

地球重力場における超冷中性子量子気体の熱力学的性質の研究

金子寛弥

大阪大学 核物理研究センター理論部

2012年9月28日

この発表は ``Thermodynamics of Quantum Ultra-cold Neutron Gas under Gravity of The Earth'' Hiromi Kaneko, Akihiro Tohsaki, Atsushi Hosaka (Prog. Theor. Phys. Vol.128 No.3 pp533-539, 2012; arXiv: 1205.0378) の論文に基づいています ¹⁾。

¹⁾Kaneko et al. (2012)

超冷中性子気体とは？

超冷中性子とは？

- 平均速度は $1 - 10$ m/s.
- 大きなドブロイ波長のため金属の壁によって反射される

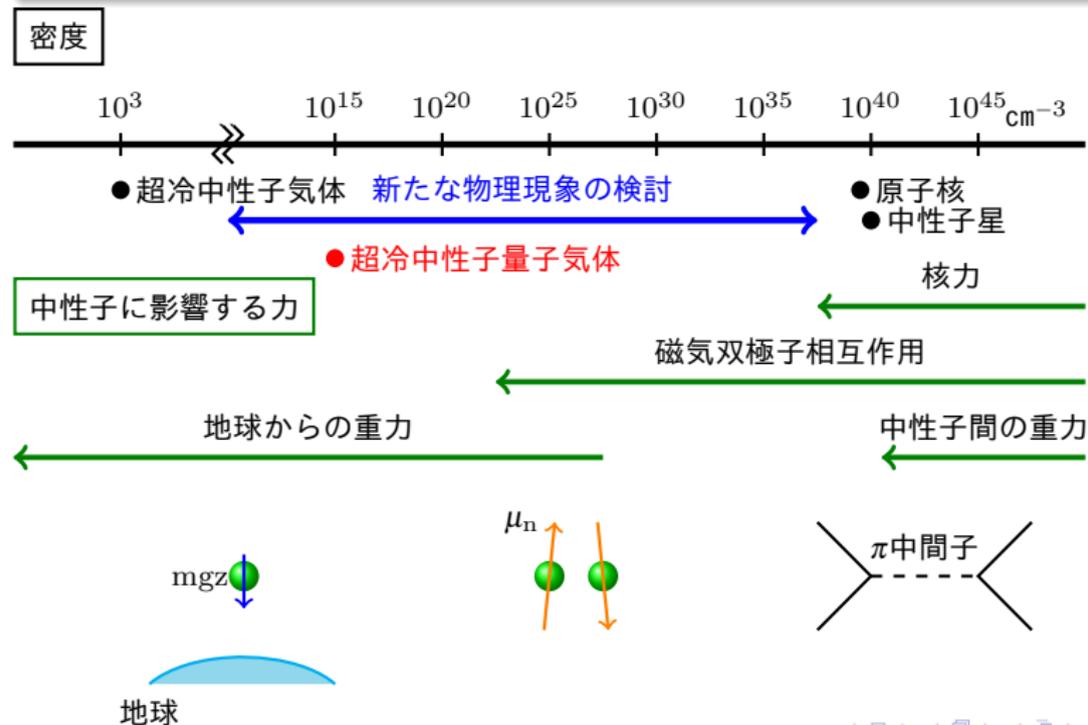
超冷中性子気体とは？²⁾

- 金属のボトル(または磁場)によって閉じ込められている。
- 温度は1 K以下、密度は 10^2 cm⁻³程度
- 平均粒子間距離は $\bar{R} = (10^2)^{-1/3} \sim 2 \times 10^{-1}$ cm
- 熱的ドブロイ波長は $\bar{\lambda} = h/(3mk_B T)^{1/2} \sim 8 \times 10^{-6}$ cm (1 mK)
- 核破砕反応実験の発展によってさらに高密度になる可能性

²⁾ Golub and Pendlebury (1979); Masuda et al. (2002, 2012);
Saunders et al. (2004); Atchison et al. (2005)

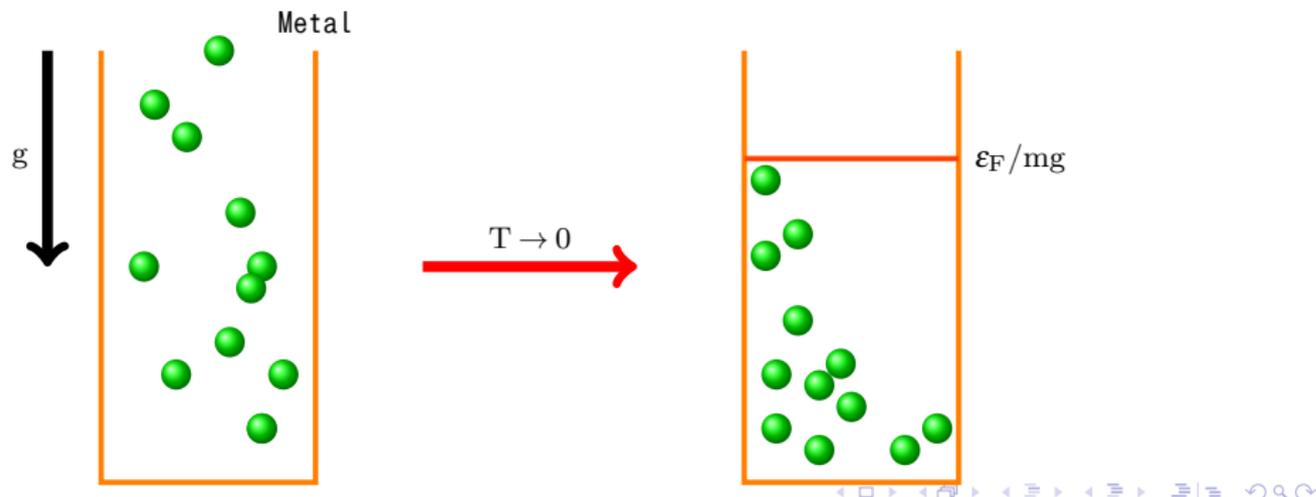
核物質と密度

低密度領域において安定な中性子物質は存在するのか？



地球重力場中の超冷中性子量子気体

温度が低くなるにつれて、中性子が地球の重力によって底に溜り密度が増加していく。また一方、そのような系では中性子が量子的な性質が顕著になり、古典気体から量子気体へと転移する。つまり、中性子がフェルミオンであるために統計的斥力が働くため、すべてが底に溜まっていくことはない。



地球重力場中における中性子の量子力学

地球重力場 mgz におけるシュレーディンガー方程式とその固有エネルギーは次のように得られる³⁾:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + mgz \psi(z) = E_z \psi(z), \quad (1)$$

$$E_{n_z} \approx \left(\frac{mg^2 \hbar^2}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{3\pi}{8} \right)^{2/3} (4n_z - 1)^{2/3}, \quad n_z = 1, 2, \dots$$

x, y 軸における金属の壁を考慮すると、全エネルギー固有値は次のように得られる:

$$E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2) + \left(\frac{mg^2 \hbar^2}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{3\pi}{8} \right)^{2/3} (4n_z - 1)^{2/3}. \quad (2)$$

³⁾ この一般解はAiry関数としてよく知られている Abramowitz and Stegun (1965); Vallée and Soares (2010)

地球重力場中における中性子量子気体の統計力学

この全エネルギー固有値を用いて、状態密度を円柱座標系で表現すると

$$\rho(E_{n_r}, E_{n_z}) = \frac{15N}{8\varepsilon_F^{5/2}} \sqrt{E_{n_z}}, \quad (3)$$

である。その時の粒子数保存の条件は

$$N = \frac{15N}{8\varepsilon_F^{5/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sqrt{E_{n_z}}}{e^{\beta(E_{n_r} + E_{n_z} - \mu)}} dE_{n_r} dE_{n_z}, \quad (4)$$

となる。ここでフェルミエネルギーは次のように定義できる：

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{15\pi^2 m^2 g N}{\hbar^2 L^2} \right)^{2/5}. \quad (5)$$

地球重力場中における中性子量子気体の統計力学. 2

粒子数保存の条件の式に変数変換を行う ($\eta = \beta\mu$, $\zeta = \beta E_{n_z}$, $v = \beta E_{n_r}$). そうすると逆温度 $\beta = 1/k_B T$ は

$$\beta \varepsilon_F = \left(\frac{15}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta^{1/2}}{e^{\zeta+v-\eta} + 1} d\zeta dv \right)^{2/5} = \left(\frac{5}{2} \int_0^\infty \frac{\zeta^{3/2}}{e^{\zeta-\eta} + 1} d\zeta \right)^{2/5}, \quad (6)$$

となる。最後の式への変換は v について部分積分を行なっている。その結果、化学ポテンシャル μ は次の式で与えられる:

$$\frac{\mu}{\varepsilon_F} = \eta \left(\frac{5}{2} \int_0^\infty \frac{\zeta^{3/2}}{e^{\zeta-\eta} + 1} d\zeta \right)^{-2/5}. \quad (7)$$

地球重力場中における中性子量子気体の統計力学. 3

その低温展開は次のように解析的に求めることができる⁴⁾:

$$\frac{\mu}{\epsilon_F} = 1 - \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \quad (8)$$

同様に、内部エネルギーは次のように与えることができる:

$$\frac{U}{N\epsilon_F} = \frac{15}{4} (\epsilon_F \beta)^{-7/2} \left(\frac{2}{5} \int_0^\infty \frac{\zeta^{5/2}}{e^{\zeta-\eta} + 1} d\zeta + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\zeta^{1/2} v}{e^{\zeta+v-\eta} + 1} d\zeta dv \right). \quad (9)$$

⁴⁾ このフェルミ・ディラック積分の低温・高温展開の解析は Smith and Rohatgi (1993); T. M. Garoni and Glasser (2001) に与えられている

数値計算結果

化学ポテンシャルと内部エネルギーの温度依存性を数値計算によって求めた。

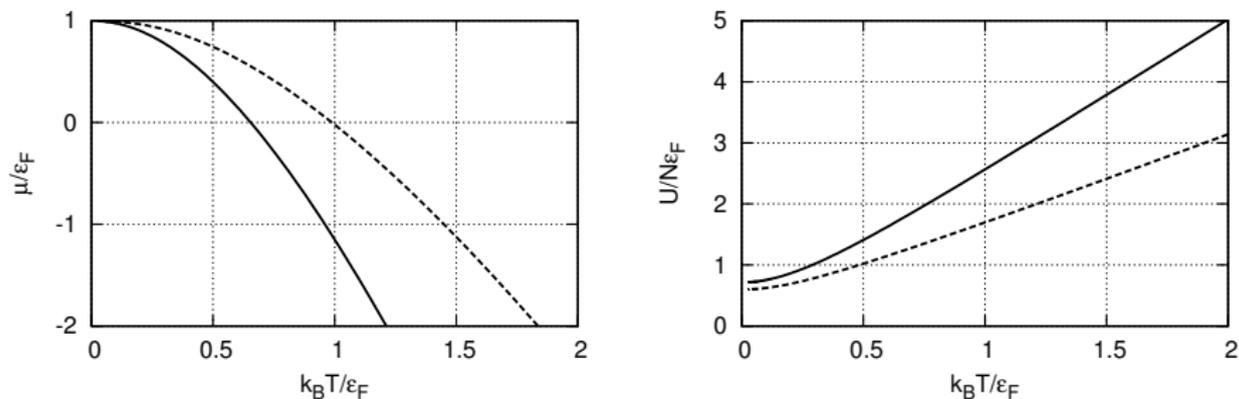


Figure: 化学ポテンシャル(左図)と内部エネルギー(右図)の温度依存性:地球重力場中のフェルミ気体(実線)と自由フェルミ気体(鎖線)

量子中性子気体の密度分布

問題点: 熱力学的特性と中性子気体の測定

中性子量子気体の比熱を測定するために、その気体の温度や圧力などの外部パラメータを変化させなければならない。しかしながら、中性子は β 崩壊に対して不安定である。そのような不安定で希薄な気体に対して、十分に時間をかけて定常状態を得る実験をすることは難しいことが予想される。

解決方法: 密度分布と温度の関係

非一様な密度分布を持つであろう中性子気体の密度分布を測定することは可能である。よって密度分布と温度の関係を中性子量子気体に対して明らかにする。

量子中性子気体の密度分布. 2

再び、粒子数保存の条件に戻り、それを次のように半古典的に書き換える⁵⁾:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x d^3p \frac{1}{e^{(\vec{p}^2/2m+mgz-\mu)/k_B T} + 1} = \\
 &= \int_0^\infty \frac{\rho(E_{n_r}, E_{n_z})}{e^{\beta(E_{n_r}+E_{n_z}-\mu)} + 1} dE_{n_r} dE_{n_z}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

一粒子密度は次のように定義する:

$$n(T, z) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{(\vec{p}^2/2m+mgz-\mu)/k_B T} + 1}. \tag{11}$$

⁵⁾例としてGiorgini et al. (2008)が挙げられる

量子中性子気体の密度分布. 3

低温極限 $T = 0$ での密度は

$$n(0, z) = \begin{cases} \frac{(2m(\epsilon_F - mgz))^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3}, & \text{for } \epsilon_F > mgz, \\ 0, & \text{for } \epsilon_F < mgz. \end{cases} \quad (12)$$

また変数変換($\chi = \beta p^2/2m$)を行うと,

$$\frac{n(T, 0)}{n(0, 0)} = \frac{3}{2} (\epsilon_F \beta)^{-3/2} \int_0^\infty \frac{\chi^{1/2}}{e^{\chi - \eta} + 1} d\chi, \quad (13)$$

ここで $z, T = 0$ での密度で規格化している。この低温展開は次のように解析的に求めることができる:

$$\frac{n(T, 0)}{n(0, 0)} = 1 - \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \quad (14)$$

6)

6) Smith and Rohatgi (1993); T. M. Garoni and Glasser (2001),

数値計算結果. 2

密度の温度・高さ依存性についての数値計算を行った。

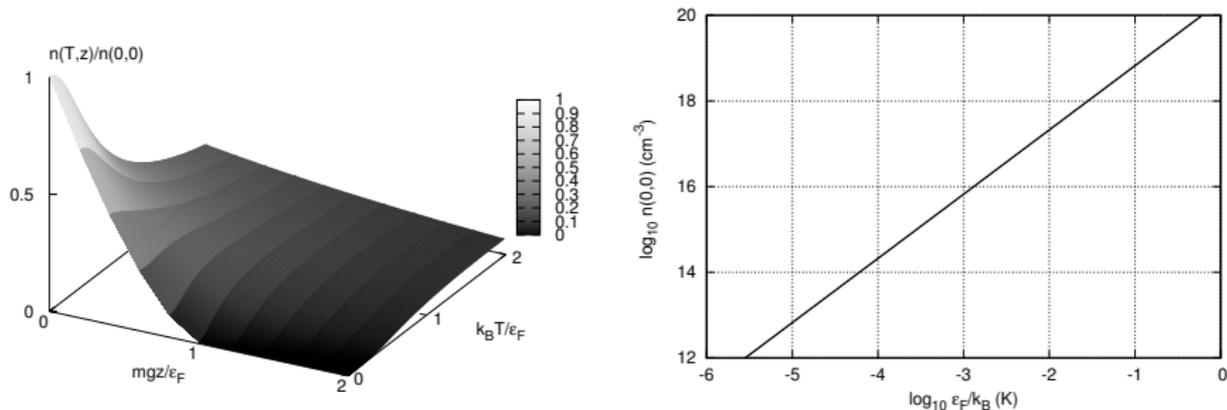


Figure: 中性子量子気体の密度分布の温度依存性(左図、原点の密度で規格化). 底の密度とフェルミエネルギーの関係(右図)

地球重力下における中性子量子気体

- 地球重力下における中性子量子気体の熱力学的特性を解析かつ数値的に求めた。
- 低温度領域における化学ポテンシャルや内部エネルギーの温度依存性が自由気体に比べて大きい。 → 化学ポテンシャルは6倍大きく、比熱が大きくなるため急激に温度が下がる。
- フェルミエネルギーが1 mKとすれば、底の密度が 10^{16} cm^{-3} のとなり中性子量子気体の最大の高さは80 cm程度なる非一様な密度分布を持つ。

参考文献

- Hiromi Kaneko, Akihiro Tohsaki, and Atsushi Hosaka. Thermodynamics of quantum ultra-cold neutron gas under gravity of the earth. *Progress of Theoretical Physics*, 128(3):533--539, 2012. doi: 10.1143/PTP.128.533. URL <http://ptp.ipap.jp/link?PTP/128/533/>.
- R. Golub and J.M. Pendlebury. REVIEW: Ultra-cold neutrons. *Rept. Prog. Phys.*, 42:439, 1979. doi: 10.1088/0034-4885/42/3/002.
- Y. Masuda, T. Kitagaki, K. Hatanaka, M. Higuchi, S. Ishimoto, Y. Kiyonagi, K. Morimoto, S. Muto, and M. Yoshimura. Spallation ultracold-neutron production in superfluid helium. *Phys. Rev. Lett.*, 89:284801, Dec 2002. doi: 10.1103/PhysRevLett.89.284801.
- Yasuhiro Masuda, Kichiji Hatanaka, Sun-Chan Jeong, Shinsuke Kawasaki, Ryohei Matsumiya, Kensaku Matsuta, Mototsugu Mihara, and Yutaka Watanabe. Spallation ultracold neutron source of superfluid helium below 1 k. *Phys. Rev. Lett.*, 108:134801, Mar 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.134801. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.134801>.
- A. Saunders, J.M. Anaya, T.J. Bowles, B.W. Filippone, P. Geltenbort, et al. Demonstration of a solid deuterium source of ultracold neutrons. *Phys. Lett.*, B593:55--60, 2004. doi: 10.1016/j.physletb.2004.04.048.
- F. Atchison, B. van den Brandt, T. Bryś, M. Daum, P. Fierlinger, et al. Production of ultracold neutrons from a cold neutron beam on a (2)H(2) target. *Phys. Rev.*, C71:054601, 2005. doi: 10.1103/PhysRevC.71.054601.
- M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 6 1965. URL <http://people.maths.ox.ac.uk/~macdonald/aands/index.html>.
- Olivier Vallée and Manuel Soares. *Airy Functions and Applications to Physics*. Imperial College Press, 8 2010.
- A. W. Smith and A. Rohatgi. Re-evaluation of the derivatives of the half order fermi integrals. *J. Appl. Phys.*, 73:7030, 1993.
- N. E. Frankel T. M. Garoni and M. L. Glasser. Complete asymptotic expansions of the fermi-dirac integrals $f_P(\eta) = 1/\gamma(P+1) \int_0^\infty [e^P/(1+e^{\eta x})] dx$. *J. Math. Phys.*, 42:1860, 2001.
- Stefano Giorgini, Lev P. Pitaevskii, and Sandro Stringari. Theory of ultracold atomic fermi gases. *Rev. Mod. Phys.*, 80:1215--1274, Oct 2008. doi: 10.1103/RevModPhys.80.1215.