# 台形公式を用いた数値積分法

2017/5/14 K. Ogata

　積分値を数値的に求める方法については、これまで非常に多くのものが提案され、研究がなされているが、その中で最も単純でかつ安定性が高いのが、台形公式 (trapezoidal rule) と呼ばれるものである[1]。いま、1 次元の関数 $f(x)$ の積分値

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

を求めたいとしよう。数値積分では、まず $x$ の区間 $[a, b]$ を、$N$ 個に分割する。分割の方法は任意であるが、ここでは簡単のため等間隔に分割するものとしよう。分割された 1 つの区間の幅を $h$ とすると、

$$h = \frac{b-a}{N} \tag{2}$$

であり、$x$ の分点 $x_i$ を

$$x_i = a + (i-1)\,h \quad (i = 1, 2, ..., N+1) \tag{3}$$

によって定義すると、$I$ は

$$I = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \tag{4}$$

と表される。ここまでは正確な式変形である。

　台形公式では、

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h \tag{5}$$

と近似する。すなわち、区間 $[x_i, x_{i+1}]$ における $f(x)$ の変化を、$x$ の 1 次で表現する。式 (5) の右辺が、台形の面積を求める公式になっていることがただちに見てとれるであろう。このようにして計算された積分値を $\bar{I}$ と表せば、

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h \tag{6}$$

となる。これが、台形公式を用いて積分を数値的に求める式である。ただしこの式をそのままプログラミングすると、端の分点 ($x_1$ と $x_{N+1}$) を除き、同じ $f(x_i)$ が 2 度ずつ呼び出されることになるので、実際のプログラムでは、式 (6) を

$$\bar{I} = \frac{f(x_1)}{2} h + \sum_{n=2}^{N} f(x_i)\,h + \frac{f(x_{N+1})}{2} h \tag{7}$$

と書き直した式を用いること。

[1] 台形公式は、数学で初めて積分を学ぶ際の説明としてよく用いられる区分求積法 (quadrature rule) の改良版である。