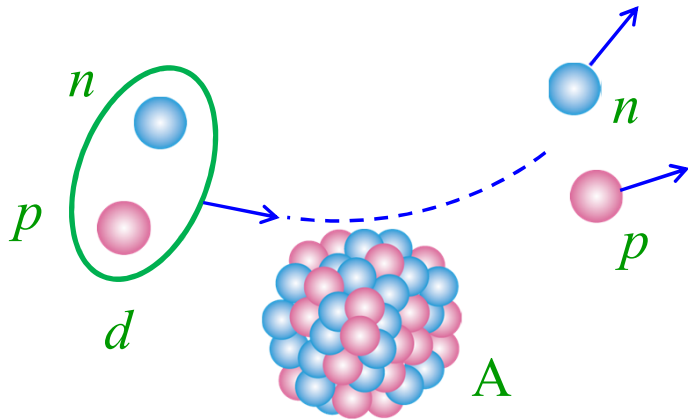
—3体系の反応を描く有効理論—

*cf. M. Kamimura, Yahiro, Iseri, Sakuragi, Kameyama, and Kawai, PTP Suppl. **89**, 1 (1986);  
N. Austern, Iseri, Kamimura, Kawai, Rawitscher, and Yahiro, Phys. Rep. **154** (1987) 126;  
M. Yahiro, Ogata, Matsumoto, and Minomo, PTEP **2012**, 01A206 (2012).*

# 話の要点

- 重陽子(陽子と中性子の2体系)と原子核の反応を考える。
- 3体反応理論の困難を認識した上で、Faddeev 方程式を解かずに済む方法を考える。
  - ✓ 厳密解法を用いる計算は**大変**(最近はそれが流行?)。
  - ✓ 議論できる物理が**制限**される。
  - ✓ 問題が解けることと問題を**理解**することは異なる(cf. 実験)。
- 連続状態離散化チャンネル結合法(Continuum-Discretized Coupled-Channels method; **CDCC**)の理論的基盤を示す。

# $(p+n)+A$ three-body scattering problem



Assumptions for simplicity:

- No spins
- No Coulomb
- No absorption (imaginary pot.)
- 2-body problem solved

Schrödinger Equation

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0.$$

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \phi_d + \frac{1}{E - \underbrace{(K + V_{pn})}_{\equiv H_d} + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

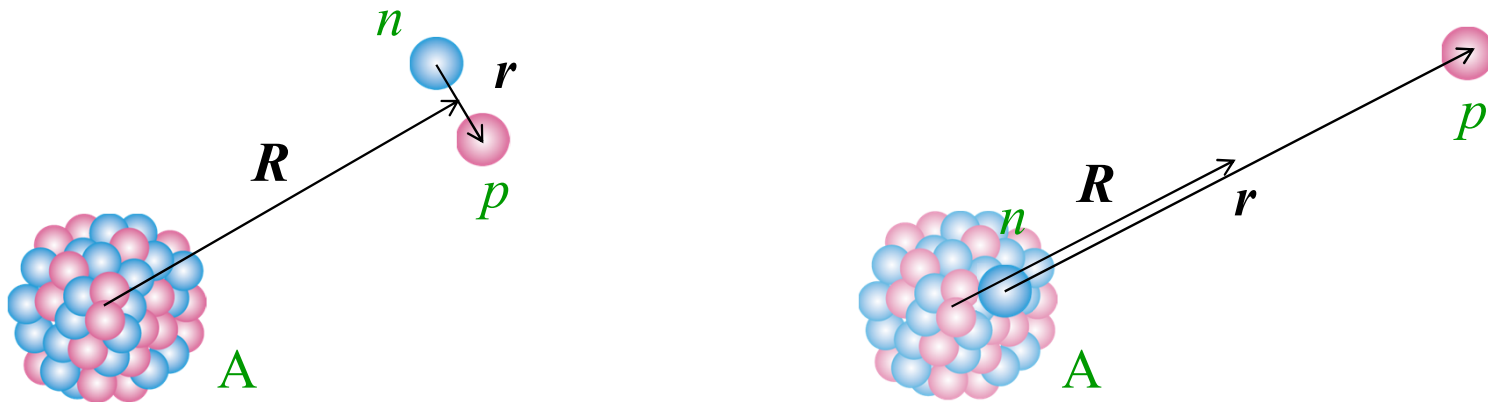
Lippmann-Schwinger (LS) equation

# Problems of the LS equation

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

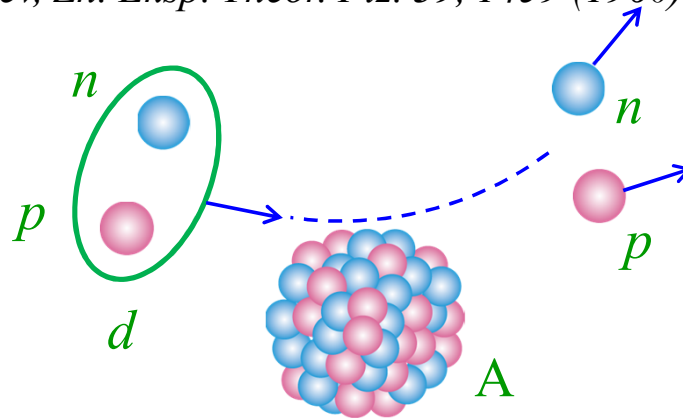
1. Absence of **the rearrangement channels**
2. Divergence problem due to **the disconnected diagram**
3. **Nonuniqueness** of the solution

The b.c. of the LS Eq. is not appropriate.



# The Faddeev theory

*L. D. Faddeev, Zh. Eksp. Theor. Fiz. 39, 1459 (1960) [Sov. Phys. JETP 12, 1014 (1961)].*



$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Faddeev Eqs.

$$[E - K - V_{pn}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = V_{nA} \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = V_{pA} \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

# Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. **63**, 2649 (1989);*

*N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C **53**, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Faddeev Eqs.

$$[E - K - V_{pn}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = V_{nA} \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = V_{pA} \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

# Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. **63**, 2649 (1989);*

*N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C **53**, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

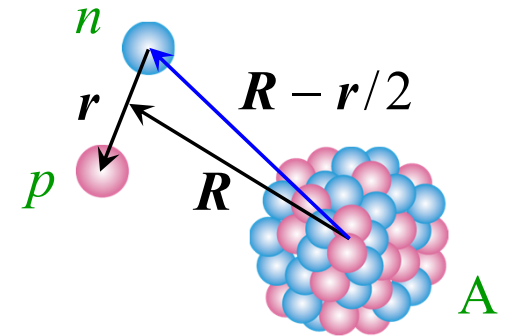
Distorted Faddeev Eqs.

$$[E - K - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

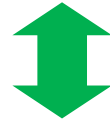
$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$





# The $l$ -truncation

$U_n(R_n)$  は  $R_n \sim |\mathbf{R} - \mathbf{r}/2|$  について有限レンジ



$R$  がいくら大きくても、 $d$  の分解状態は  $r$  について無限の広がりを持つため、 $U_n$  を 0 とみなせない。



$l$ -truncation (離散化チャネル結合法の最重要近似)

$d$  (分解状態) の  $l$  はある上限値  $l_{\max}$  までしか関与しないと想定  
(軌道角運動量)

$$\text{射影演算子: } \mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{\mathbf{r}}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}')$$

## Role of the $\ell$ -truncation (1/2)

$n$ -A 相互作用にガウス型を想定:

$$U_n (|\mathbf{R} - \mathbf{r}/2|) = U_0 \exp \left[ -\nu (\mathbf{R} - \mathbf{r}/2)^2 \right] = U_0 \exp \left[ -\nu (R^2 + r^2/4 - \mathbf{R} \cdot \mathbf{r}) \right]$$

$l_{\max} = 0$  で射影:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 e^{-\nu(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)^2} &= \int d\hat{\mathbf{r}}' Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{00}^*(\hat{\mathbf{r}}') e^{-\nu(\mathbf{R}-\mathbf{r}'/2)^2} \\ &= U_0 e^{-\nu(R^2+r^2/4)} \\ &\quad \times \int d\hat{\mathbf{r}}' Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{00}^*(\hat{\mathbf{r}}') 4\pi \sum_{\lambda\mu} (-i)^\lambda j_\lambda(i\nu Rr) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{\mathbf{R}}) Y_{\lambda\mu}(\hat{\mathbf{r}}') \\ &= U_0 e^{-\nu(R^2+r^2/4)} j_0(i\nu Rr) = U_0 \frac{e^{-\nu(R+r/2)^2} - e^{-\nu(R-r/2)^2}}{2\nu Rr} \end{aligned}$$

射影された相互作用は、 $R$  または  $r$  が大きければ減衰(3体相互作用)。

## Role of the $\ell$ -truncation (2/2)

$n$ -A 相互作用(ガウス型)の多重極展開:

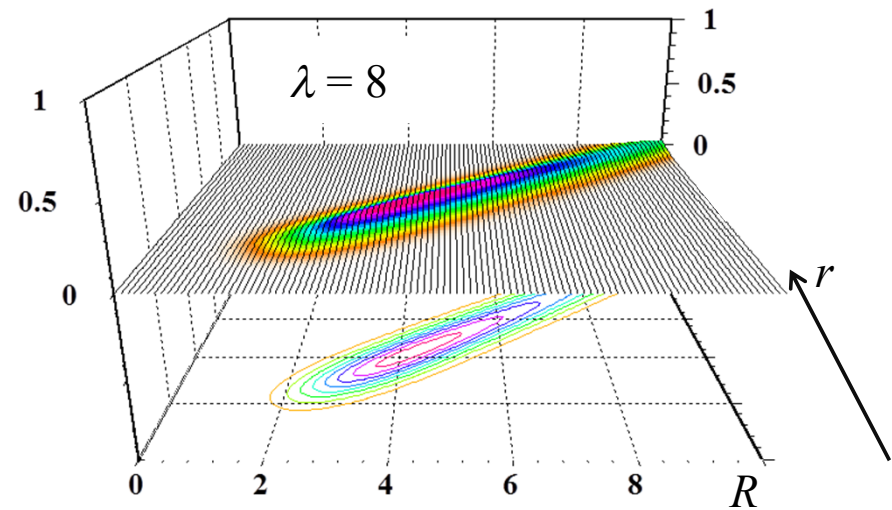
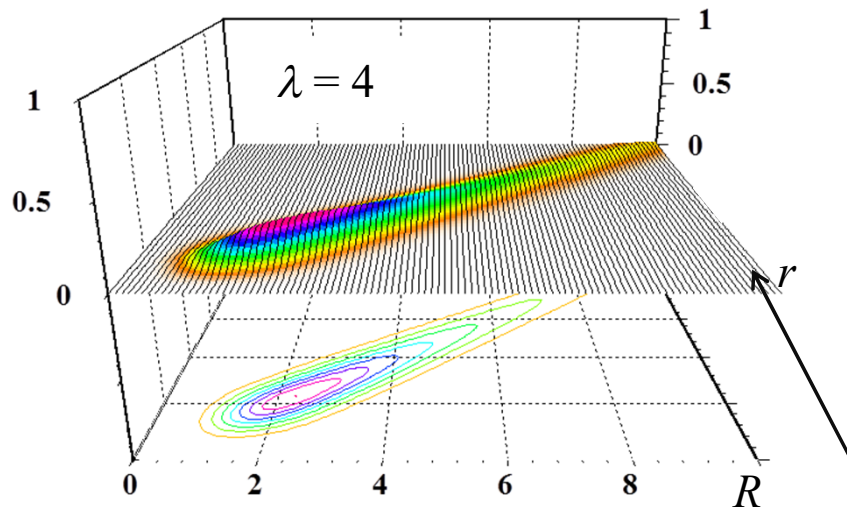
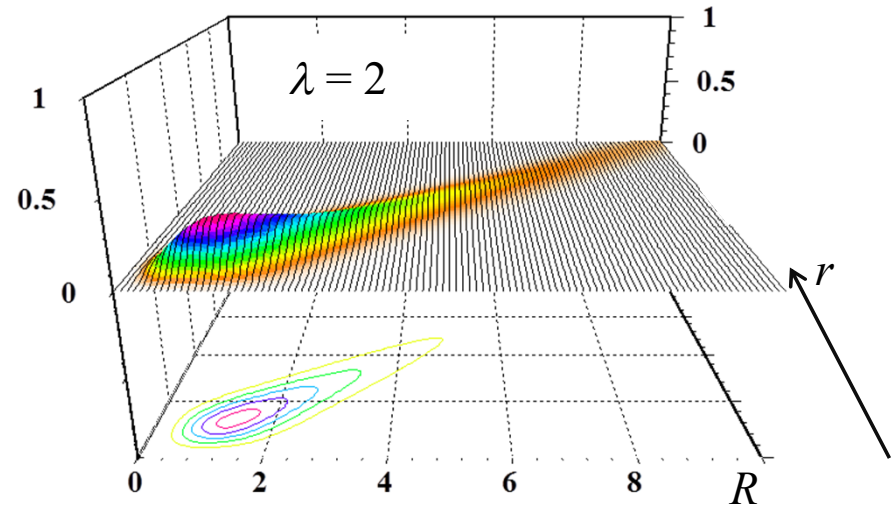
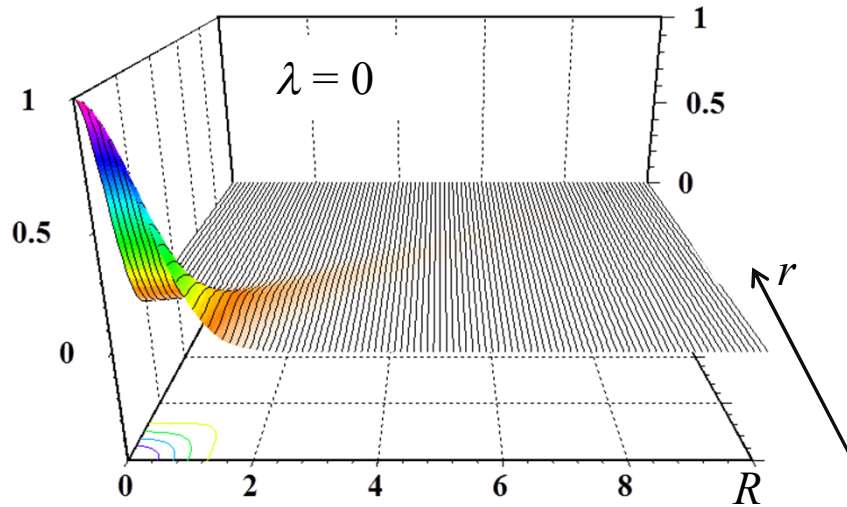
$$U_n(|\mathbf{R} - \mathbf{r}/2|) = U_0 \sum_{\lambda} U_n^{(\lambda)}(R, r) P_{\lambda}(\cos \theta_{Rr})$$

$$U_n^{(\lambda)}(R, r) = (2\lambda + 1) e^{-\nu(R^2 + r^2/4)} (-i)^{\lambda} j_{\lambda}(i\nu Rr)$$

$$U_n^{(\lambda)}(R, r) \rightarrow (2\lambda + 1) (-i)^{\lambda} \frac{e^{-\nu(R-r/2)^2}}{2\nu Rr}, \quad \nu Rr \gg \lambda$$

ポテンシャルが  $R^{-2}$  で減衰する領域が存在 → 漸近領域

# Multipoles of Gaussian interaction



# Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. **63**, 2649 (1989);*

*N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C **53**, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Distorted Faddeev Eqs. not pair int. but 3-body int.

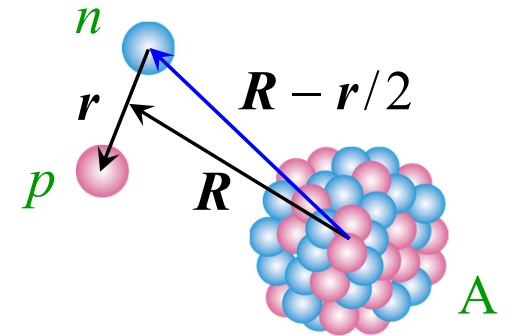
$$[E - K - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n),$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

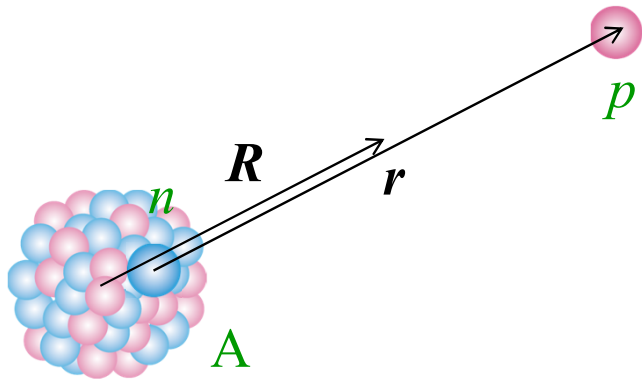
$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$$\mathcal{P}_0 e^{-\mu(\mathbf{R}-\mathbf{r}/2)^2} = U_0 \frac{e^{-\nu(R+r/2)^2} - e^{-\nu(R-r/2)^2}}{2\nu Rr}$$



# $l$ -truncationの直観的理解



$$\mathcal{P}_{l_{\max}} = \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}')$$

$l_{\max} \rightarrow \infty$  なら、 $r$  の角度に関するデルタ関数



$\mathcal{P}_{l_{\max}}$  は、 $1/l_{\max}$  程度の幅で  $r$  の角度をぼかす。

組み替えチャンネルの漸近解は、 $r$  と  $R_c$  を極めて良く揃えなければ表現できないため、 $\mathcal{P}_{l_{\max}}$  によって著しく抑制される。

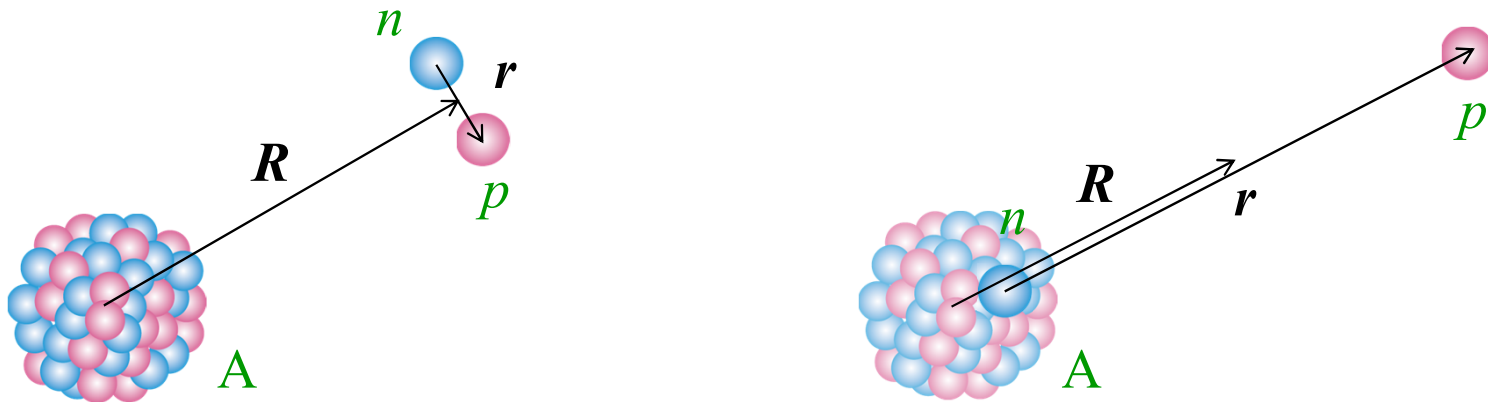
cf.  $p$  から見た  $n$  の立体角は  $1/R_p^2$  に比例。角度平均の範囲がこれと同程度なら変化なし。 $l_{\max} = 0$  は全角度平均なので  $1/R_p^2$  が出る。

# Problems of the LS equation

$$\Psi = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} (V_{pA} + V_{nA}) \Psi.$$

- 1. Absence of **the rearrangement channels**
- 2. Divergence problem due to **the disconnected diagram**
- 3. **Nonuniqueness** of the solution

The b.c. of the LS Eq. is not appropriate.



# Three-body theory in a model space

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);*

*N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

$$[E - K - V_{pn} - V_{pA} - V_{nA}] \Psi = 0, \quad \Psi = \Psi_d + \Psi_p + \Psi_n.$$

Distorted Faddeev Eqs.

not pair int. but 3-body int.

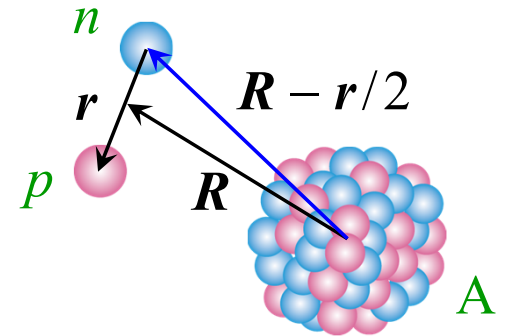
→ 0

$$[E - K - V_{pn} - \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}}] \Psi_d = V_{pn} (\Psi_p + \Psi_n)$$

$$[E - K - V_{nA}] \Psi_n = (V_{nA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{nA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{nA} \Psi_p,$$

$$[E - K - V_{pA}] \Psi_p = (V_{pA} - \mathcal{P}_{l_{\max}} V_{pA} \mathcal{P}_{l_{\max}}) \Psi_d + V_{pA} \Psi_n.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{l_{\max}} &= \int d\hat{r}' \sum_{l \leq l_{\max}} \sum_m Y_{lm}(\hat{r}) Y_{lm}^*(\hat{r}') \\ &= U_0 \frac{e^{-\nu(R+r/2)^2} - e^{-\nu(R-r/2)^2}}{2\nu Rr} \end{aligned}$$





# CDCC, as an alternative to the Faddeev theory

*N. Austern, M. Yahiro, and M. Kawai, Phys. Rev. Lett. 63, 2649 (1989);  
N. Austern, M. Kawai, and M. Yahiro, Phys. Rev. C 53, 314 (1996).*

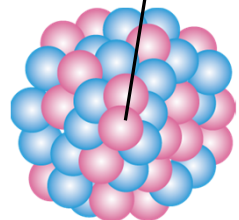
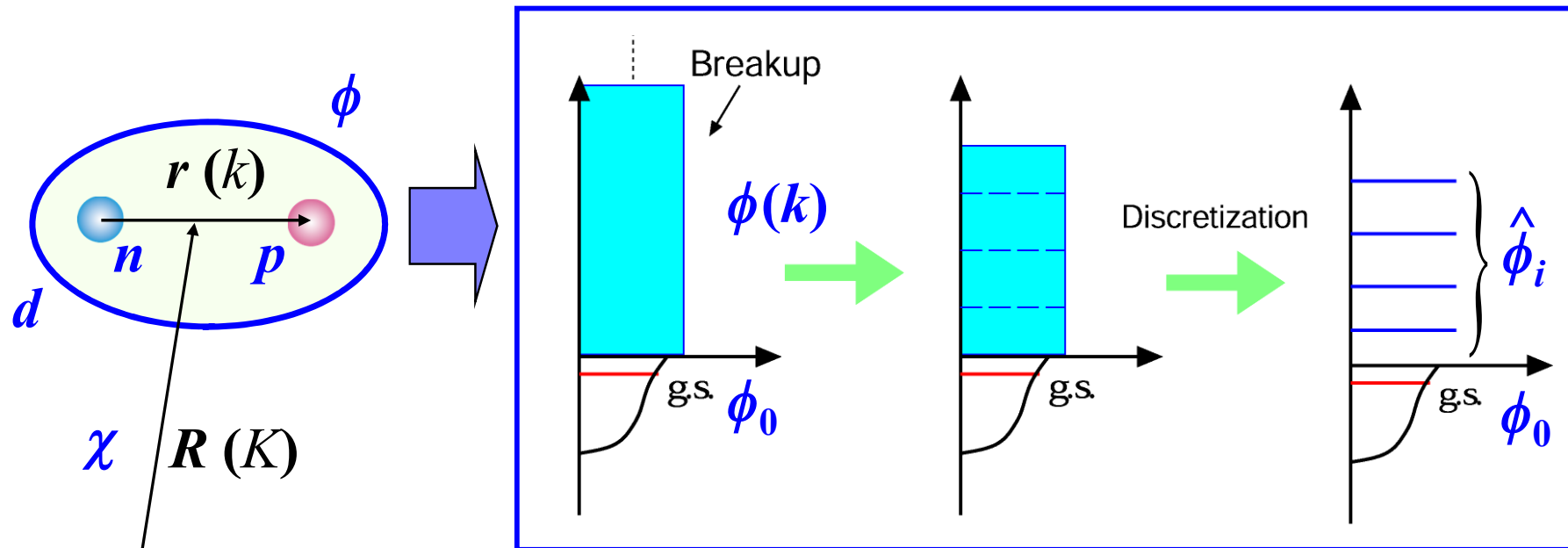
CDCC solves the following LS eq.:

$$\Psi^{\text{CDCC}} = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}\phi_d + \frac{1}{E - H_d + i\varepsilon} \mathcal{P}_{l_{\max}} (V_{nA} + V_{pA}) \mathcal{P}_{l_{\max}} \Psi^{\text{CDCC}}.$$

CDCC gives a proper solution to a three-body scattering problem *if* the solution converges w/ respect to  $l$ .

- Continuum-Discretization has nothing to do w/ the justification of CDCC.
- $l$ -truncation allows one to truncate also  $r$  and  $k$ .
- Convergence for other quantities ( $r_{\max}$ ,  $k_{\max}$ , and  $\Delta k$ , etc.) must be confirmed to obtain a proper solution to the LS Eq.

# The Continuum-Discretized Coupled-Channels method: CDCC (after $l$ -truncation)



**A**

$$\psi = \phi_0 \chi_0 + \int_0^\infty \phi_k \chi_k dk \quad \Rightarrow \quad \psi^{\text{CDCC}} = \sum_i^{i_{\max}} \hat{\phi}_i \hat{\chi}_i$$

cf. M. Kamimura, Yahiro, Iseri, Sakuragi, Kameyama, and Kawai, *PTP Suppl.* **89**, 1 (1986);  
 N. Austern, Iseri, Kamimura, Kawai, Rawitscher, and Yahiro, *Phys. Rep.* **154** (1987) 126;  
 M. Yahiro, Ogata, Matsumoto, and Minomo, *PTEP* **2012**, 01A206 (2012).

# 連続状態の離散化の方法I (average法)

散乱波動関数を波数幅  $\Delta k$  にわたって積分する。自由波の場合は

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{l,i}^{\text{free}}(r) &\equiv \int_{k_i}^{k_i+\Delta k} \varphi_l^{\text{free}}(k, r) dk = \int_{k_i}^{k_i+\Delta k} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) dk \\ &= \frac{-1}{r} \left( \cos\left[\left(k_i + \Delta k\right)r - \frac{l\pi}{2}\right] - \cos\left[k_i r - \frac{l\pi}{2}\right] \right)\end{aligned}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

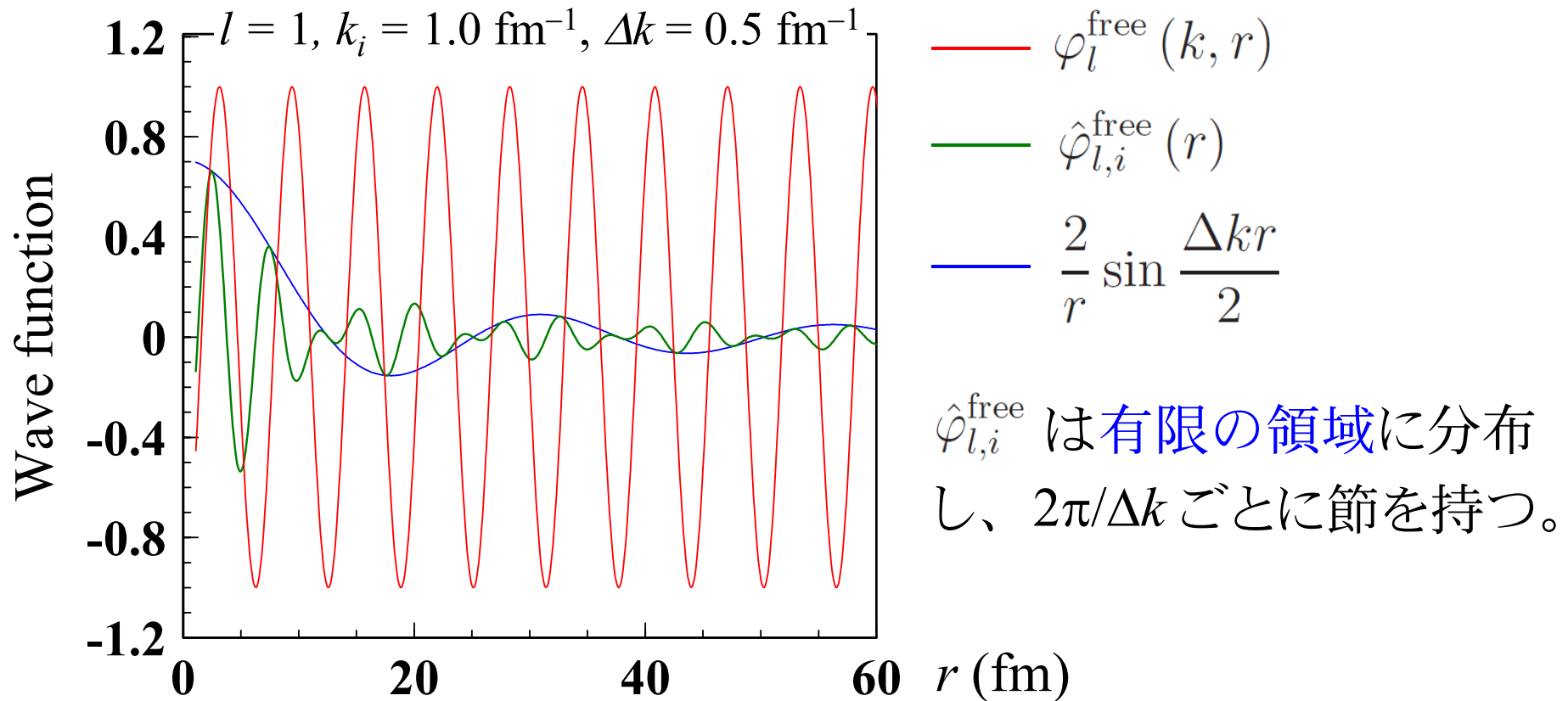
減衰因子

付加的な振動因子

$$\hat{\varphi}_{l,i}^{\text{free}}(r) = \left[ \frac{2}{r} \right] \sin\left(\left[ k_i + \frac{\Delta k}{2} \right] r - \frac{l\pi}{2}\right) \left[ \sin \frac{\Delta k r}{2} \right]$$

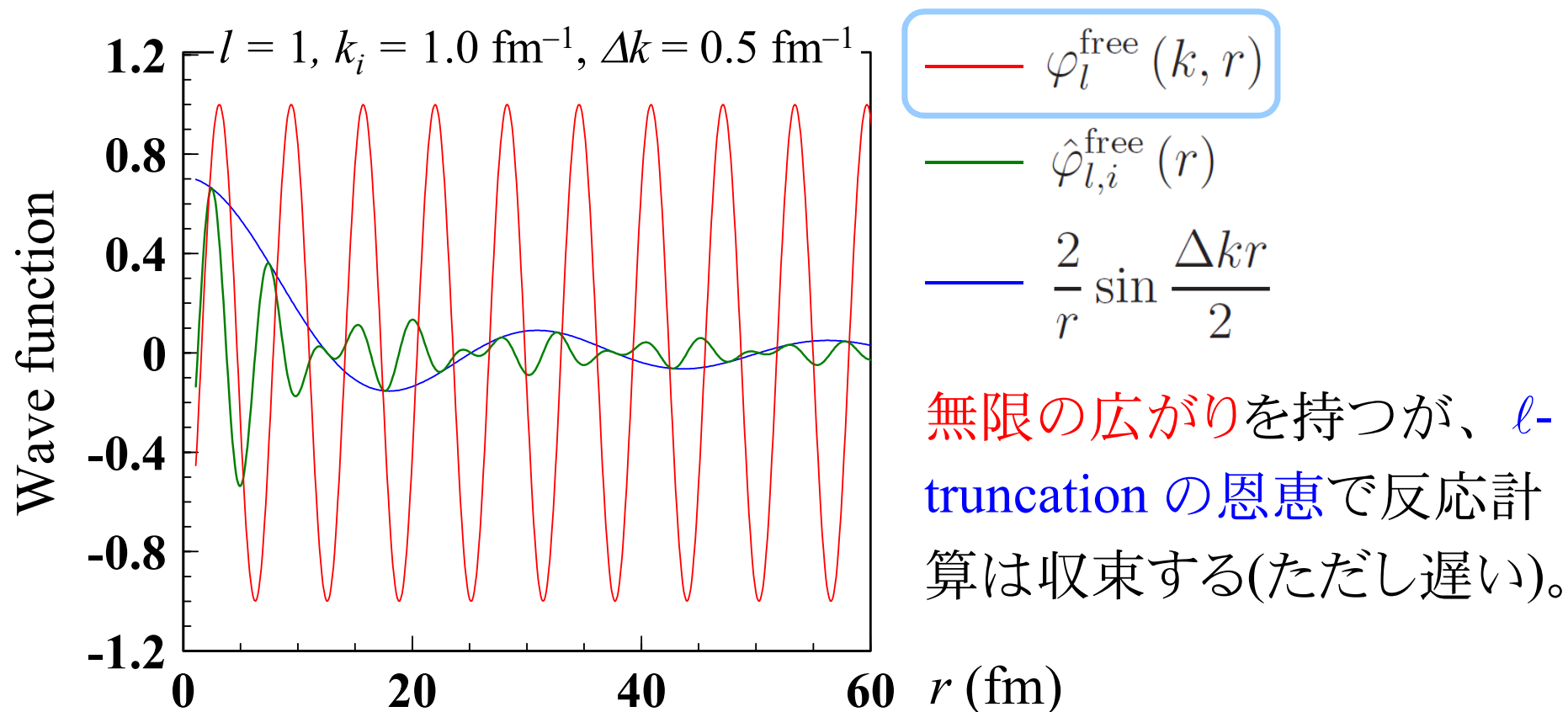
# 離散化された連続状態のふるまい

$$\hat{\varphi}_{l,i}^{\text{free}}(r) = \sin\left(\left[k_i + \frac{\Delta k}{2}\right]r - \frac{l\pi}{2}\right) \frac{2}{r} \sin\frac{\Delta kr}{2}$$



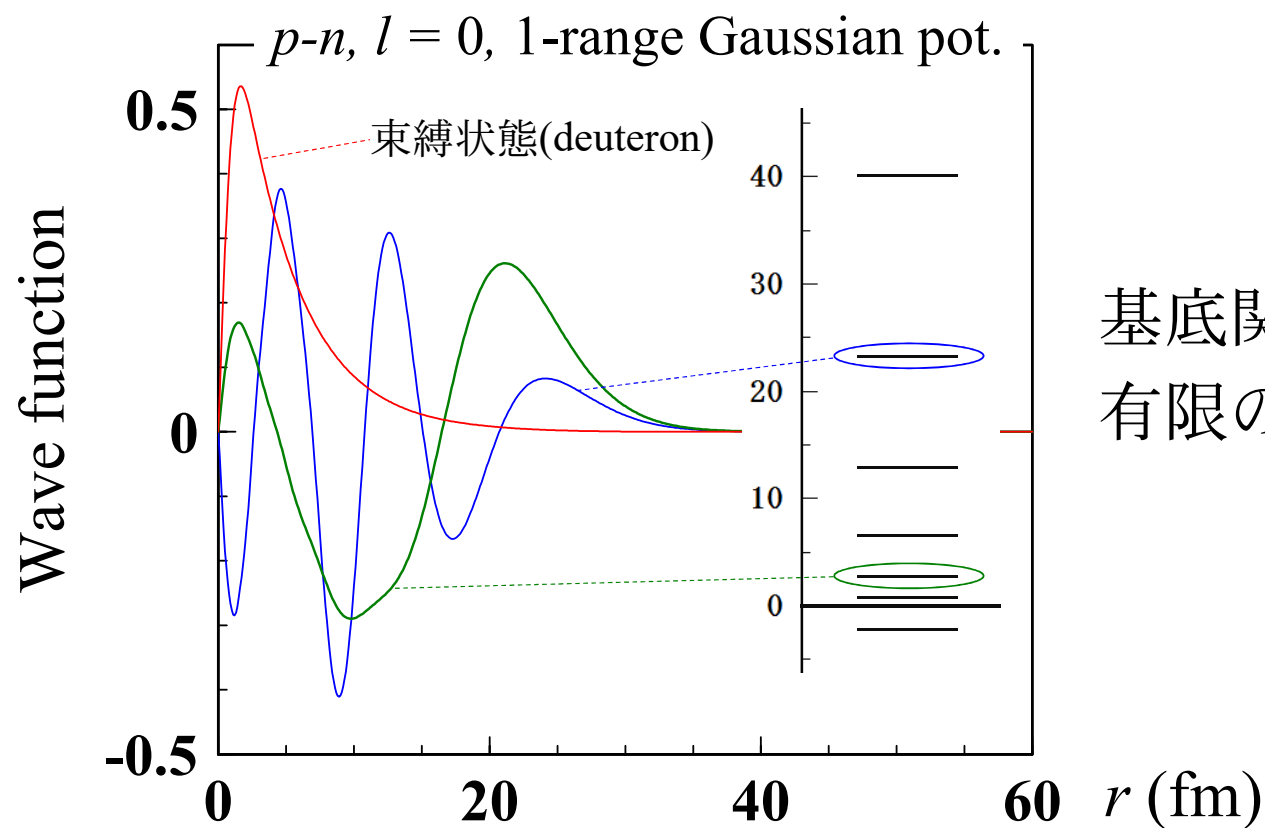
# 連続状態の離散化の方法II (midpoint法)

$k = k_i + \Delta k/2$  における散乱波動関数をそのまま採用する。



# 連続状態の離散化の方法III (pseudostate法)

入射粒子の内部ハミルトニアンを基底関数で対角化し、得られた擬状態(閾値よりも上の状態)を離散化された連続状態とみなす。



基底関数の広がりに応じた有限の空間に分布する。

# 離散化の手法の比較

- 3つの手法は、弾性散乱断面積・全分解断面積について完全に同じ結果を与えることが確認されている。

※全分解断面積:  $i = 1-i_{\max}$  のチャンネルに遷移(分解)する断面積の和

- Mid法はCDCCCの正当性にとっては重要だが、実際の計算では、収束が速く、状態のコントロールが容易なAv法が便利。  
→ 標準的な手法として広く普及

- PS法は最も初期に開発されたが、CDCCCで得られる離散的な結果を連続化する処方がなく、長く利用されていなかった。

※Av法では、幅  $\Delta k$  の連続状態を等重で束ねた状態への遷移

を考えているので、 $S_0(k) \sim \frac{S_{i0}}{\sqrt{\Delta k}}$  とすれば良い。

# 離散的な結果の連続化(平滑化)

簡単のため、 $k_\beta$ の大きさのみを指定した観測量を考える:

$$T_{\beta\alpha} \sim \langle \phi_{k_\beta} e^{i\mathbf{K}_\beta \cdot \mathbf{R}} | U_n + U_c | \Psi_\alpha^{\text{CDCC}} \rangle$$

$$\mathcal{P} \equiv \sum_{i=0}^{i_{\max}} |\hat{\phi}_i\rangle \langle \hat{\phi}_i| \sim 1$$

CDCCで求めた*i*チャンネルへの遷移行列

$$\sim \sum_{i=0}^{i_{\max}} \langle \phi_{k_\beta} | \hat{\phi}_i \rangle \langle \hat{\phi}_i e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}} | U_n + U_c | \Psi_\alpha^{\text{CDCC}} \rangle$$

離散状態と連続状態のoverlap

(平滑化関数):  $f_i(k_\beta)$

この考え方は、PS法にも適用可能。



## 平滑化関数( $\Delta v$ 法の場合)

規格化係数  $\hat{\varphi}_i(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_i}^{k_i + \Delta k} \varphi(k, r) dk$

$$\int \varphi^*(k, r) \varphi(k', r) dr = \delta(k' - k)$$

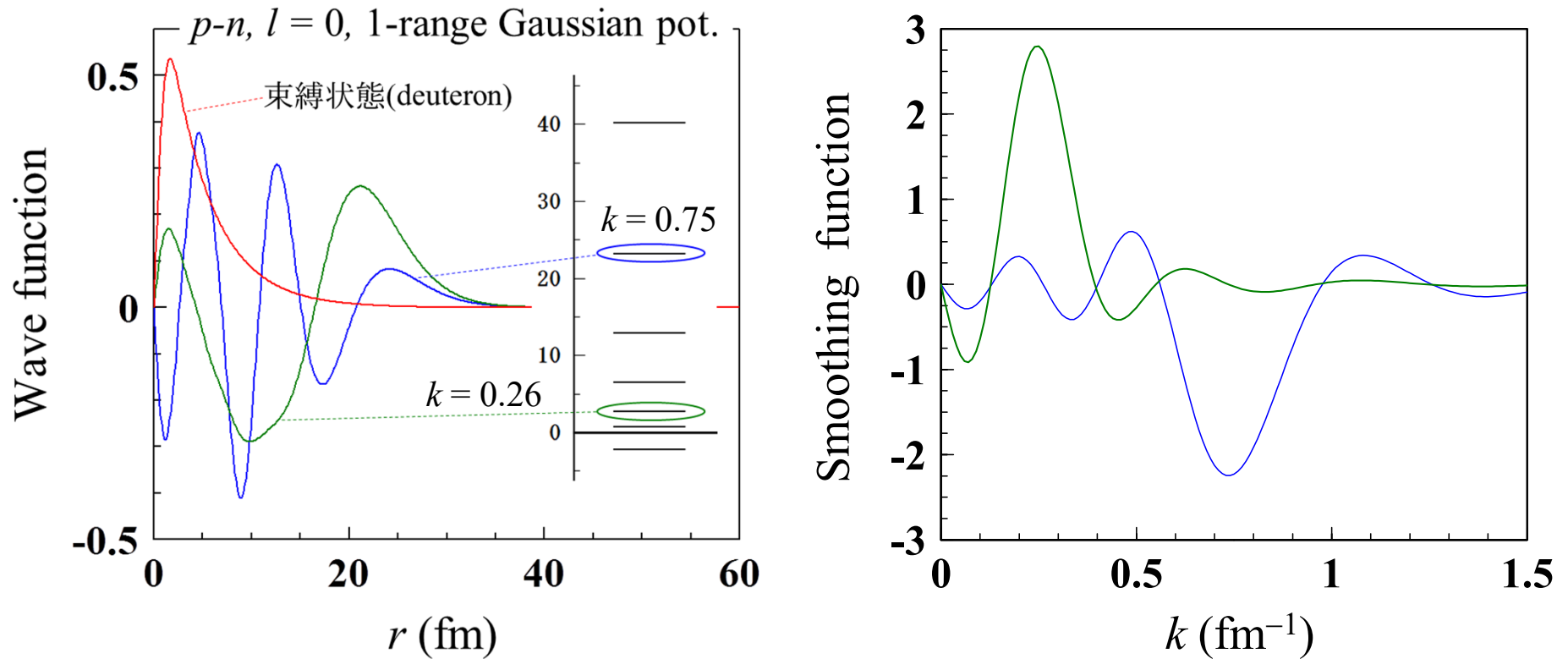


$$f_i(k) = \int \varphi^*(k, r) \hat{\varphi}_i(r) dr$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int dr \int_{k_i}^{k_i + \Delta k} dk' \varphi^*(k, r) \varphi(k', r)$$

通常の場合と同じ答

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} \int_{k_i}^{k_i + \Delta k} dk' \delta(k' - k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta k}} & (k_i < k < k_i + \Delta k) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

# 平滑化関数(PS法)

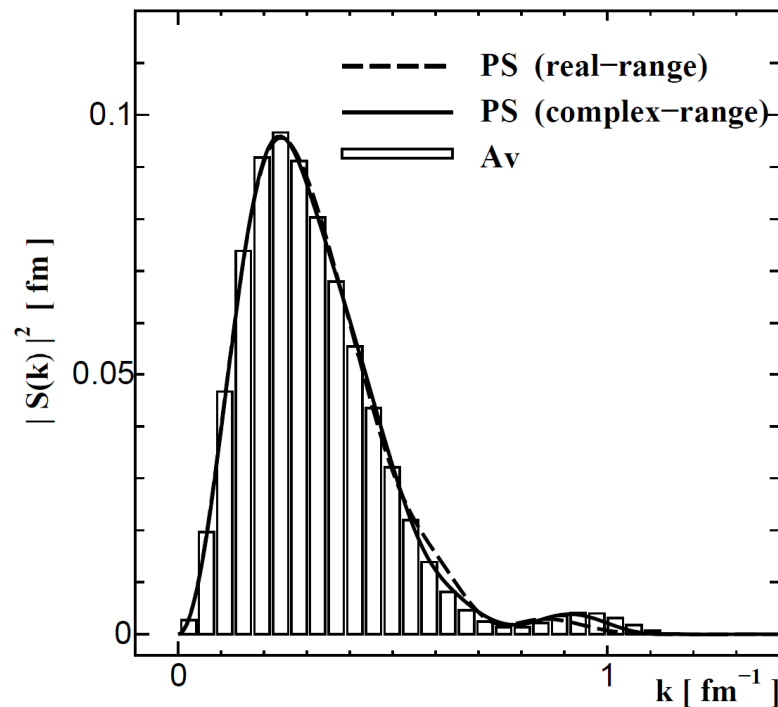


固有値に対応する  $k$  にピークを持つが、有意の広がりを持つ。

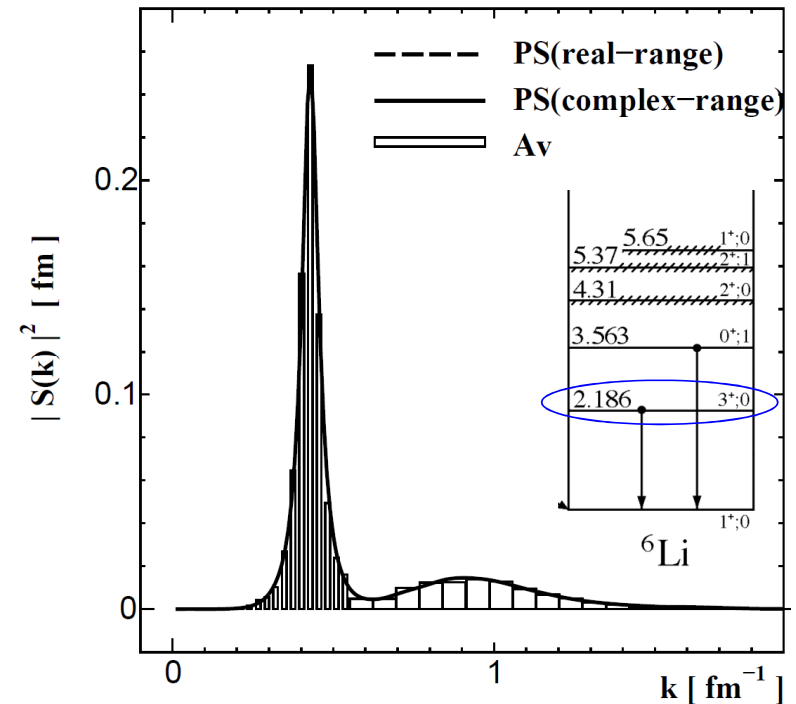
# 平滑化の実例(A<sub>v</sub>法 vs PS法)

T. Matsumoto, Kamizato, O, Iseri, Hiyama, Kamimura, Yahiro, Phys. Rev. C **68**, 064607 (2003).

$d+^{58}\text{Ni}$  at 80 MeV

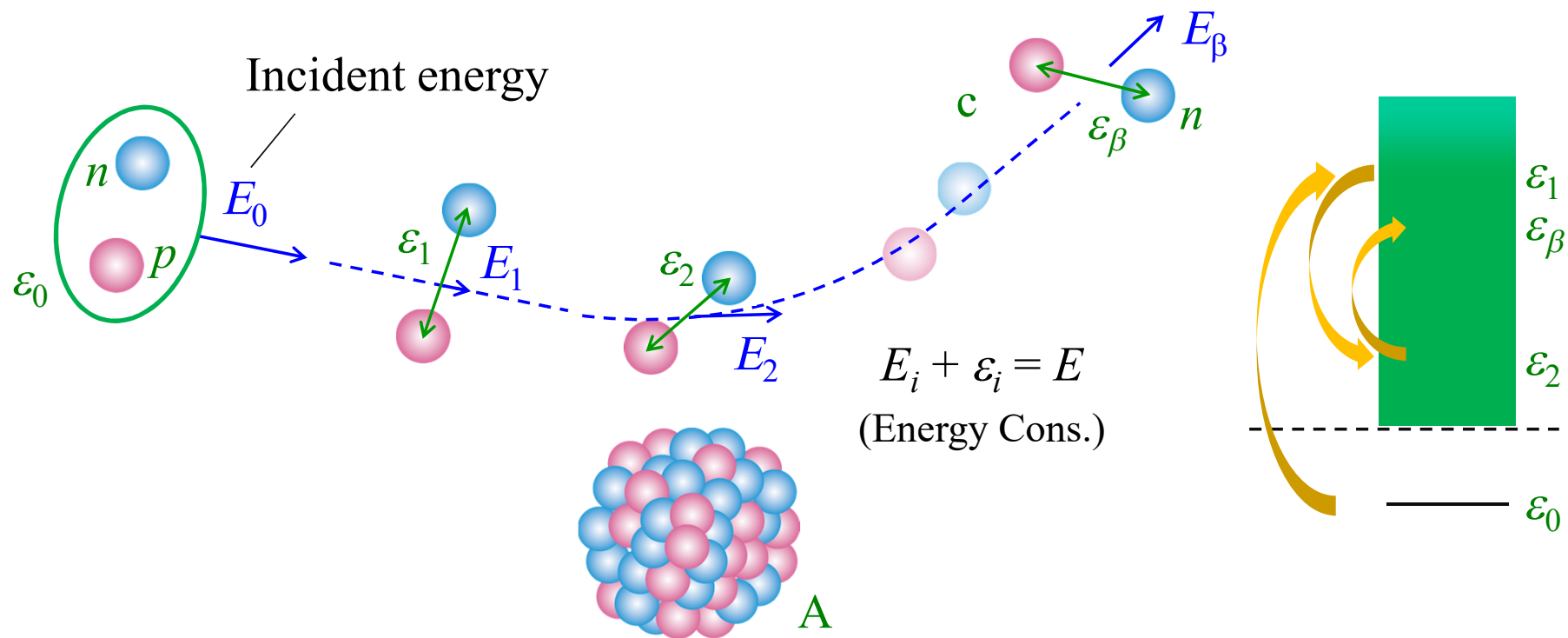


$^6\text{Li}+^{40}\text{Ca}$  at 156 MeV



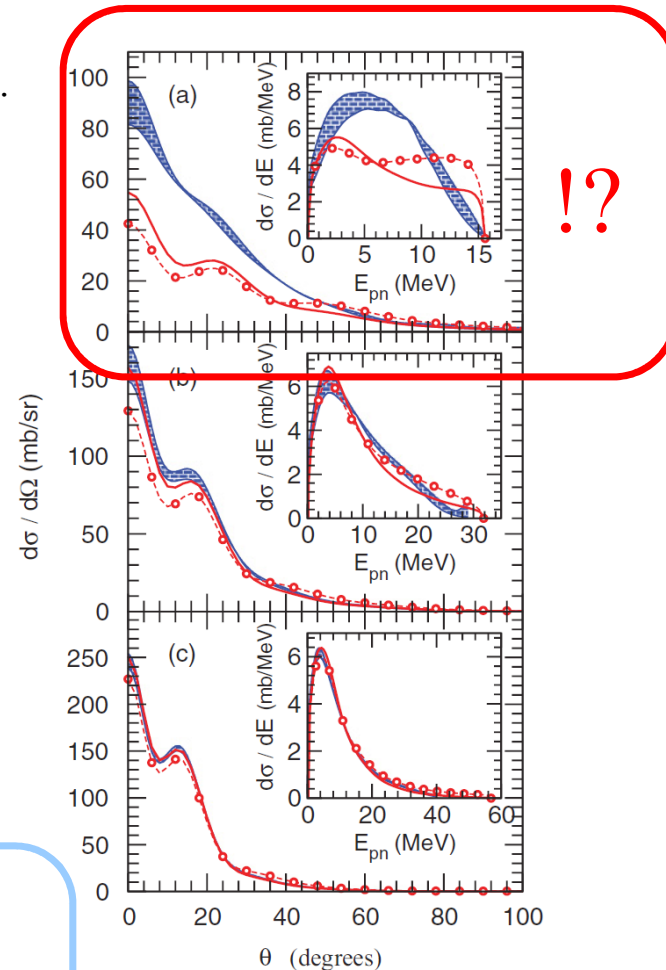
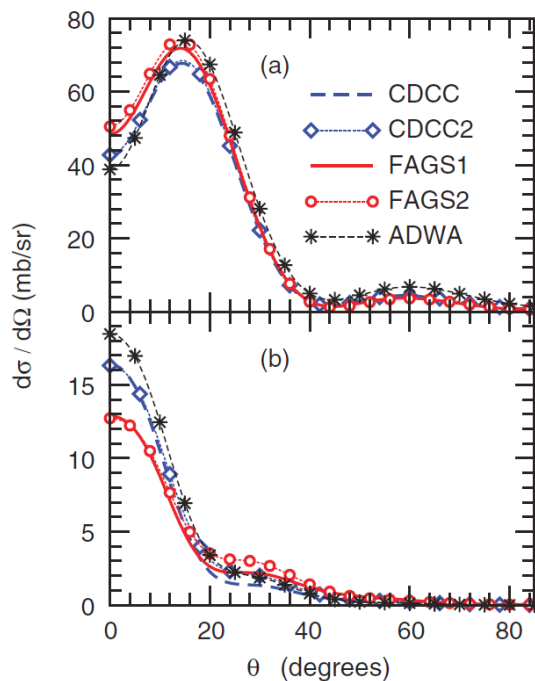
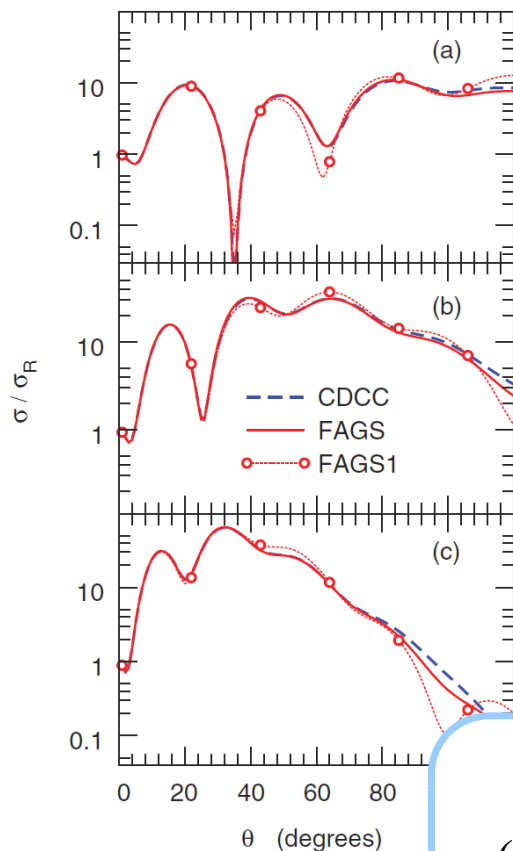
平滑化した遷移強度は両者で極めて良く一致。

# CDCCのイメージ図



# (20 years later...) Faddeev-AGS vs. CDCC

*N. J. Upadhyay, A. Deltuva, F. M. Nunes, PRC 85, 054621 (2012).*

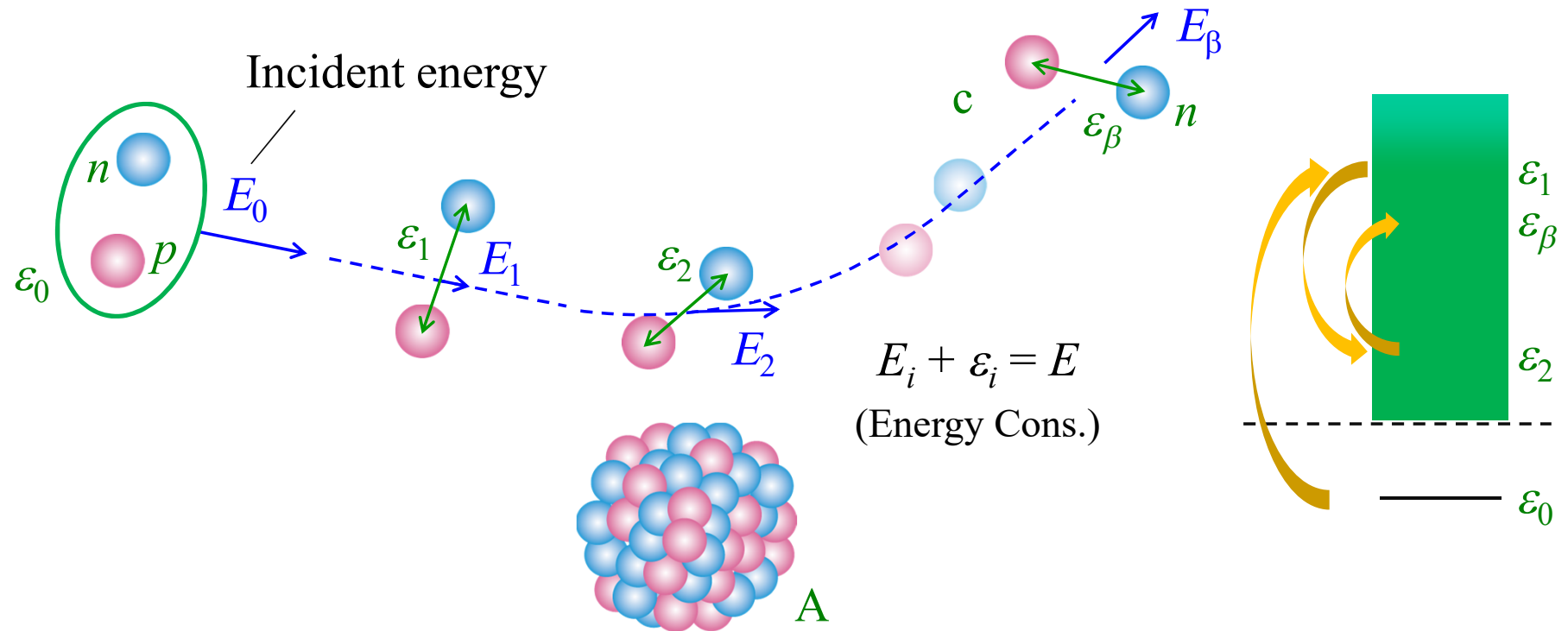


CDCCの有効性を再確認  
(模型空間における3体反応理論)

FIG. 2. (Color online) Elastic cross section ratios for the  $^3\text{He} + ^3\text{He}$  reaction at (a)  $E_d = 21.4$  MeV, (b)  $E_d = 40.9$  MeV, and (c)  $E_d = 71$  MeV. Results for CDCC (dashed), FAGS (solid), and FAGS1 (circles).

(Color online) Breakup distributions for the  $^3\text{He} + ^3\text{He}$  reaction at (a)  $E_d = 21$  MeV, (b)  $E_d = 40.9$  MeV, and (c)  $E_d = 71$  MeV. Results for CDCC (hatched band), FAGS (solid), and FAGS1 (circles).

# Description of deuteron breakup process by CDCC

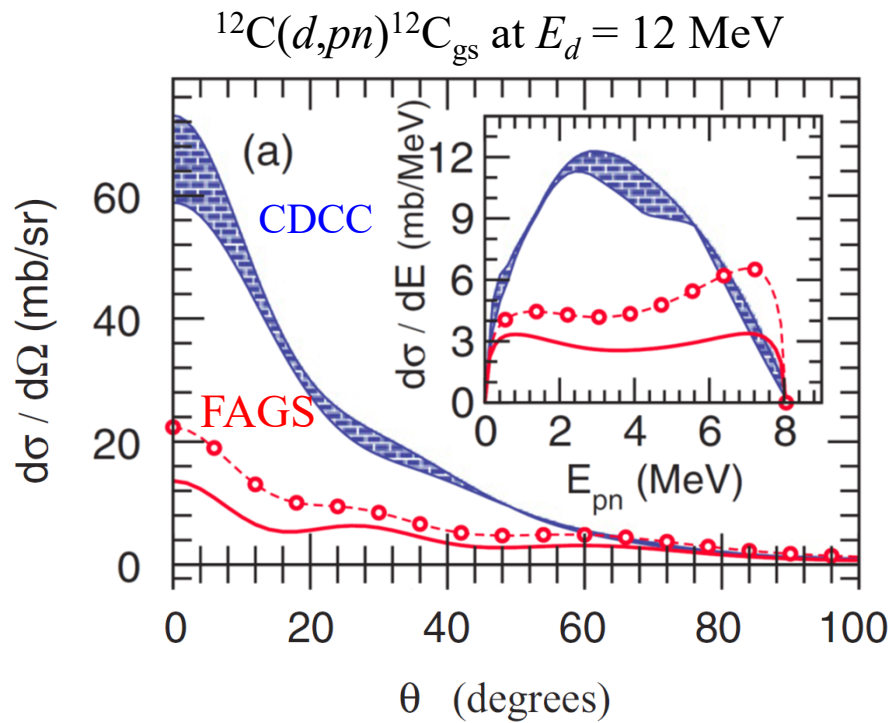


- Open channels ( $E_i > 0$ ): directly connected to observables
- Closed channels ( $E_i < 0$ ): virtual breakup channels

Neglected in the preceding study

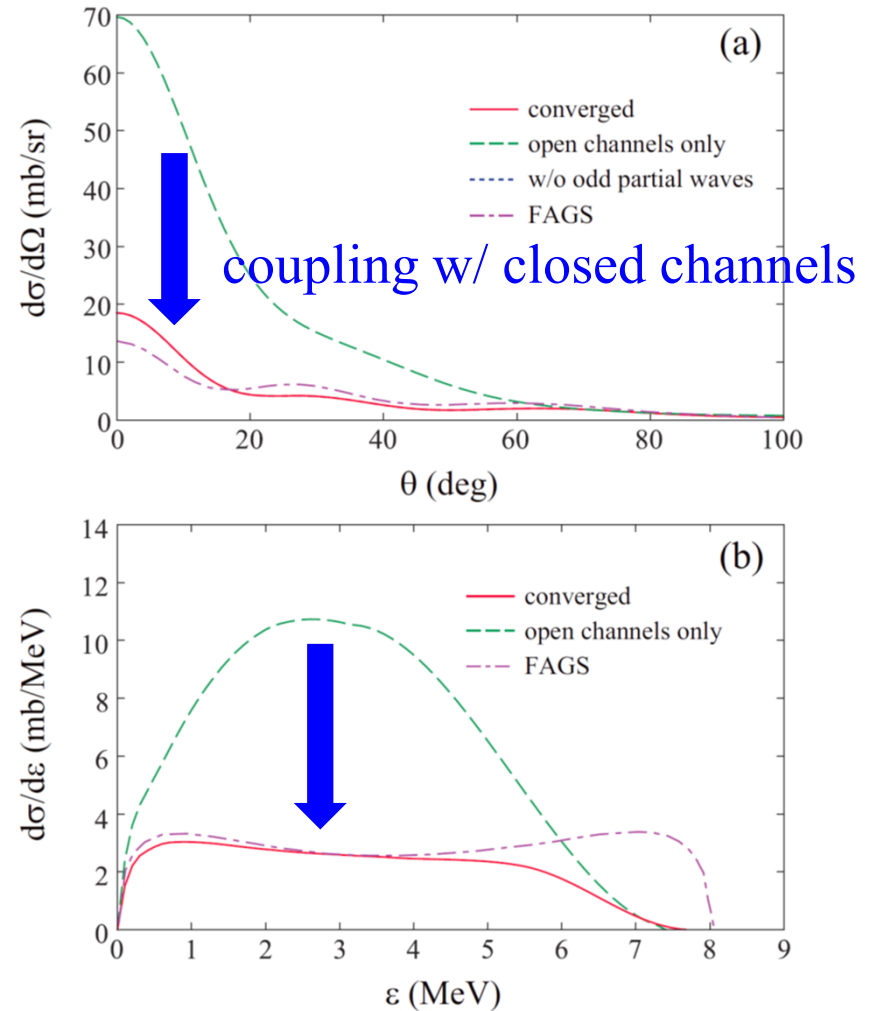
# Applicability of CDCC to low energy BU process

*N. J. Upadhyay et al., PRC 85, 054621 (2012).*



CDCC severely overshoots the result of FAGS, if closed-channels are neglected.

*KO and K. Yoshida, PRC 94, 051603(R) (2016).*

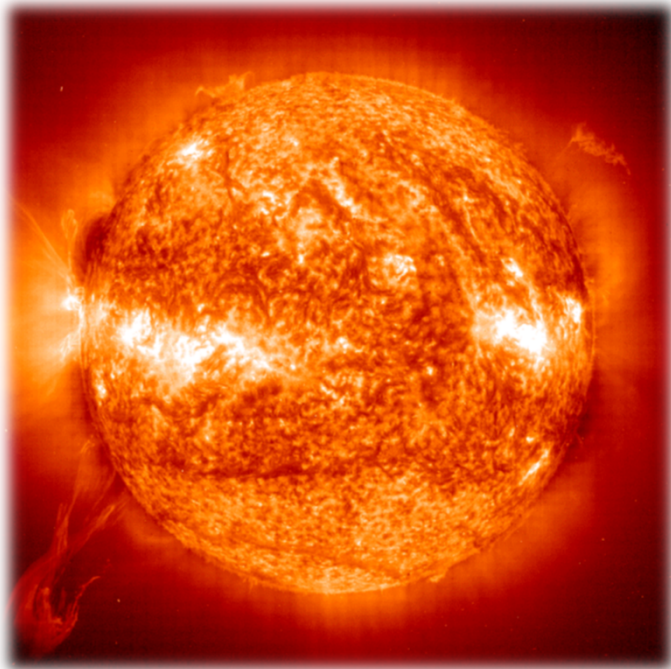


# 連続状態離散化チャネル結合法(CDCC)のまとめ

- CDCCは模型空間中での厳密3体反応理論である。
- 一般には単一のLS方程式を用いることは許されず、Faddeev方程式を解いてはじめて3体系の正しい散乱波が求まる(計算は大変)。
- $l$ -truncation を施した模型空間の中では、単一のLS方程式を用いることが許され得る。
- 有限の  $l_{\max}$  で解が収束する場合には、CDCCはFaddeev理論と等価であるとみなしてよい(約20年後に数値計算により実証)。
- 連続状態を離散化する方法としてはAv法, Mid法, PS法があり、同一の散乱観測量を与えることが確認済み。PS法は3体系をなす入射粒子の反応(4体反応系)にも容易に適用可能であり、活躍している。

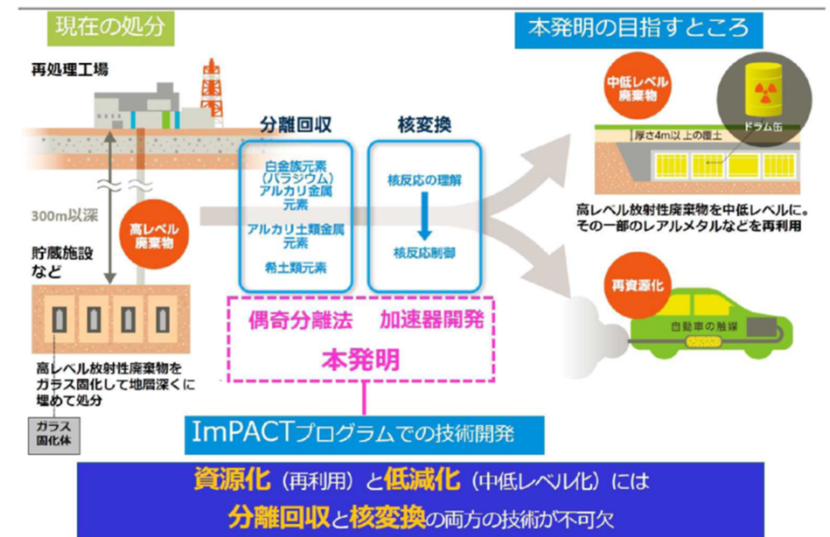


# 7. CDCCを用いた反応研究の紹介

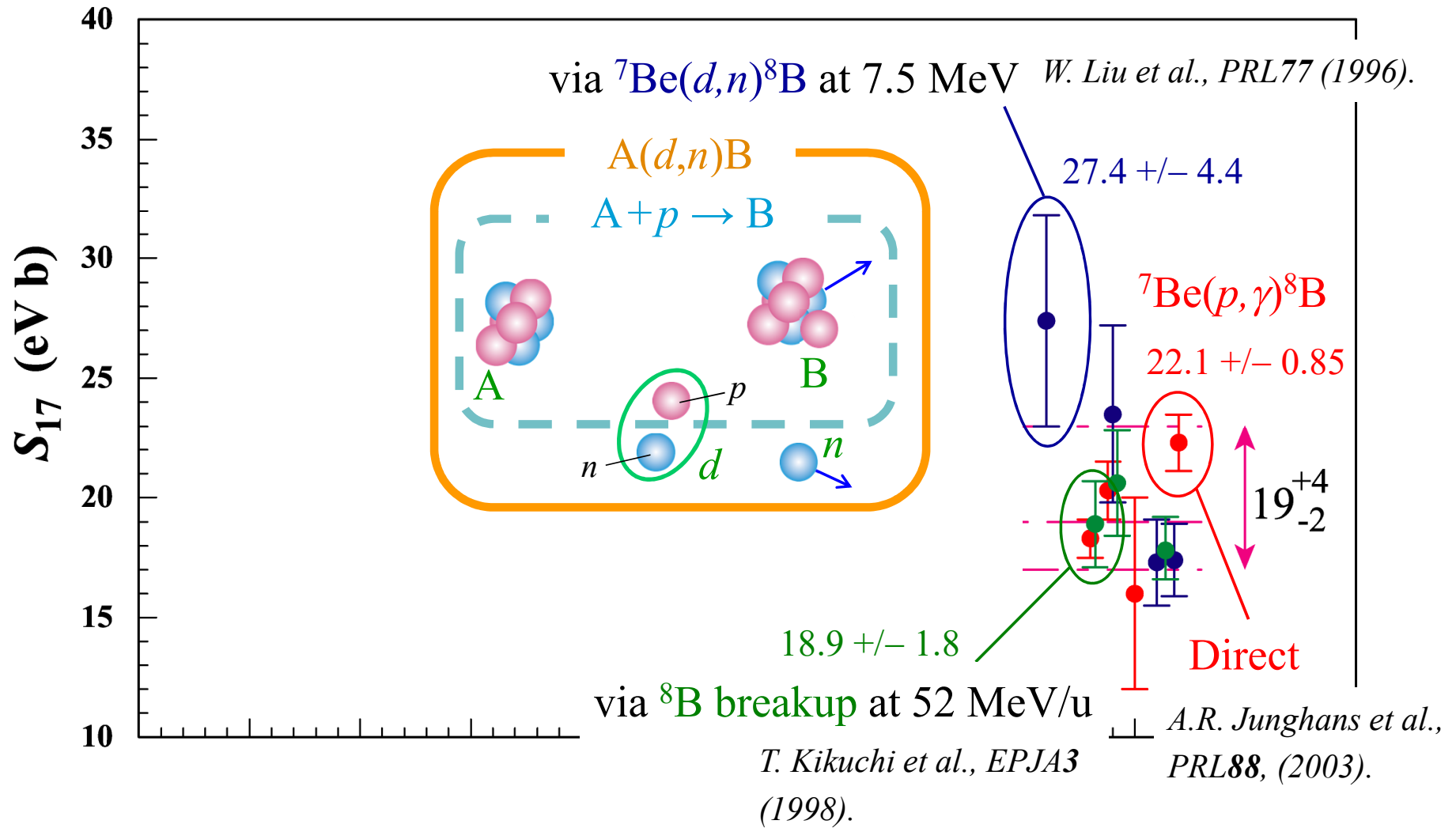


星の中を地上で  
“再現”する

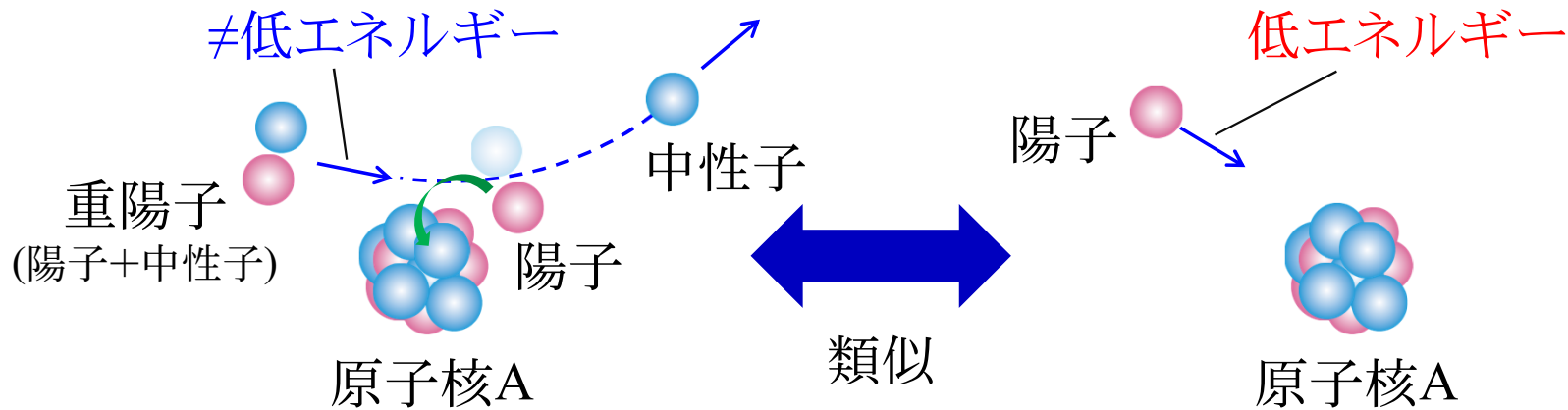
## 核変換への挑戦



# $S_{17}$ chronicle: ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$



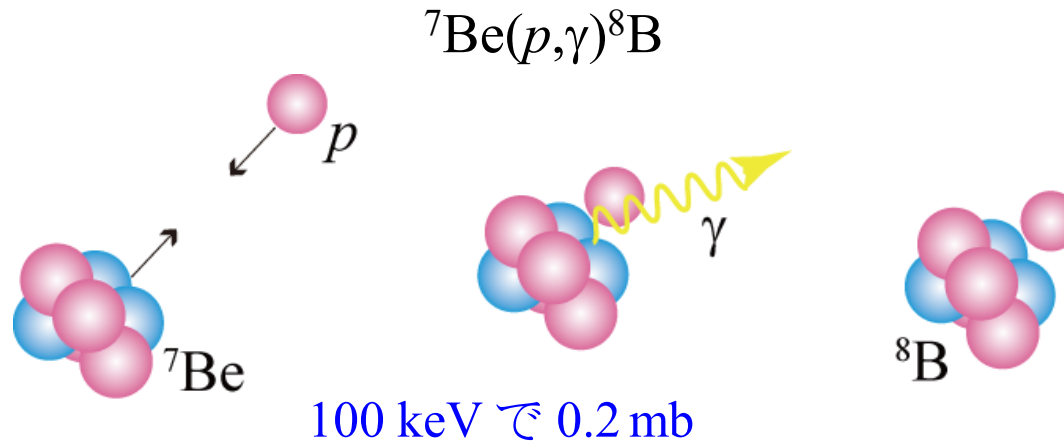
# 代替反応法



類似の反応(代替反応)を測定し、その結果を核反応理論で  
解読することで、恒星内核反応の再現が完成する。

- Q1. 星の中の反応はどの程度起きにくい?
- Q2. 2つの反応はどう似ている?
- Q3. 代替反応をどのように解読する?

# 恒星内反応の断面積



100 keV で  $\sigma_{p\gamma} = \frac{S(E)}{E} \exp\left[-2\pi \frac{Z_p Z_7 e^2}{\hbar v}\right]$  クーロンバリアを透過する確率 (を支配する因子)

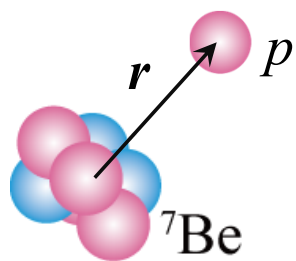
1.2  $\times 10^{-6}$  mb = 1.2 nb  
 (10 keV だとさらに10桁下)  
 cf. ニホニウム生成  $\sim 22$  fb

100 keV で  $6 \times 10^{-6}$

$$\hbar v = \frac{\hbar^2 K}{\mu} = \sqrt{\frac{2\hbar^2 E}{\mu}} \quad 100 \text{ keV で約 } 3 \text{ MeV fm}$$

(A1) 星の中の反応はとてつもなく起きにくい!

# 恒星内反応の描述



${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$

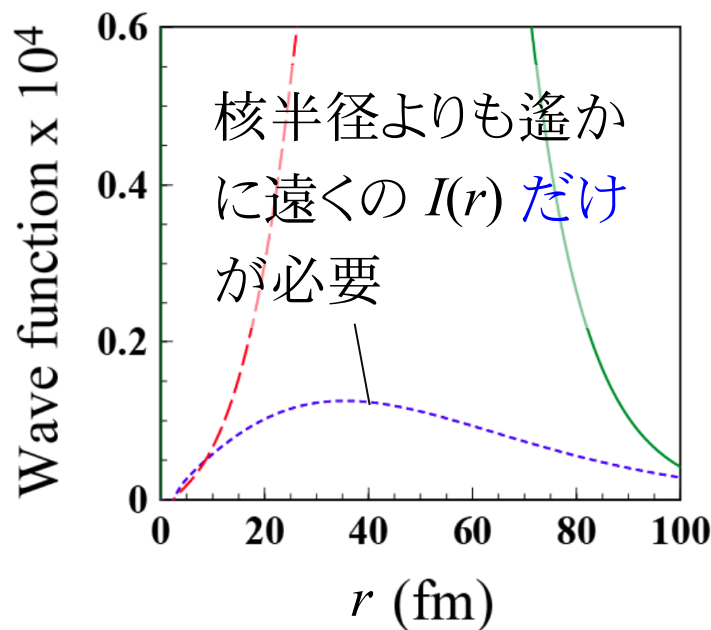
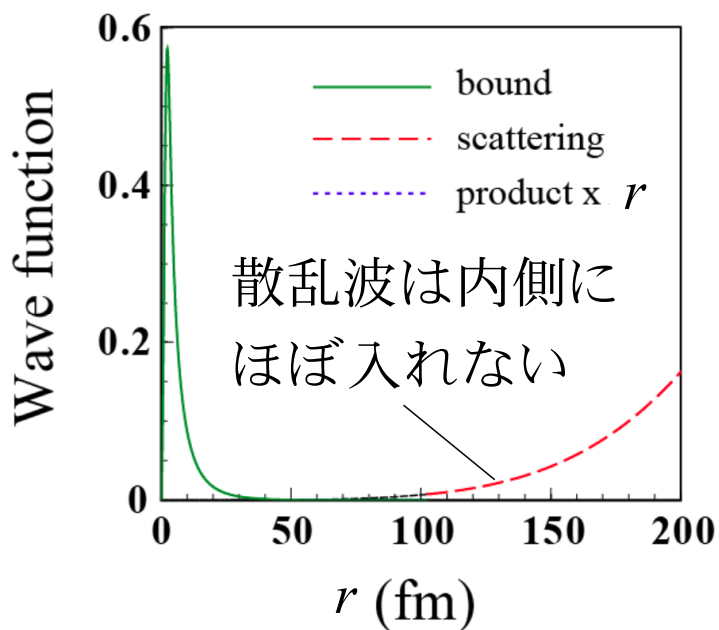
$$T_{p\gamma} = \langle \Phi_8(\xi_7, \mathbf{r}) | r Y_1(\hat{r}) | \Phi_7(\xi_7) \chi_{p7}(\mathbf{r}) \rangle$$

$$= \langle I(\mathbf{r}) | r Y_1(\hat{r}) | \chi_{p7}(\mathbf{r}) \rangle \quad p\text{-}{}^7\text{Be 散乱波}$$

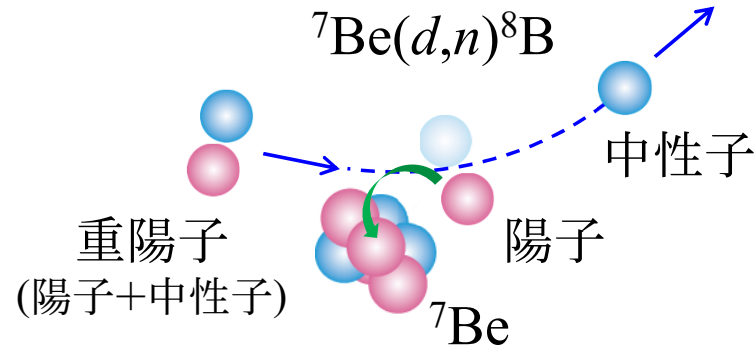
漸近規格化係数(ANC)

$$I(\mathbf{r}) \equiv \langle \Phi_8(\xi_7, \mathbf{r}) | \Phi_7(\xi_7) \rangle_{\xi_7} \quad p\text{-}{}^7\text{Be 束縛波動関数}$$

$$I(r) \rightarrow CW(r) \quad (r > r_{\text{nucl}}) \quad \text{Whittaker関数の係数のみ必要}$$



# (代替反応としての)陽子移行反応



※次のスライドに示す  
この反応の断面積  
は約80 mb (大きい)

$$T_{dn} = \langle \chi_n(\mathbf{R}_n) \Phi_8(\xi_7, \mathbf{r}) | V_{pn}(\mathbf{r}_{pn}) | \Phi_d(\mathbf{r}_{pn}) \Phi_7(\xi_7) \chi_{d7}(\mathbf{R}) \rangle$$

$$= \langle \chi_n(\mathbf{R}_n) I(\mathbf{r}) | V_{pn}(\mathbf{r}_{pn}) | \Phi_d(\mathbf{r}_{pn}) \chi_{d7}(\mathbf{R}) \rangle$$

ゼロレンジ近似

$$V_{pn}(\mathbf{r}_{pn}) \Phi_d(\mathbf{r}_{pn}) \approx D_0 \delta(\mathbf{r}_{pn})$$



$$T_{dn} \approx \int \chi_n^*(7\mathbf{r}/8) I^*(\mathbf{r}) \chi_{d7}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

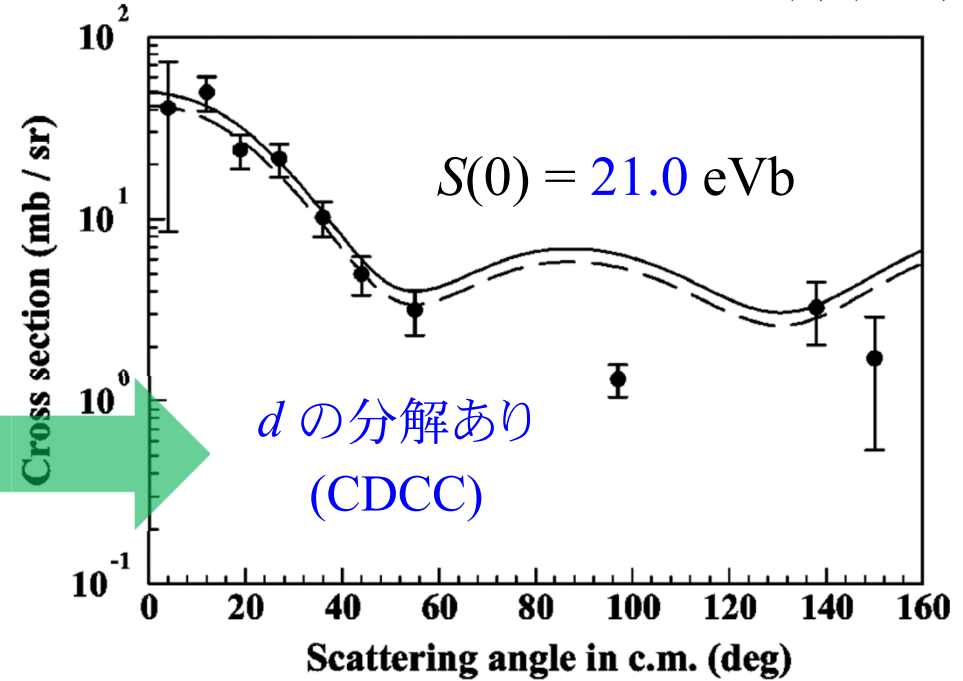
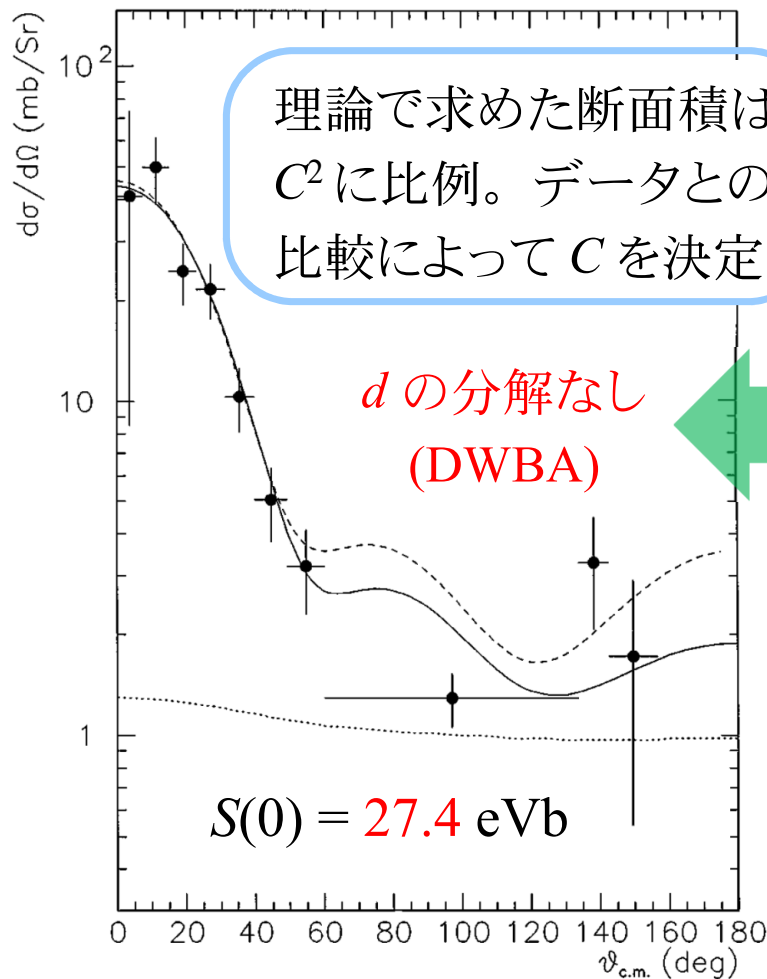
吸収効果のため内側で減衰  
 $r > r_{\text{nucl}}$  の  $I(r)$  だけが効く

(A2) 2つの反応は共通の  $I(r)$  を含み、かつそのtailだけが遷移に関与する。

# 反応理論によるデータの解読

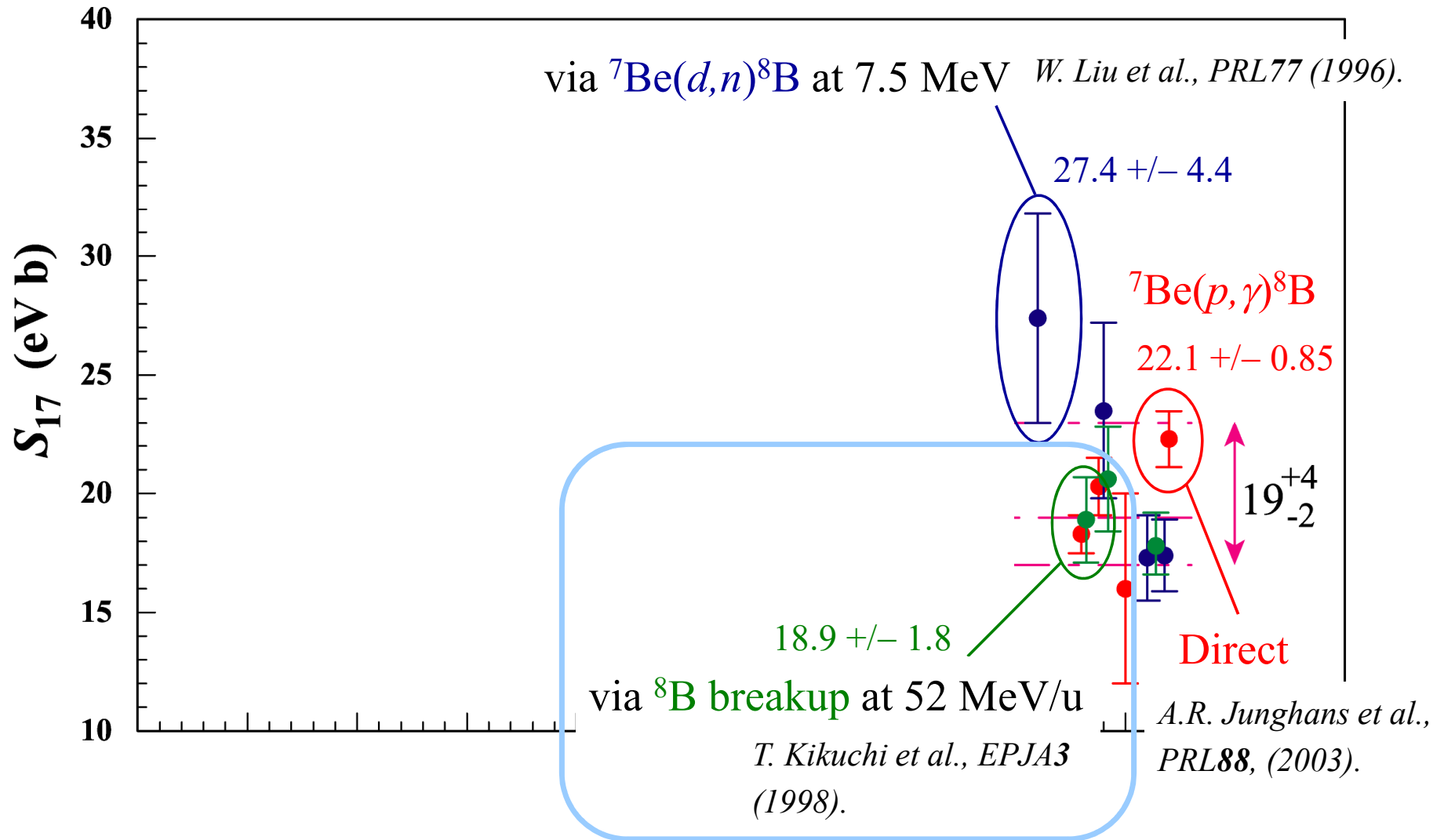
W. Liu et al., PRL77, 611 (1996).

KO, Yahiro, Iseri, Kamimura, PRC67, 011602(R) (2003).



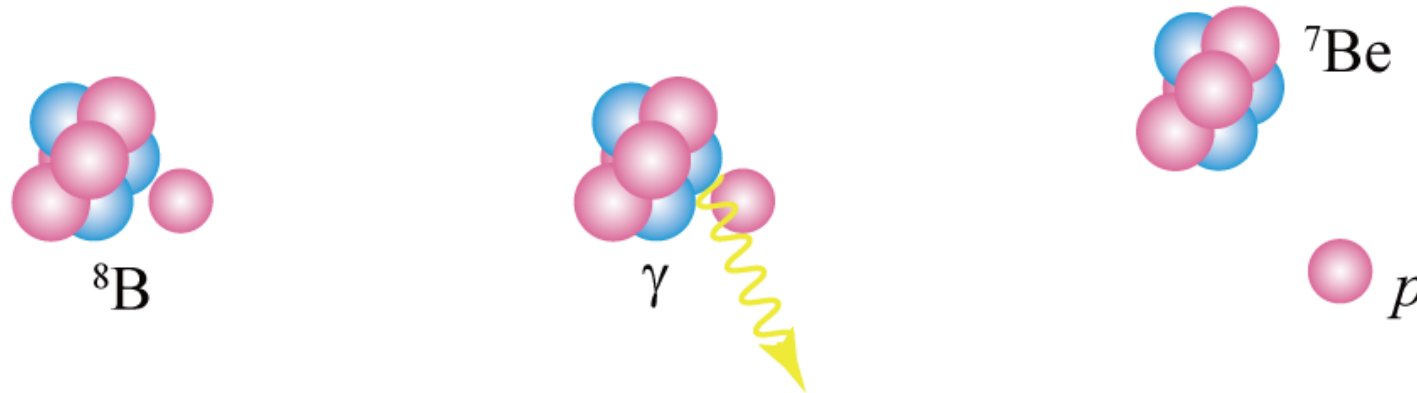
(A3)最終的に得られる恒星内反応の断面積は、代替反応の記述(解読)に用いる反応理論の精度に依存する。

# $S_{17}$ chronicle: ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$



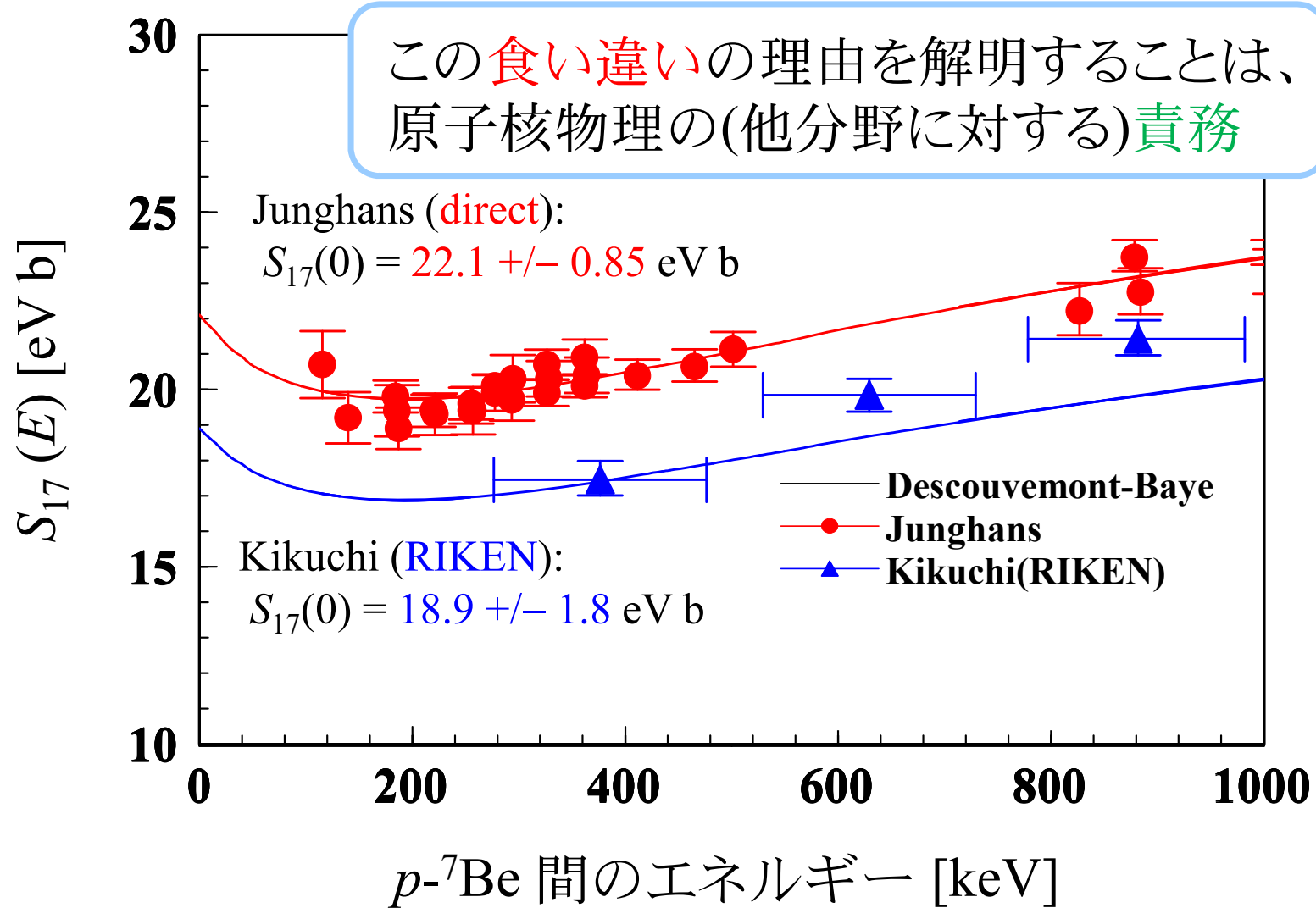


# ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ の間接測定

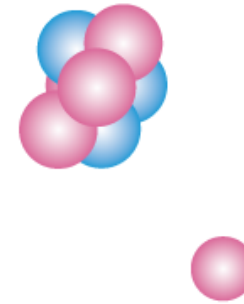
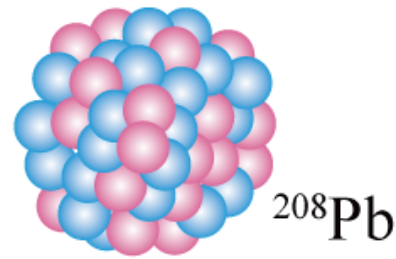


- 微細平衡の原理を利用すれば、 ${}^8\text{B}$ 分解反応を測定することで、逆反応である ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ の断面積を間接的に決定できる。
- この間接測定の結果は、**仮定した反応機構が正しいときに限り、**正確である。

# ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ 天体核物理因子 $S_{17}$ の“測定”結果



# 実際の分解反応のメカニズム



(この反応も)理論で求めた断面積は $C^2$ に比例。データとの比較によって $C$ を決定する。

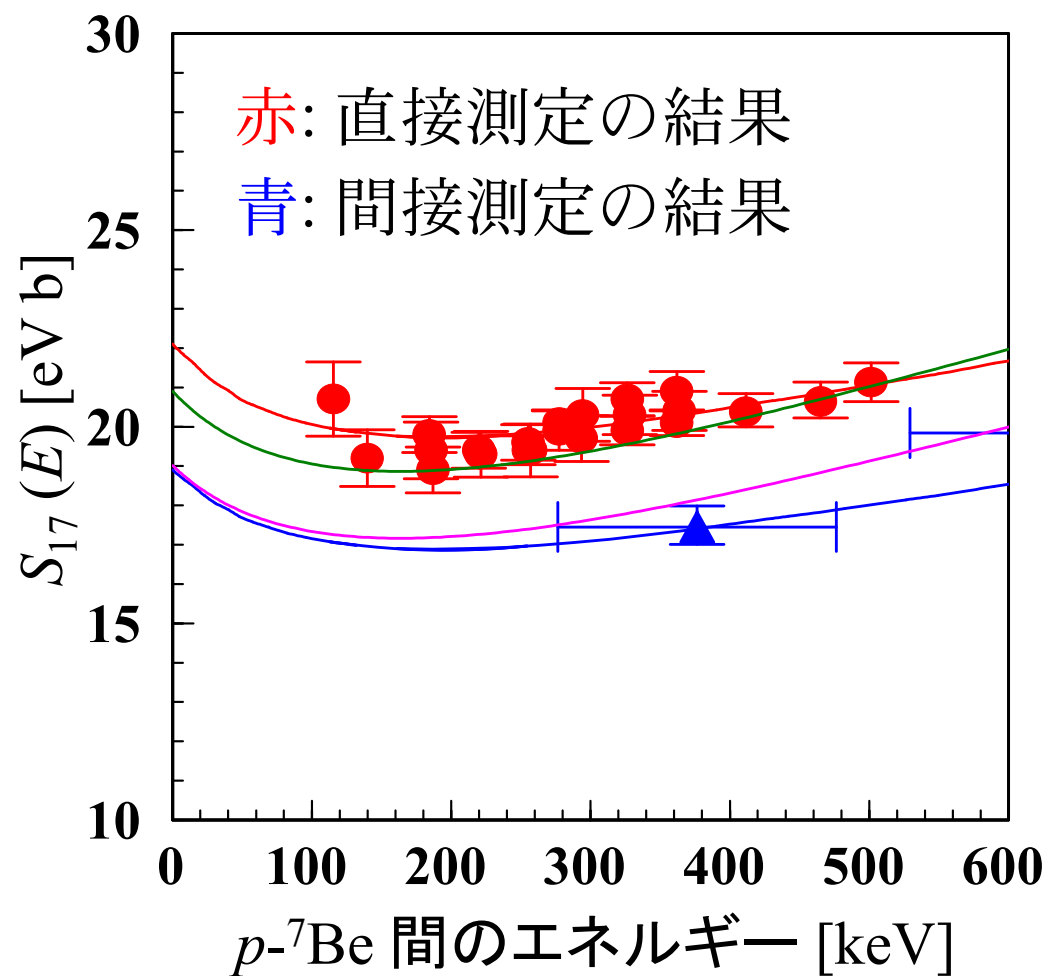
間接測定を**妨害**する要因

- 核力(強い相互作用)による分解
- 多段階の分解過程(チャネル結合効果)
- E1以外の多重極光子による分解

cf. 1000fm程度の空間(2000回振動)で120chの結合方程式を解く。  
角運動量は約15000まで。

正確な反応モデルによる分解反応の記述が不可欠!

# ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ 天体核物理因子 $S_{17}$



— 以前の結果 —

直接測定: updated

$$S_{17}(0) = 20.9 \pm 0.92 \text{ eV b}$$

間接測定:

$$S_{17}(0) = 18.9 \pm 1.8 \text{ eV b}$$

— 今回の解析結果 —

“完全”計算:

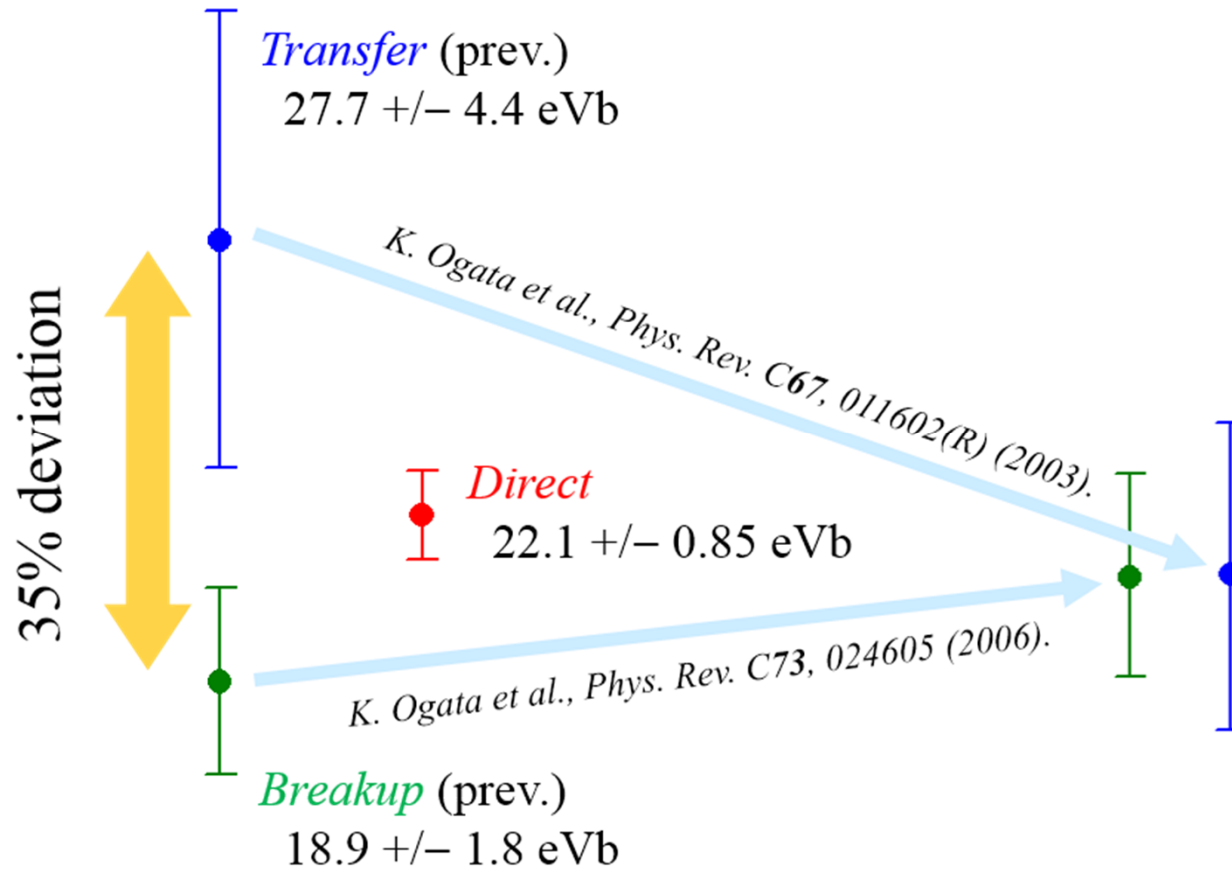
$$S_{17}(0) = 20.9^{+2.0}_{-1.9} \text{ eV b}$$

間接測定(簡易計算):

$$S_{17}(0) = 19.0^{+1.9}_{-1.7} \text{ eV b}$$

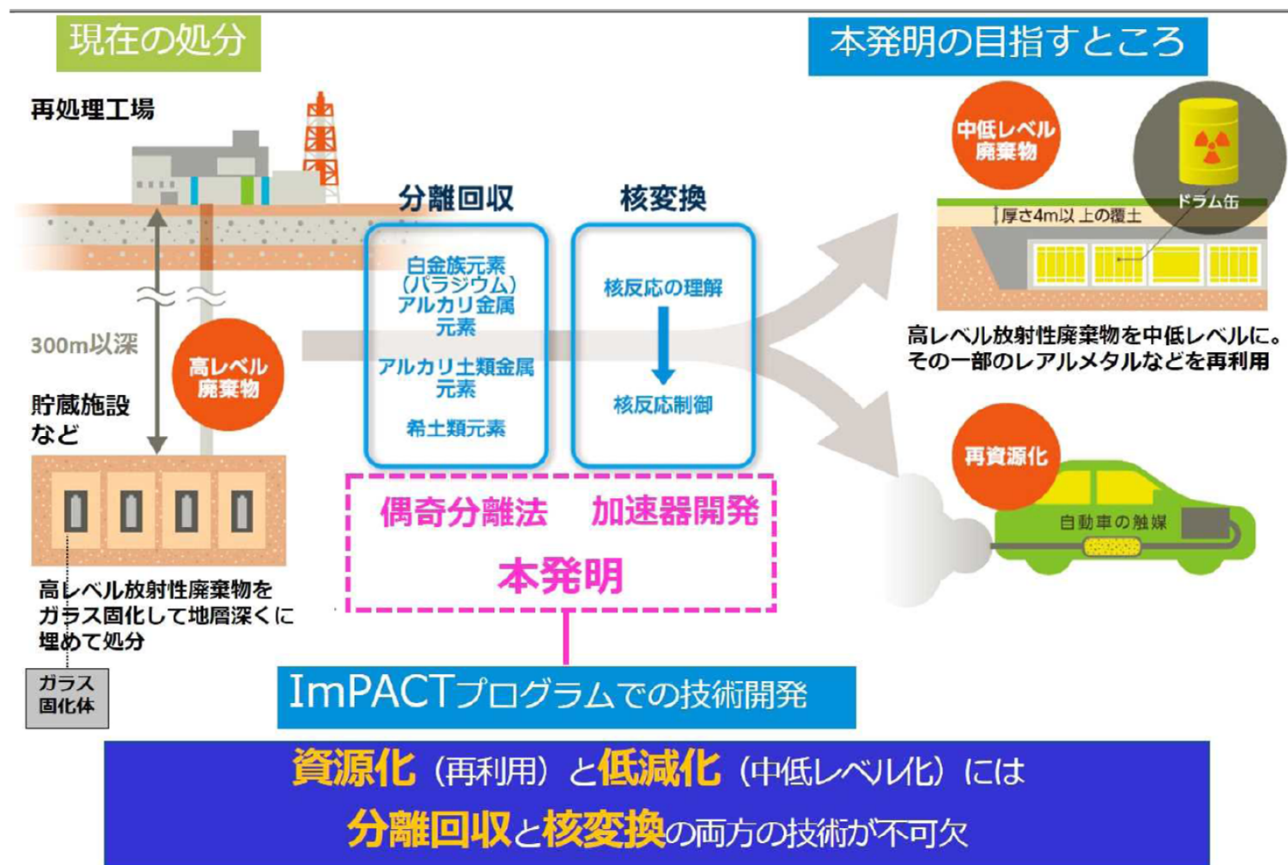
反応解析の結果は、解析の精度に依存する。

# Summary of our ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ studies



*The indirect measurement method does work, if a proper and accurate reaction model is adopted.*

# 核変換への挑戦(の一断面)



「ImPACT藤田プログラム 21世紀発明賞の受賞について」より

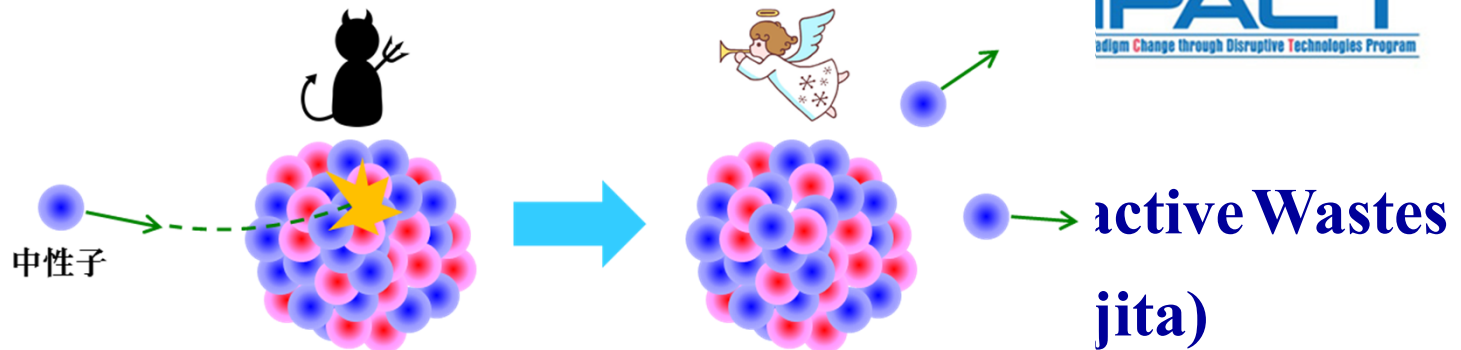
# Nuclear Transmutation studies

*Impulsing Paradigm Change through Disruptive Technologies Program*

- Launched FY2014 and 12 programs approved.
- will end
- Keyword

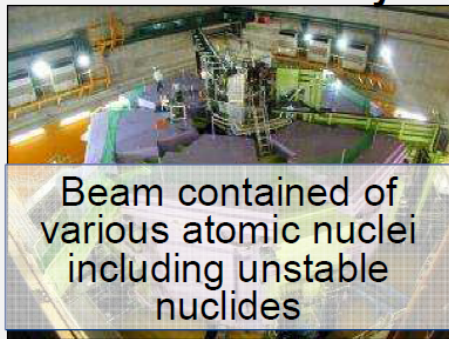


Reduction of active wastes with (jita)



## Key Point

### RI Beam Factory



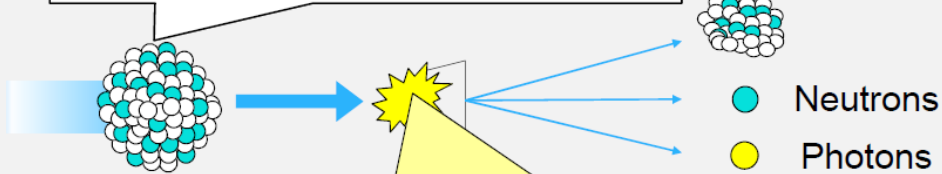
Beam contained of various atomic nuclei including unstable nuclides

パラジウム107  
(半減期650万年)

パラジウム106  
(貴金属)

Cesium 135 (half-life: 2.3 million years)

nuclides



Reverse reaction with neutrons, protons and photons

Bulk simulation of nuclear reactions



Focus on reasonable nuclear transmutation methods and elemental technologies

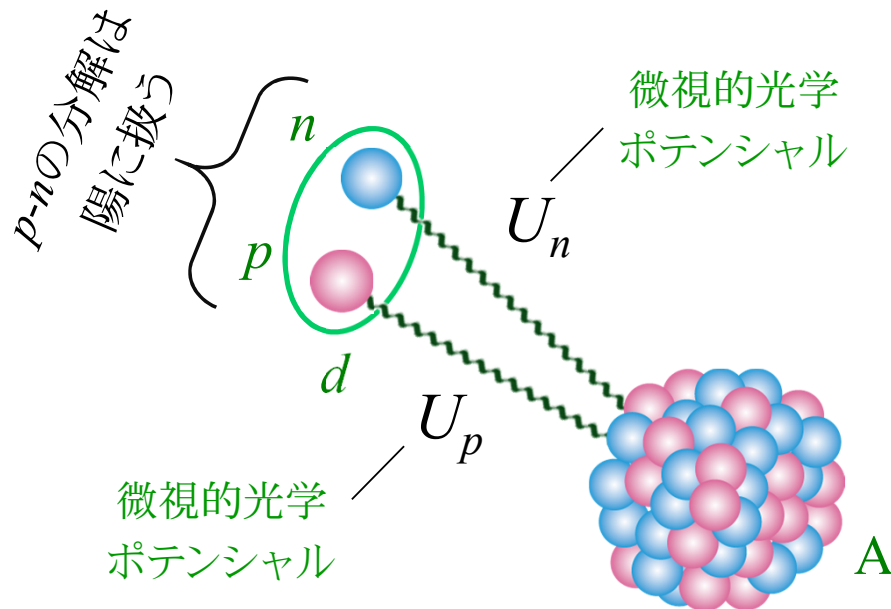
nuclides lived



# 重陽子の全反応断面積の微視的計算

## 微視的有効反応理論(微視的CDCC)

1. 各種反応の本質的な自由度を選び出す(模型空間の設定)。
2. 反応系のポテンシャルを有効核力から微視的に作る。
3. 反応を 1. と 2. に基づいて記述する。



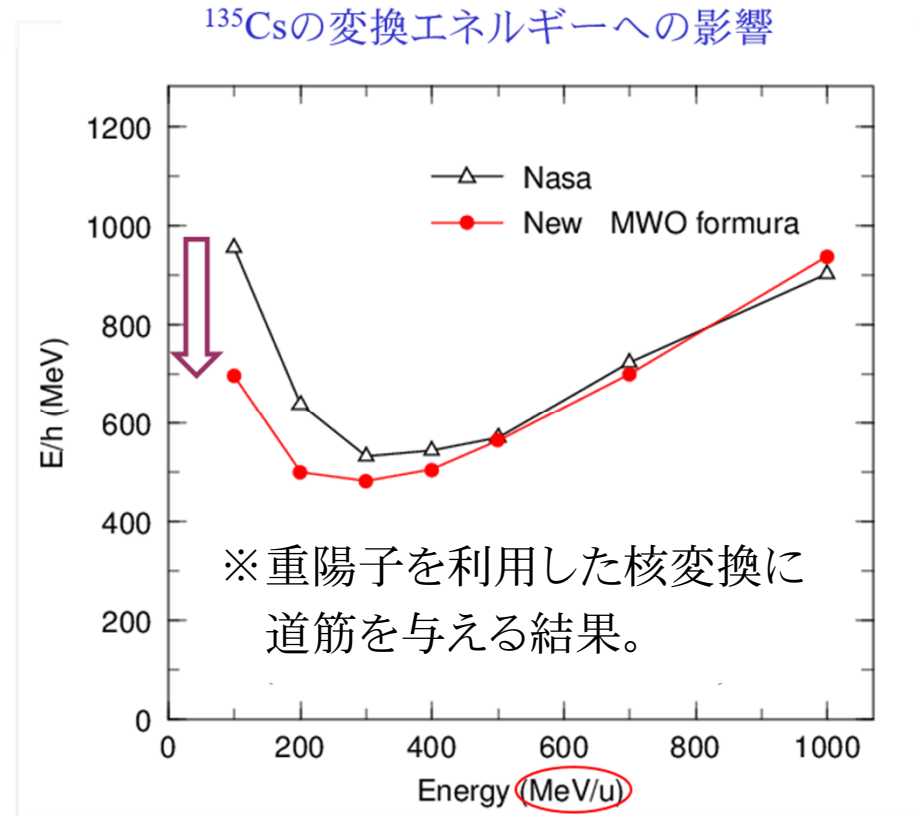
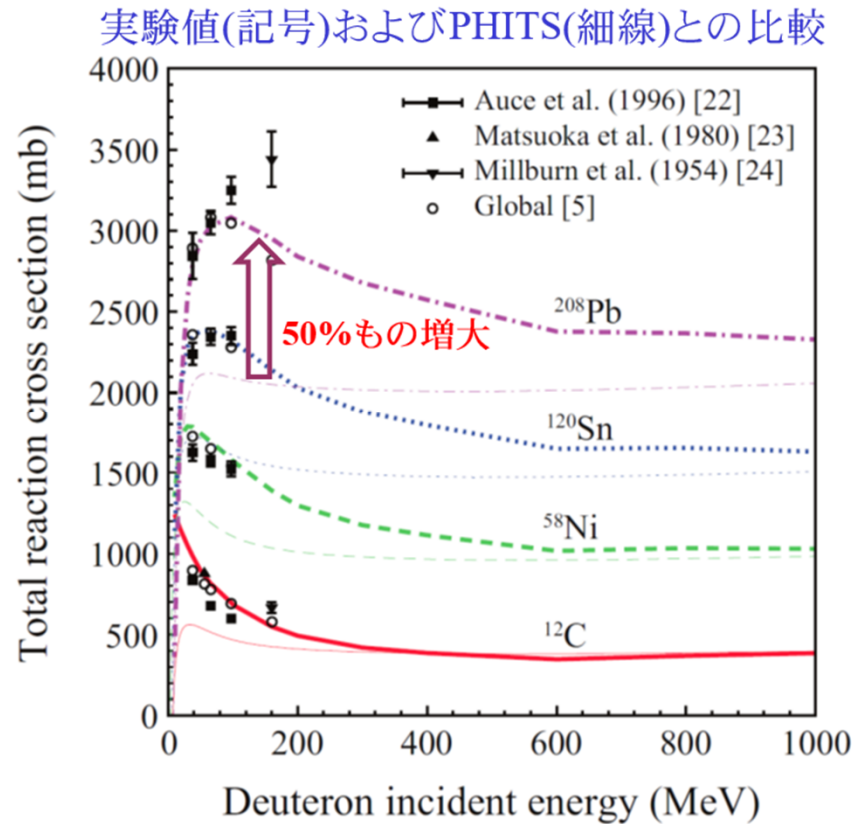
※重陽子と原子核の反応を記述する際には、壊れやすい重陽子を陽子と中性子の複合系とした3体反応モデルを採用する。



# 重陽子の全反応断面積の刷新

微視的CDCCを用いてPHITSに入っている重陽子-原子核の全反応断面積(LLFP含む)を刷新し、その結果を関数化してPHITSに提供(MWOの公式)。

K. Minomo, K. Washiyama, and K. Ogata, Journal of Nuclear Science and Technology, **54**, 127 (2017).



# CDCCを用いた反応研究の紹介のまとめ

- **直接測れない**(測るのが困難な)断面積を、**代替反応**を用いて“測定”する方法(間接測定法)を紹介した。
- この方法は非常に強力であるが、真の答えを得るには、**精度や信頼性の高い反応理論(模型)**が必要である。CDCCはこの要求に応える模型のひとつとして活躍している。
- 核変換研究の鍵を握る**重陽子の全反応断面積**を微視的CDCCによって評価し、粒子輸送コードシステムに組み込まれているデータを**刷新**した。
- **模型空間の中で正確かつ実効的に反応計算を行う**というCDCCの思想は、周辺領域の研究開拓に適している(**柔軟性**)。

# この講義で伝えたかったこと

- 研究目的に見合った**模型空間**を設定することの意味と価値。
- 波束の理論を用いた**定常散乱波の正当性**の証明。その帰結としての、散乱の形式論に登場する  $+i\eta$  の**物理的な意味**。
- **多重散乱理論**に基づく微視的反応理論とその活躍。
- 3体の散乱問題は、**解を正しく与える方程式を見出すこと自体が困難**であること。これに対する解答としての **Faddeev 理論**。
- **模型空間の中での厳密3体反応理論**という考え方。 **$l$ -truncationの有効性**こそが**CDCCの理論的基盤**(連続状態の離散化はまた**別の話**)。
- **天体核物理学**および**原子力分野**でのCDCCの活躍。
- 研究対象の**拡大**と物理の**理解**をもたらす**近似(模型)**は偉大。  
(ただし近似の**基盤**と**適用限界**は把握しておく必要あり。)