RCNP 研究会「核子と中間子の多体問題の統一的描像に向けて」

2007 年 12 月 14 日 – 15 日

sd 殻原子核の束縛エネルギーにおける *monopole* および *quadrupole* 相互作用

梅谷 篤史（大阪電通大）

金子 剛樹（東工大）

武藤 一雄（東工大）

u-atusi@isc.osakac.ac.jp

イントロダクション

原子核は，構成する核子間の相互作用（核力）のみで束縛する多体系である。

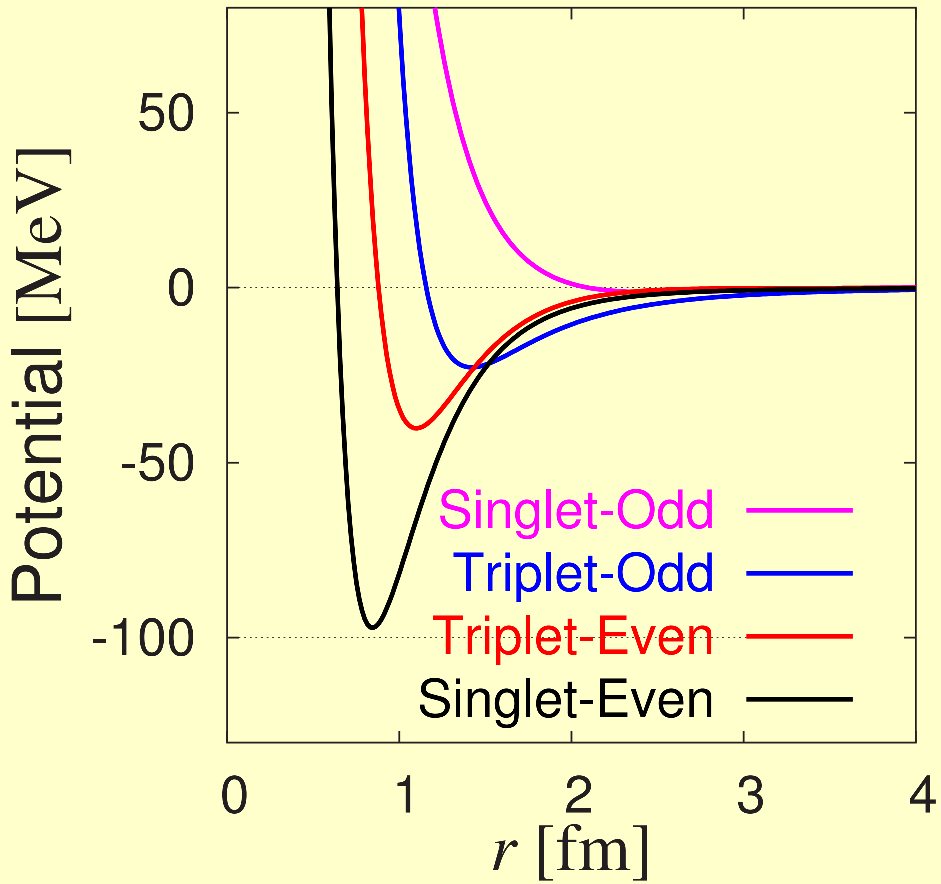
核力は，中心力，スピン・軌道力，テンソル力などからなり，さらにTriplet-Even, Singlet-Even などの2核子状態のチャネルごとに異なるポテンシャルをもつ。

原子核は，こうしたいくつものポテンシャルが複雑に絡み合って束縛している。

中心力

Reid soft-core potential

R.V. Reid, Ann. Phys. 50 (1968) 411



イントロダクション

殻模型ハミルトニアン

$$H = E^{\mathrm{core}} + \sum_{jm} \varepsilon_j^{\mathrm{core}} a_{jm}^\dagger a_{jm} + \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2' JM} \langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J \, [\boldsymbol{a}_{j_1}^\dagger \otimes \boldsymbol{a}_{j_2}^\dagger]_M^{(J)} \, [\boldsymbol{a}_{j_1'} \otimes \boldsymbol{a}_{j_2'}]_M^{(J)}$$

E^{core} : コアのエネルギー
$\varepsilon_j^{\mathrm{core}}$: コアからみた核子の1粒子エネルギー
$\langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J$: 2体相互作用の行列要素
$a_{jm}^\dagger, a_{jm}$: 1粒子の生成消滅演算子
（2体の行列要素側は正確な表現ではないが，わかりやすさを優先。）

コアのエネルギーは考えない。
$\varepsilon_j^{\mathrm{core}}$ と $\langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J$ のそれぞれの値が，エネルギー準位の実験データを再現するように決定されている。(Empirical interaction)
$\longrightarrow$ ポテンシャルの形や核子の波動関数の形はわからない（仮定されていない）。
$\longrightarrow$ 核力のどのような成分が束縛エネルギーに寄与しているかわからない。

イントロダクション

殻模型ハミルトニアン

$$H = E^{\mathrm{core}} + \sum_{jm} \varepsilon_j^{\mathrm{core}} a_{jm}^\dagger a_{jm} + \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2' JM} \langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J \, [\boldsymbol{a}_{j_1}^\dagger \otimes \boldsymbol{a}_{j_2}^\dagger]_M^{(J)} \, [\boldsymbol{a}_{j_1'} \otimes \boldsymbol{a}_{j_2'}]_M^{(J)}$$

Wildenthal USD B. H. Wildenthal, Prog. Part. Nucl. Phys. 11 (1984) 5 ($A = 18$)

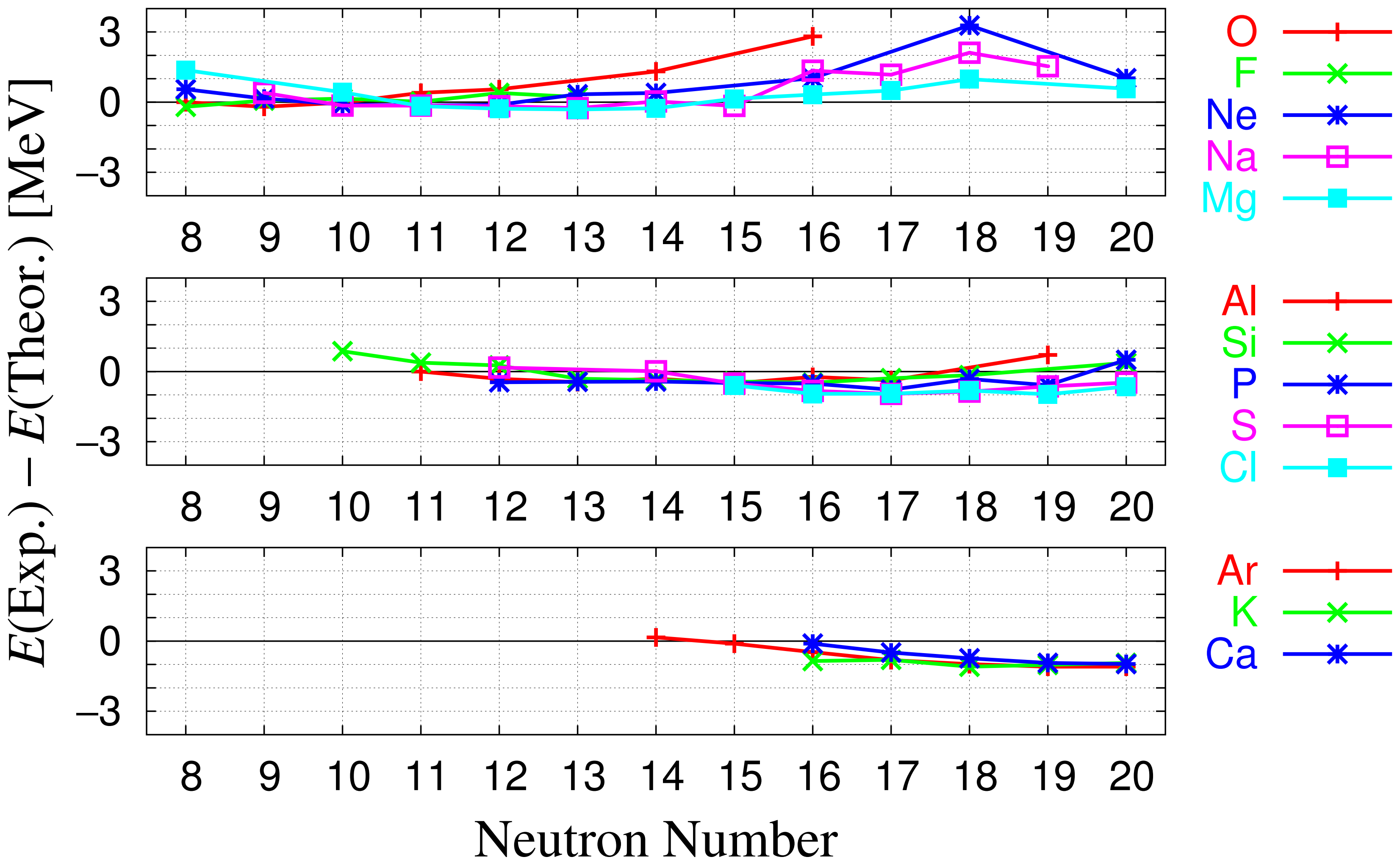
j_1	j_2	j_1'	j_2'	T	J	$\langle j_1 j_2 \| V \| j_1' j_2' \rangle_{TJ}$
$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	1	0	−2.8197
					2	−1.0020
					4	−0.1641
				0	1	−1.6321
					3	−1.5012
					5	−4.2256
$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	$s_{1/2}$	1	2	−0.8616
				0	3	−1.2420
$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	$d_{5/2}$	$d_{3/2}$	1	2	−0.2828
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

j_1	j_2	j_1'	j_2'	T	J	$\langle j_1 j_2 \| V \| j_1' j_2' \rangle_{TJ}$
$d_{5/2}$	$d_{3/2}$	$d_{5/2}$	$d_{3/2}$	1	1	1.0334
					2	−0.3248
					3	0.5894
					4	−1.4497
				0	1	−6.5058
					2	−3.8253
					3	−0.5377
					4	−4.5062
$d_{5/2}$	$d_{3/2}$	$s_{1/2}$	$s_{1/2}$	0	1	2.1042
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

イントロダクション

Wildenthal USD (Empirical Interaction) による束縛エネルギーと実験値との比較

B. H. Wildenthal, Prog. Part. Nucl. Phys. 11 (1984) 5



目的

Empirical interaction をいくつかの成分に分解し，どの成分が原子核の束縛エネルギーに寄与するかを調べる。

（Empirical interaction は 2 体行列要素として与えられているので，ポテンシャルの形や核子の波動関数の形はわからない（仮定されていない）。また核力のどのような成分が束縛エネルギーに寄与しているかわからない。）

模型空間 : sd 殻 （^{16}O を core とする）
原子核 : $8 \leq Z \leq 20$, $8 \leq N \leq 20$ の偶々核
相互作用 : Wildenthal USD
B. H. Wildenthal, Prog. Part. Nucl. Phys. 11 (1984) 5

- **陽子・陽子間，中性子・中性子間，陽子・中性子間に分解する。**
  $\longrightarrow$ 陽子・中性子間の相互作用の寄与が大きい。
- **Monopole と Higher multipoles に分解する。**
  $\longrightarrow$ Monopole の寄与が非常に大きい。 $\longrightarrow$ Monopole についてもう少し調べる。
  $\longrightarrow$ それ以外の寄与は最大で 30 MeV 程度。 $\longrightarrow$ 原子核の変形と Quadrupole の寄与。
- **Triplet-Even, Singlet-Even などのチャネルに分解する。**
  $\longrightarrow$ Triplet-Even の寄与が最も大きい。次いで Singlet-Even の寄与。

手法

(1) 模型空間を設定して basis state を用意する。

(2) ハミルトニアン行列を対角化してエネルギー固有値（束縛エネルギー）と波動関数（basis state への展開係数）を得る。

(3) 2 体相互作用を分解する。

(4) (2) で得られた波動関数を用いて，(3) で分解されたそれぞれの成分ごとに期待値を求める。

手法

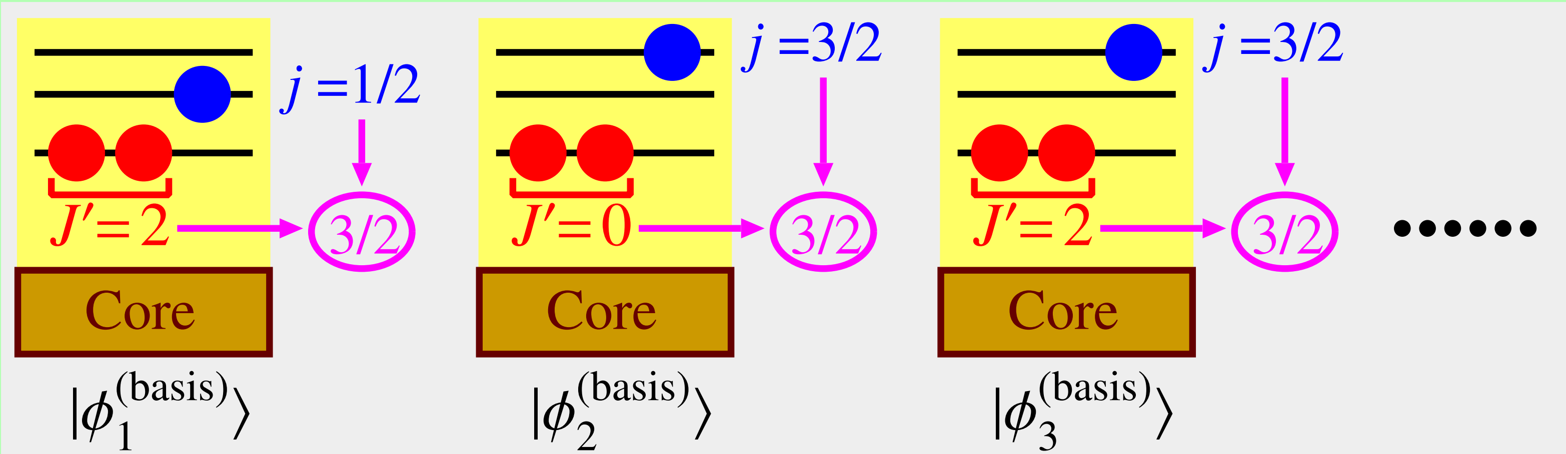
(1) 模型空間を設定して basis state を用意する。

ハミルトニアンの固有状態 $|\psi\rangle$ は basis state $|\phi_k^{(\mathrm{basis})}\rangle$ を用いて

$$|\psi\rangle = \sum_k C_k |\phi_k^{(\mathrm{basis})}\rangle$$

のように展開される。（C_k はこれから求める。）

Valence 3体系における $J = 3/2$ の basis state



(2) ハミルトニアン行列を対角化してエネルギー固有値（束縛エネルギー）と波動関数（basis state への展開係数）を得る。

手法

(1) 模型空間を設定して basis state を用意する。 $|\psi\rangle = \sum_k C_k |\phi_k^{(\mathrm{basis})}\rangle$

(2) ハミルトニアンの行列を対角化してエネルギー固有値（束縛エネルギー）と波動関数（basis state への展開係数）を得る。

シュレディンガー方程式 $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ **より**

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

ただし

$$H_{k\ell} = \langle \phi_k^{(\mathrm{basis})} | H | \phi_\ell^{(\mathrm{basis})} \rangle$$

$$H = \sum_{jm} \varepsilon_j^{\mathrm{core}} a_{jm}^\dagger a_{jm} + \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2' JM} \langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J \, [\boldsymbol{a}_{j_1}^\dagger \otimes \boldsymbol{a}_{j_2}^\dagger]_M^{(J)} \, [\boldsymbol{a}_{j_1'} \otimes \boldsymbol{a}_{j_2'}]_M^{(J)}$$

(3) 2体相互作用を分解する。

手法

(1) 模型空間を設定して basis state を用意する。 $|\psi\rangle = \sum_k C_k |\phi_k^{(\mathrm{basis})}\rangle$

(2) ハミルトニアンの行列を対角化してエネルギー固有値（束縛エネルギー）と波動関数（basis state への展開係数）を得る。

シュレディンガー方程式 $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ より

$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

ただし

$$H_{k\ell} = \sum_{jm} \varepsilon_j^{\mathrm{core}} \langle \phi_k^{(\mathrm{basis})} | a_{jm}^\dagger a_{jm} | \phi_\ell^{(\mathrm{basis})} \rangle + \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2' JM} \langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J \langle \phi_k^{(\mathrm{basis})} | [\boldsymbol{a}_{j_1}^\dagger \otimes \boldsymbol{a}_{j_2}^\dagger]_M^{(J)} [\boldsymbol{a}_{j_1'} \otimes \boldsymbol{a}_{j_2'}]_M^{(J)} | \phi_\ell^{(\mathrm{basis})} \rangle$$

(3) 2体相互作用を分解する。

手法

(1) 模型空間を設定して basis state を用意する。$|\psi\rangle = \sum_k C_k |\phi_k^{(\mathrm{basis})}\rangle$

(2) ハミルトニアンの行列を対角化してエネルギー固有値（束縛エネルギー）と波動関数（basis state への展開係数）を得る。E, C_k

(3) 2体相互作用を分解する。

分解方法は次で述べる。2体行列要素ひとつひとつについて，各種成分に分解できる。V を $V = V_a + V_b + V_c + \cdots$ のように分解するときは

$$\langle j_1 j_2|V|j_1' j_2'\rangle_{J=1} = \langle j_1 j_2|V_a|j_1' j_2'\rangle_{J=1} + \langle j_1 j_2|V_b|j_1' j_2'\rangle_{J=1} + \langle j_1 j_2|V_c|j_1' j_2'\rangle_{J=1} + \cdots$$
$$\langle j_1 j_2|V|j_1' j_2'\rangle_{J=2} = \langle j_1 j_2|V_a|j_1' j_2'\rangle_{J=2} + \langle j_1 j_2|V_b|j_1' j_2'\rangle_{J=2} + \langle j_1 j_2|V_c|j_1' j_2'\rangle_{J=2} + \cdots$$
$$\langle j_1 j_2|V|j_1' j_2'\rangle_{J=3} = \langle j_1 j_2|V_a|j_1' j_2'\rangle_{J=3} + \langle j_1 j_2|V_b|j_1' j_2'\rangle_{J=3} + \langle j_1 j_2|V_c|j_1' j_2'\rangle_{J=3} + \cdots$$
$$\vdots$$

(4) (2) で得られた波動関数を用いて，(3) で分解されたそれぞれの成分ごとに期待値を求める。

手法

(1) 模型空間を設定して basis state を用意する。 $|\psi\rangle = \sum_k C_k |\phi_k^{(\mathrm{basis})}\rangle$

(2) ハミルトニアンの行列を対角化してエネルギー固有値（束縛エネルギー）と波動関数（basis state への展開係数）を得る。E, C_k

(3) 2体相互作用を分解する。$V = V_a + V_b + V_c + \cdots$

$$\langle j_1 j_2 | V | j'_1 j'_2 \rangle_J = \boxed{\langle j_1 j_2 | V_a | j'_1 j'_2 \rangle_J} + \langle j_1 j_2 | V_b | j'_1 j'_2 \rangle_J + \langle j_1 j_2 | V_c | j'_1 j'_2 \rangle_J + \cdots$$

(4) (2) で得られた波動関数を用いて，(3) で分解されたそれぞれの成分ごとに期待値を求める。

$$\begin{aligned} E_a &= \langle \psi | V_a | \psi \rangle \\ &= \sum_{k\ell} C_k^* C_\ell \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2 JM} \langle j_1 j_2 | V_a | j'_1 j'_2 \rangle_J \langle \phi_k^{(\mathrm{basis})} | [\boldsymbol{a}_{j_1}^\dagger \otimes \boldsymbol{a}_{j_2}^\dagger]_M^{(J)} [\boldsymbol{a}_{j'_1} \otimes \boldsymbol{a}_{j'_2}]_M^{(J)} | \phi_\ell^{(\mathrm{basis})} \rangle \end{aligned}$$

ここで

$$E = E^{(\mathrm{s.p.e.})} + E_a + E_b + E_c + \cdots$$

2体行列要素の分解

(1) 陽子・陽子間 V_{pp}，中性子・中性子間 V_{nn}，陽子・中性子間 V_{pn} にわける。

(2) 多重極展開する。 $\longrightarrow V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \cdots$ $\longrightarrow$ **8, 9 ページで説明。**

(3) スピン・テンソル分解。

- **中心力（スピン部分 Rank 0）**
  Triplet-Even (TE), Singlet-Even (SE),
  Triplet-Odd (TO), Singlet-Odd (SO)
- **スピン軌道力（スピン部分 Rank 1）**
  Even ($T = 0$) (LSE), odd ($T = 1$) (LSO)
- **テンソル力（スピン部分 Rank 2）**
  Even ($T = 0$) (TNE), odd ($T = 1$) (TNO)

2 粒子状態のスピン $S = 0, 1$，アイソスピン $T = 0, 1$ の組み合わせで相対軌道角運動量の Even, Odd をわけられる。
中心力，スピン軌道力，テンソル力のスピン部分の Rank の違いに注目し，Racah 代数を用いることでわけられる。

2 体行列要素の分解

(1) 陽子・陽子間 V_{pp}，中性子・中性子間 V_{nn}，陽子・中性子間 V_{pn} にわける。

(2) 多重極展開する。$\longrightarrow V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \cdots$ $\longrightarrow$ **8, 9 ページで説明。**

(3) スピン・テンソル分解。

			Central	Spin-orbit	Tensor
T	S	L	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
0	0	**Odd**	**SO**	**–**	**–**
	1	**Even**	**TE**	**LSE**	**TNE**
1	0	**Even**	**SE**	**–**	**–**
	1	**Odd**	**TO**	**LSO**	**TNO**

多重極展開

2体の演算子（Rank 0）を2つの1体の演算子（Rank k）の内積で展開する。

$$V = \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2 JM} \langle j_1 j_2 | V | j'_1 j'_2 \rangle_J \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_1} \otimes \boldsymbol{a}^\dagger_{j_2}]^{(J)}_M \, [\boldsymbol{a}_{j'_1} \otimes \boldsymbol{a}_{j'_2}]^{(J)}_M$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2 kq} \boxed{f_k(j_1 j_2, j'_1 j'_2)} \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_1} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_1}]^{(k)}_q \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_2} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_2}]^{(k)}_{-q}$$

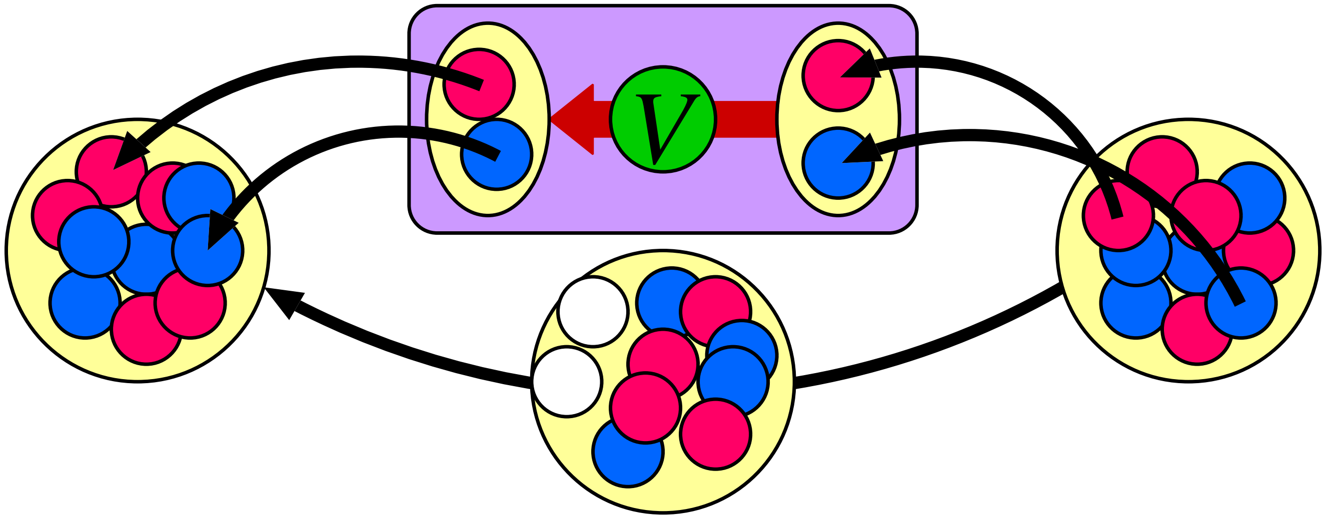
多重極展開

2 体の演算子（Rank 0）を2つの1体の演算子（Rank k）の内積で展開する。

$$V = \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2' JM} \langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J \, [a^\dagger_{j_1} \otimes a^\dagger_{j_2}]^{(J)}_M \, [a_{j_1'} \otimes a_{j_2'}]^{(J)}_M$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2' kq} \boxed{f_k(j_1 j_2, j_1' j_2')} \, [a^\dagger_{j_1} \otimes \tilde{a}_{j_1'}]^{(k)}_q \, [a^\dagger_{j_2} \otimes \tilde{a}_{j_2'}]^{(k)}_{-q}$$

$$\langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J \, [a^\dagger_{j_1} \otimes a^\dagger_{j_2}]^{(J)}_M \, [a_{j_1'} \otimes a_{j_2'}]^{(J)}_M$$



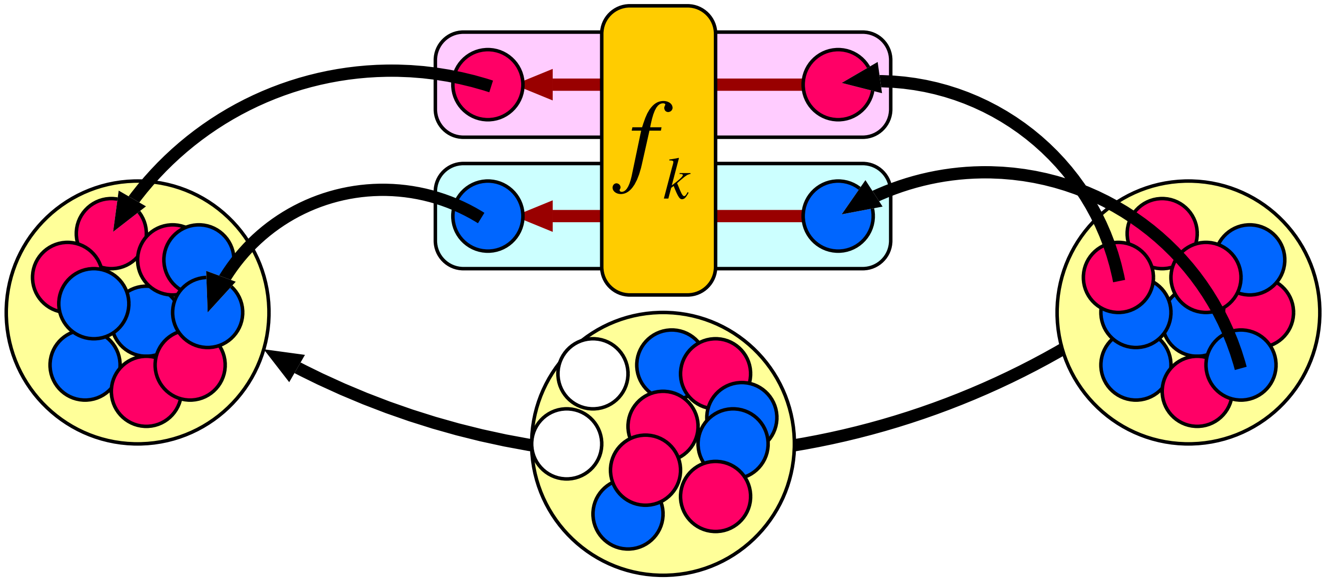
多重極展開

2体の演算子（Rank 0）を2つの1体の演算子（Rank k）の内積で展開する。

$$V = \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2 JM} \langle j_1 j_2 | V | j'_1 j'_2 \rangle_J \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_1} \otimes \boldsymbol{a}^\dagger_{j_2}]^{(J)}_M \, [\boldsymbol{a}_{j'_1} \otimes \boldsymbol{a}_{j'_2}]^{(J)}_M$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2 kq} f_k(j_1 j_2, j'_1 j'_2) \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_1} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_1}]^{(k)}_q \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_2} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_2}]^{(k)}_{-q}$$

$$f_k(j_1 j_2, j'_1 j'_2) \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_1} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_1}]^{(k)}_q \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_2} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_2}]^{(k)}_{-q}$$



多重極展開

$$V = \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2 JM} \langle j_1 j_2 | V | j'_1 j'_2 \rangle_J \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_1} \otimes \boldsymbol{a}^\dagger_{j_2}]^{(J)}_M \, [\boldsymbol{a}_{j'_1} \otimes \boldsymbol{a}_{j'_2}]^{(J)}_M$$

$$= \sum_{j_1 j_2 j'_1 j'_2 kq} \boxed{f_k(j_1 j_2, j'_1 j'_2)} \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_1} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_1}]^{(k)}_q \, [\boldsymbol{a}^\dagger_{j_2} \otimes \tilde{\boldsymbol{a}}_{j'_2}]^{(k)}_{-q}$$

---

(1) $k = 0$ **(Monopole) の部分だけ取り出す** $\longrightarrow V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \cdots$

- $j_1 = j'_1, \, j_2 = j'_2$ **以外は** 0 **である。（配位混合を引き起こさない。）**
- **核力の平均に相当。**

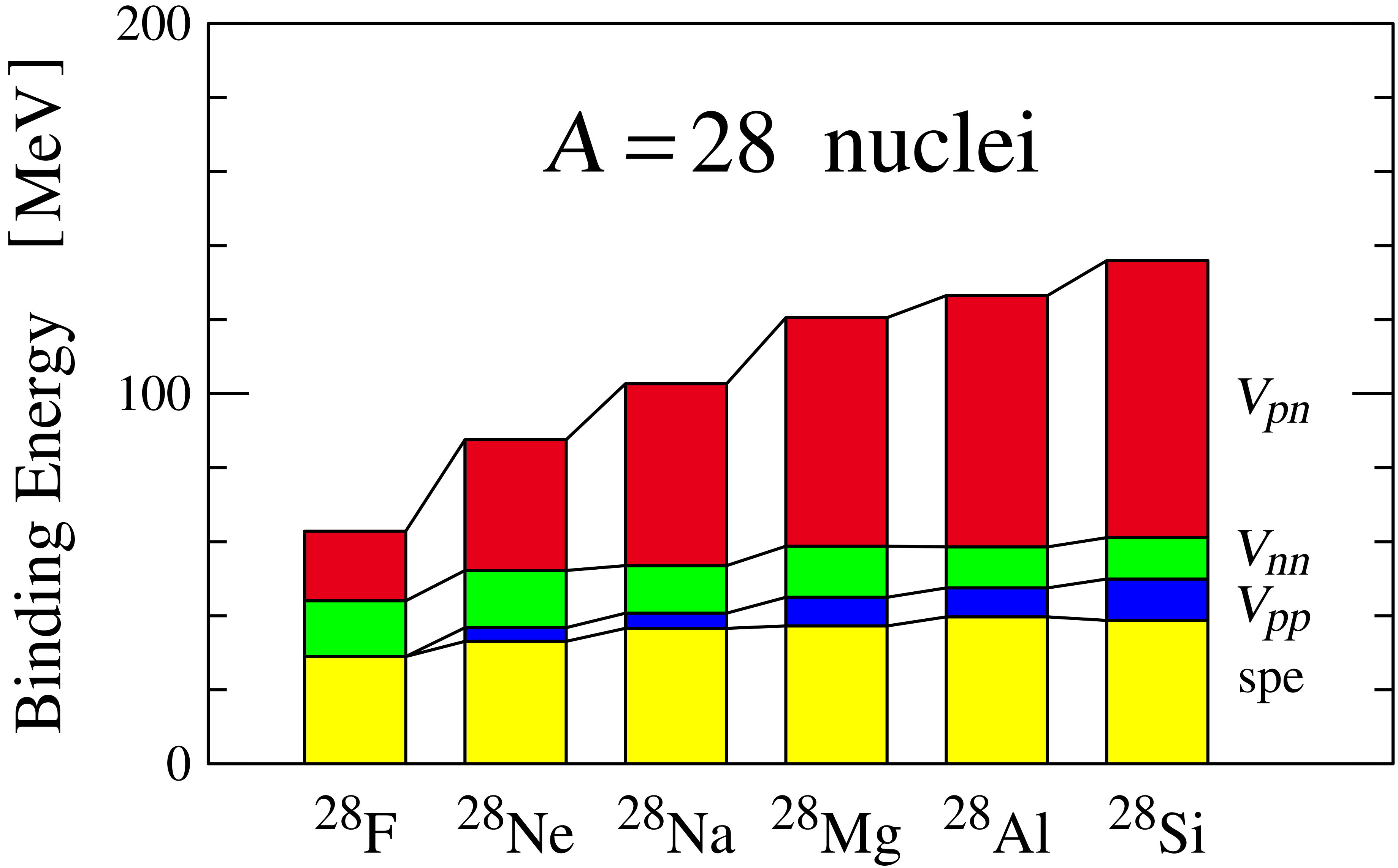
$$V^{(0)} = \sum_{j_1 j_2} \Delta\varepsilon_{j_1 j_2} N_{j_1} N_{j_2}$$

$$\Delta\varepsilon_{j_1 j_2} = \frac{\sum_J (2J+1) \langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_J}{\sum_J (2J+1)}, \qquad N_j = \sum_m a^\dagger_{jm} a_{jm}$$

(2) $k = 2$ **(Quadrupole) の部分だけ取り出す** $\longrightarrow V = V^{(0)} + V^{(1)} + V^{(2)} + V^{(3)} + \cdots$

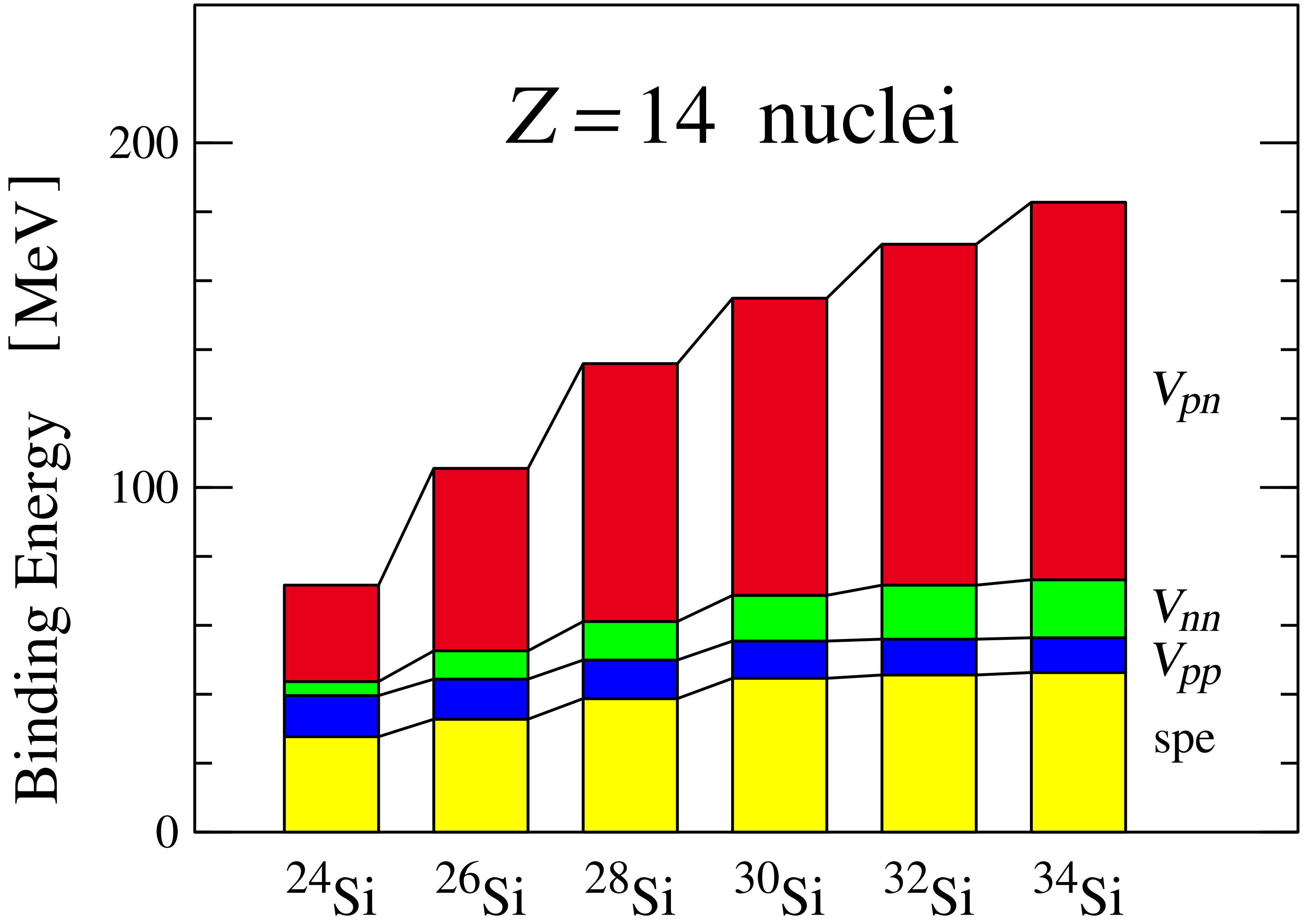
- QQ**-force に相当。**

結果（その１） 陽子・陽子間，中性子・中性子間，陽子・中性子間に分解



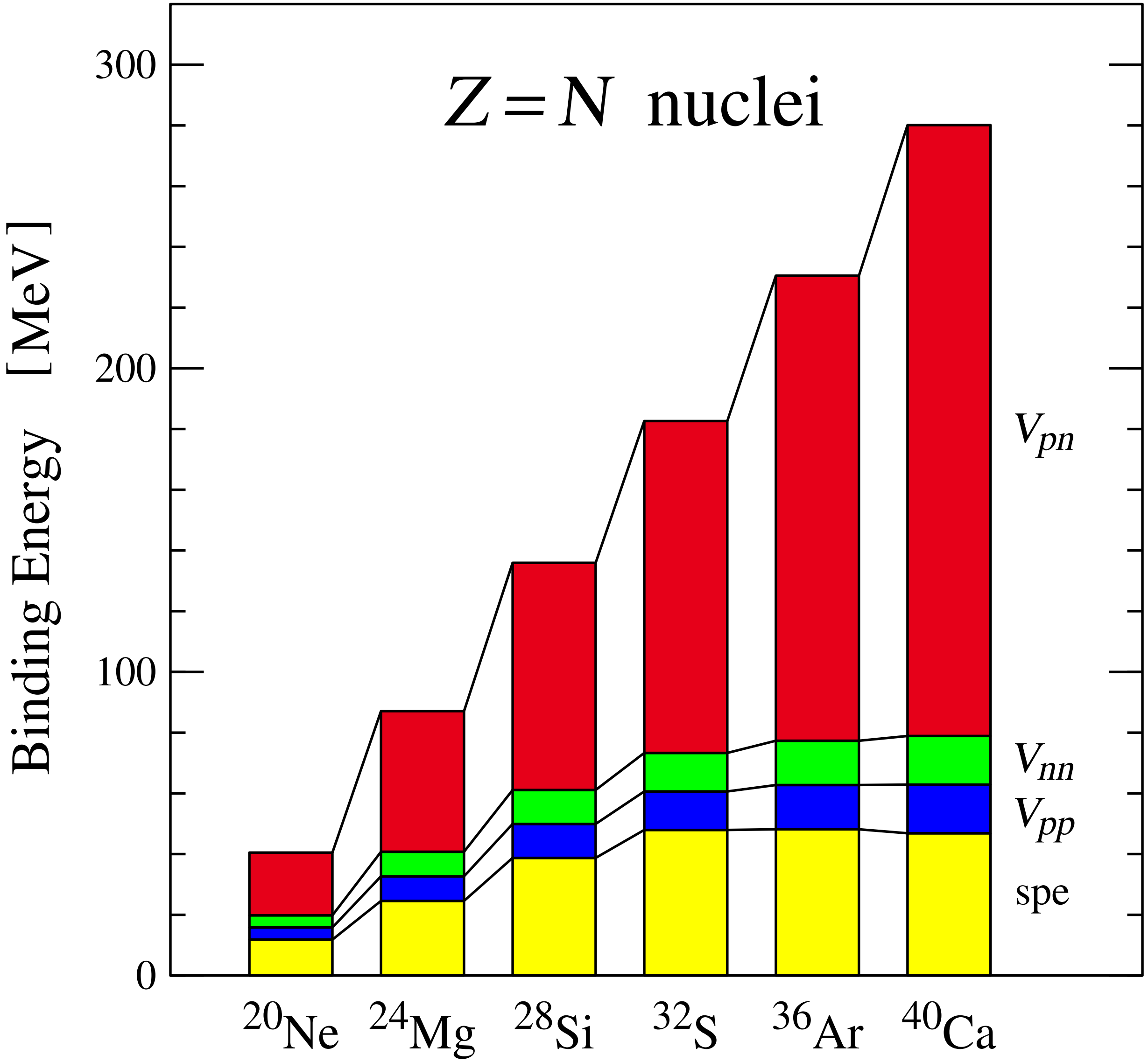
陽子・中性子間の相互作用の寄与が大きい。

結果（その１） 陽子・陽子間，中性子・中性子間，陽子・中性子間に分解



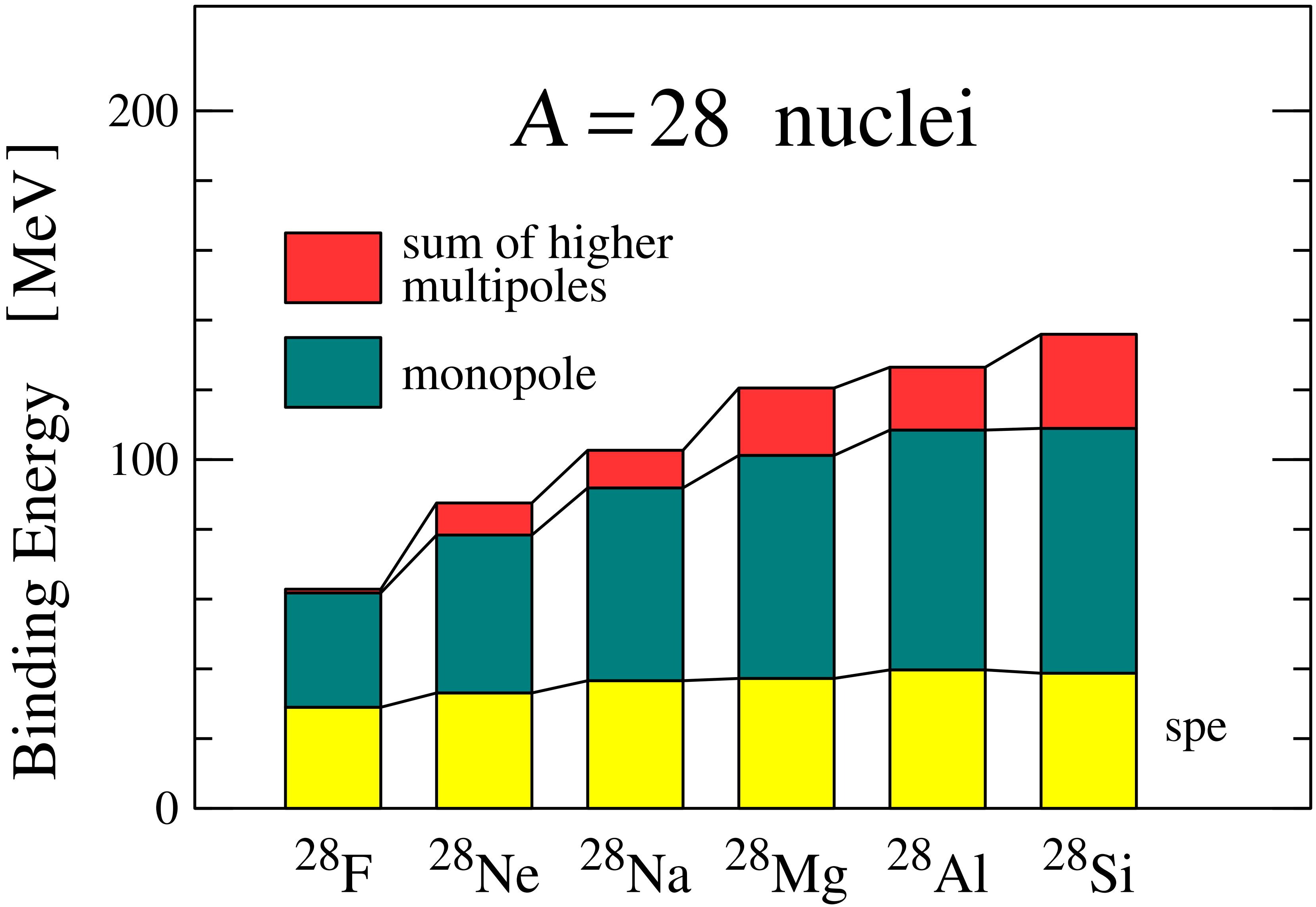
陽子・中性子間の相互作用の寄与が大きい。

結果（その１） 陽子・陽子間，中性子・中性子間，陽子・中性子間に分解



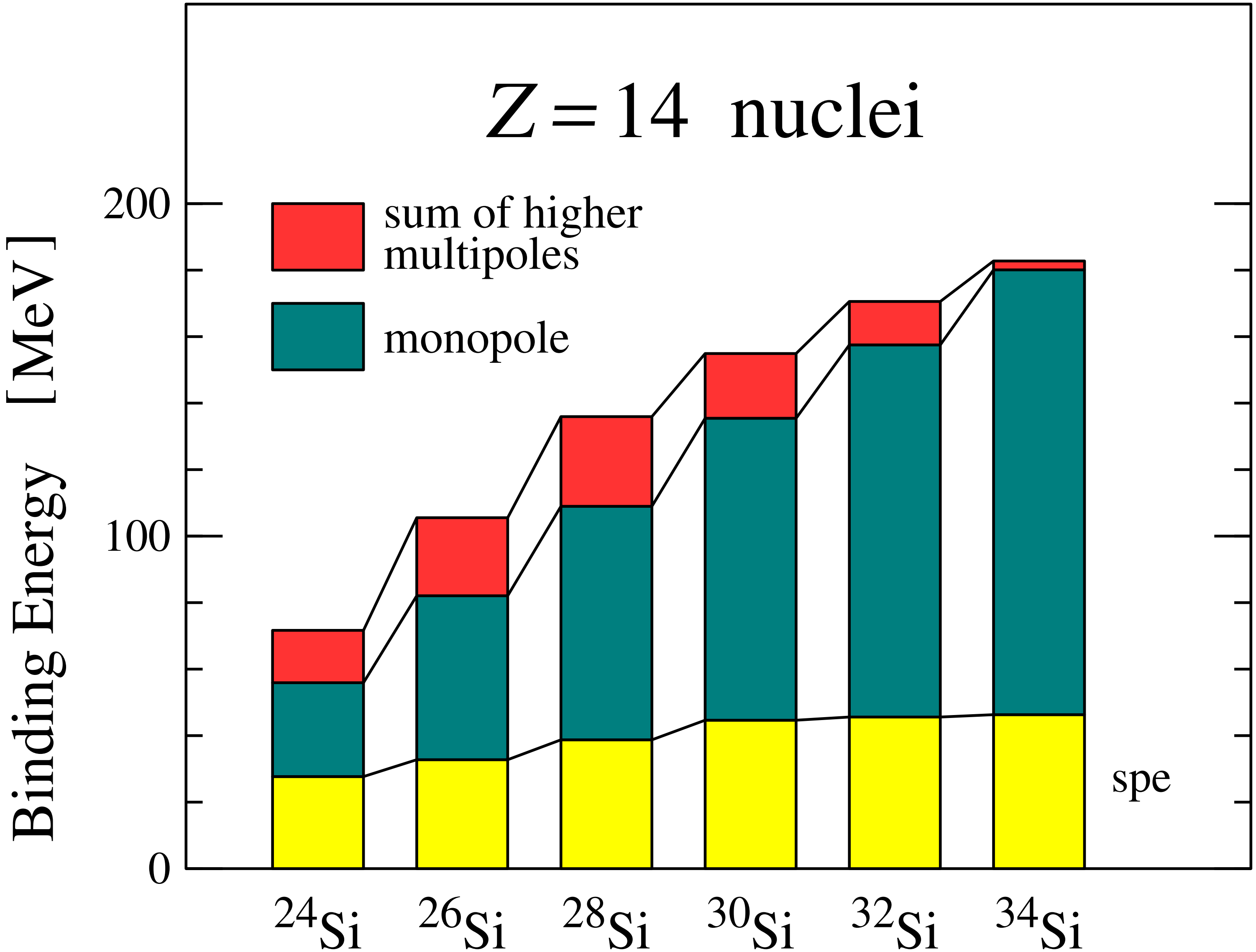
陽子・中性子間の相互作用の寄与が大きい。

結果（その２） 多重極展開



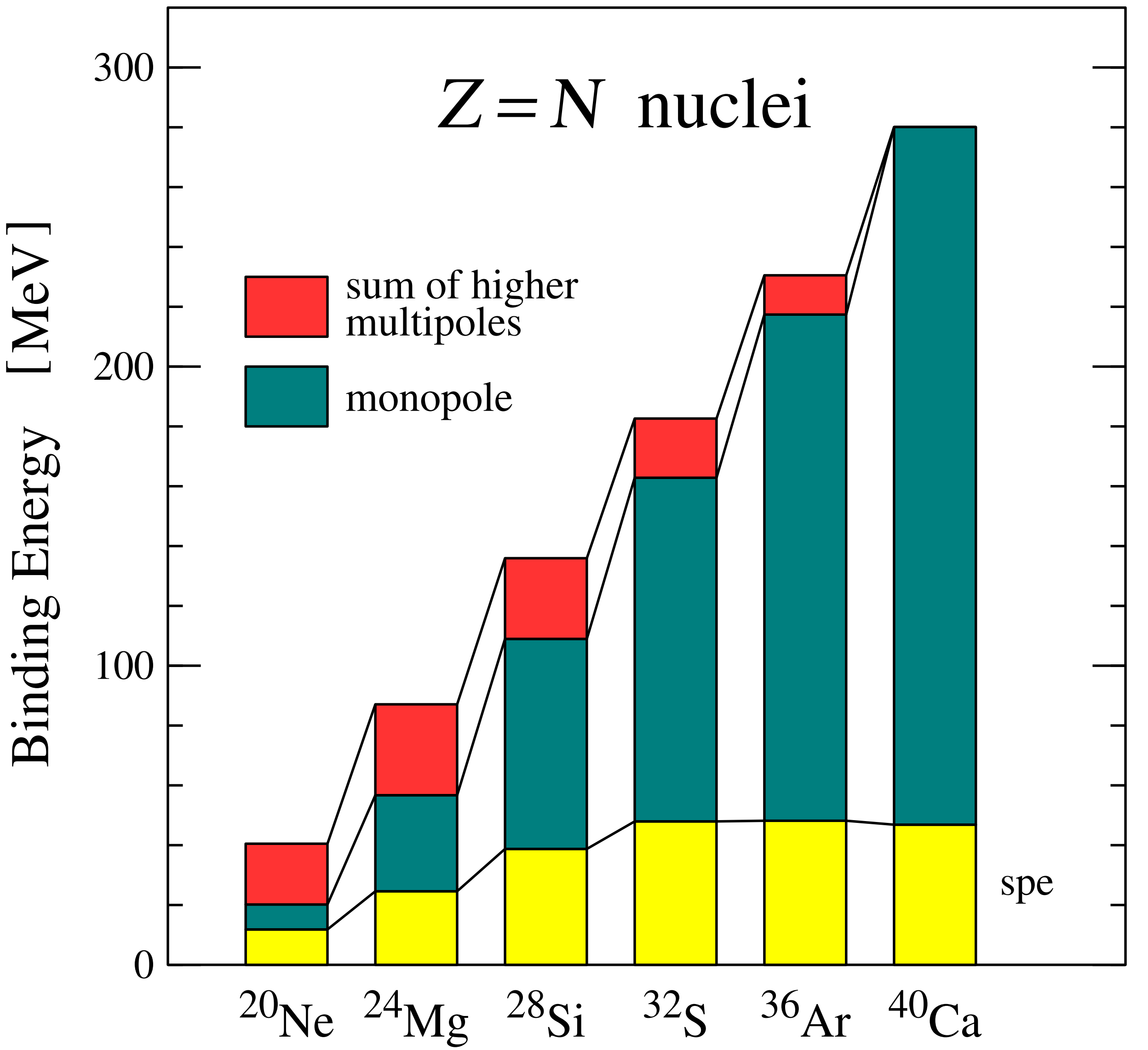
Monopole の寄与が大きい。（ spe ももともとは2体相互作用の Monopole の成分。）

結果（その 2） 多重極展開



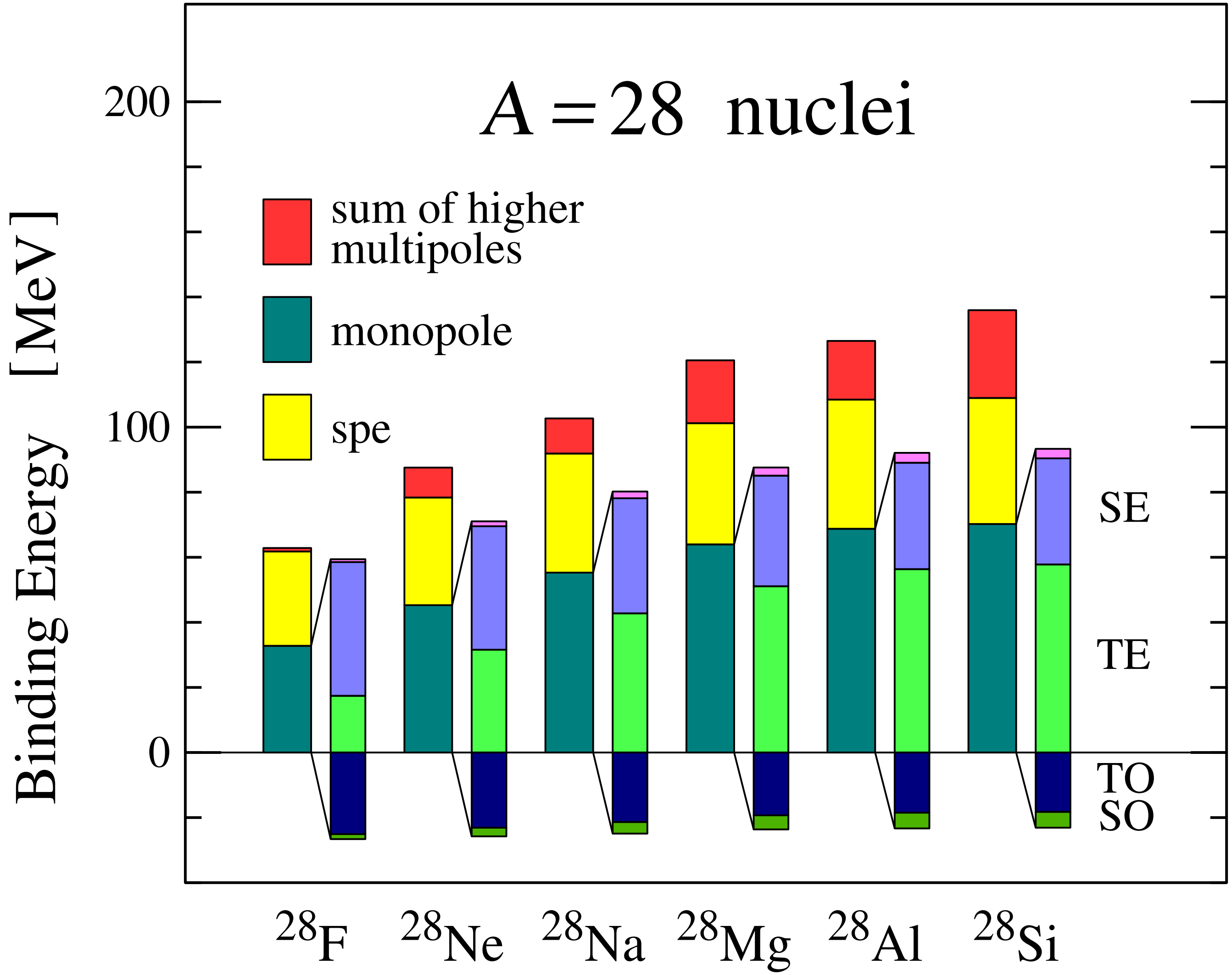
Monopole の寄与が大きい。（spe ももともとは2体相互作用の Monopole の成分。）

結果（その２） 多重極展開



Monopole の寄与が大きい。（ spe ももともとは2体相互作用の Monopole の成分。）

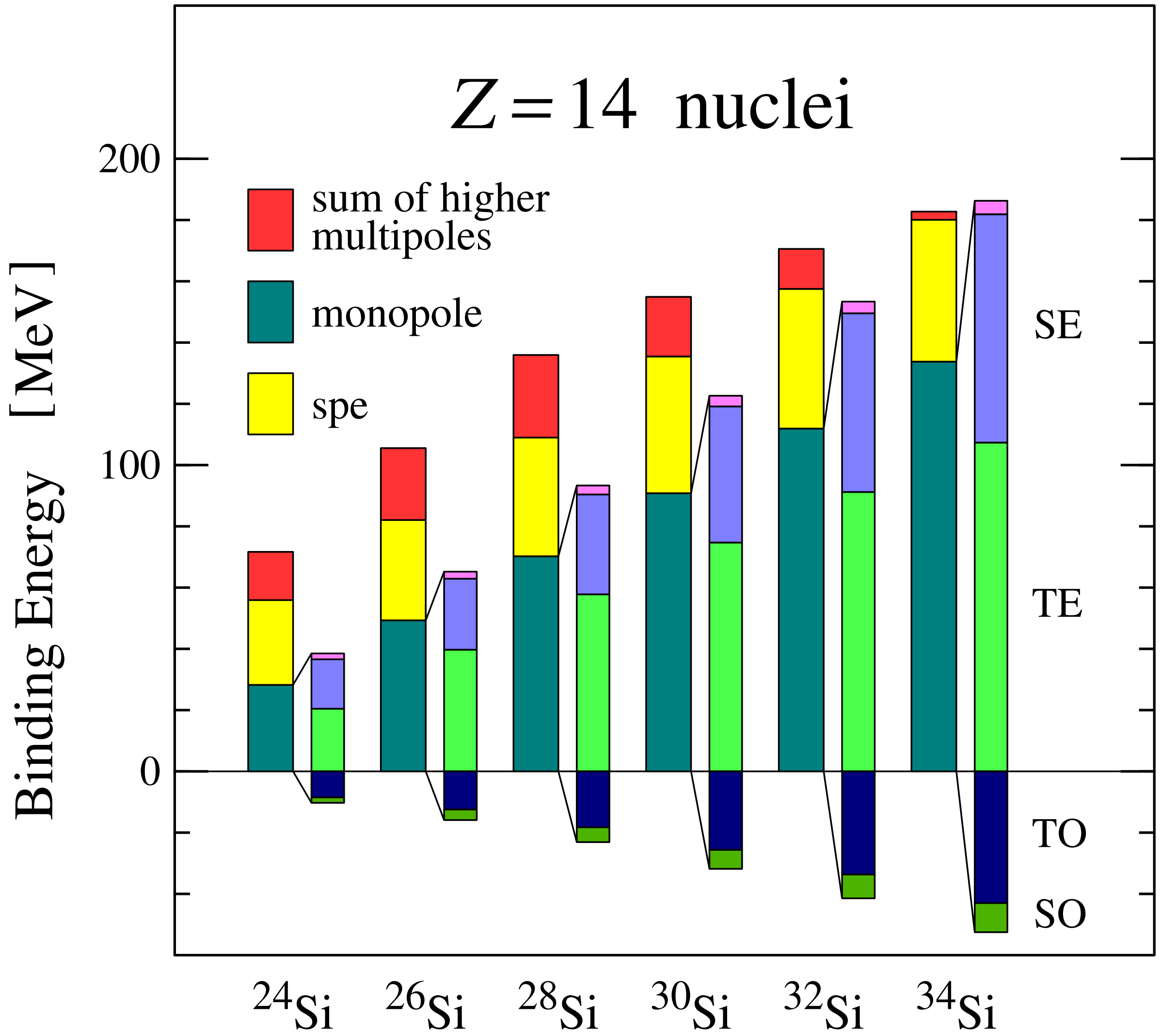
結果（その 3） Monopole をさらに分解



Triplet-Even (TE) の成分が最大。次いで Singlet-Even (SE)。

Triplet-Odd (TO) と Singlet-Odd (SO) は斥力。*LS* 力やテンソル力の寄与は小さい。

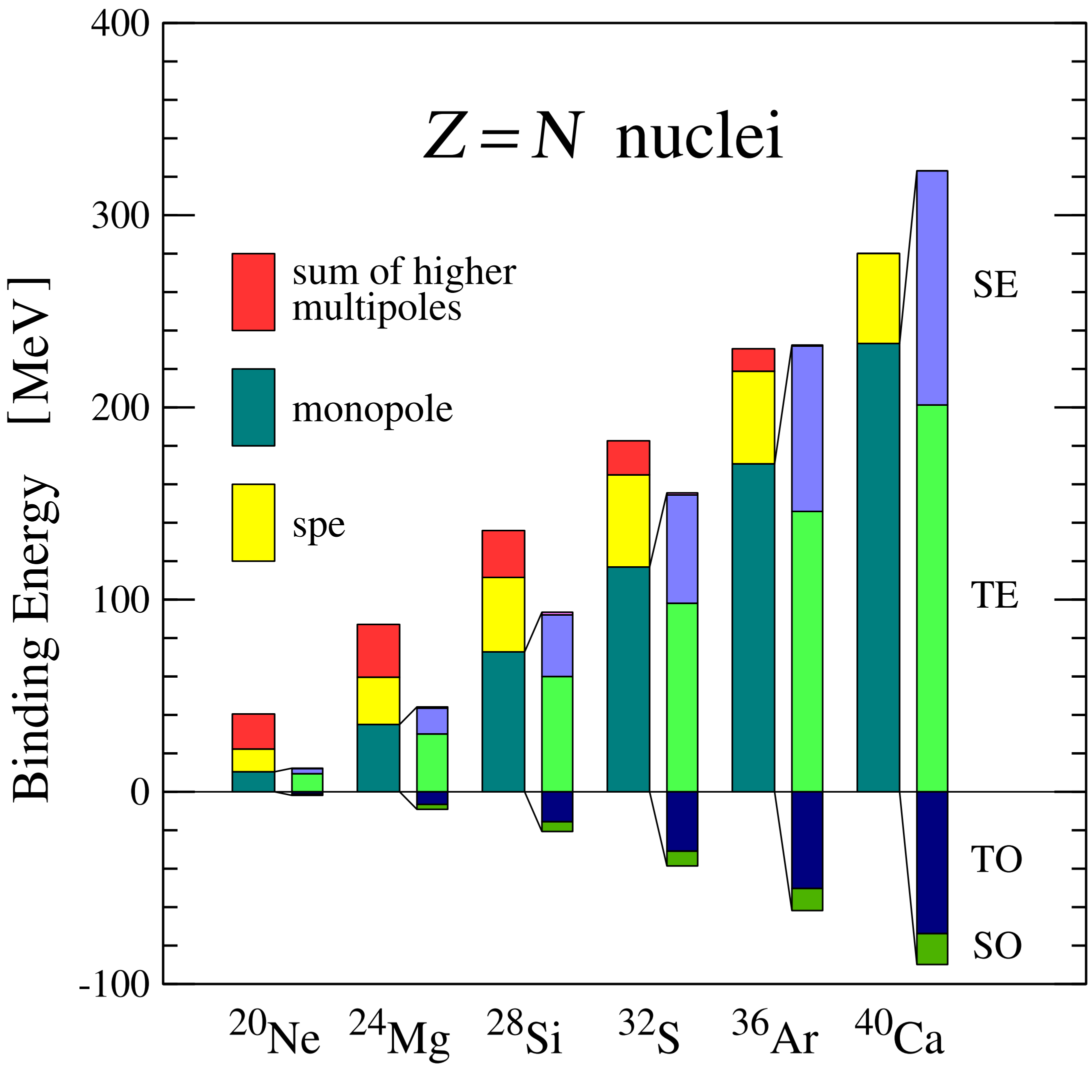
結果（その 3） Monopole をさらに分解



Triplet-Even (TE) の成分が最大。次いで Singlet-Even (SE)。

Triplet-Odd (TO) と Singlet-Odd (SO) は斥力。*LS* 力やテンソル力の寄与は小さい。

結果（その 3） Monopole をさらに分解



Triplet-Even (TE) の成分が最大。次いで Singlet-Even (SE)。

Triplet-Odd (TO) と Singlet-Odd (SO) は斥力。*LS* 力やテンソル力の寄与は小さい。

Monopole と 1 粒子エネルギー

Monopole は 1 粒子エネルギーに寄与する。

Open Shell の原子核の状態 $|\Phi\rangle$ に対する 1 粒子エネルギー

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^{\text{core}} + \langle\Phi| \sum_{j'} \Delta\varepsilon_{jj'} N_{j'} |\Phi\rangle$$

$$\Delta\varepsilon_{jj'} = \frac{\sum_J (2J+1) \langle jj'|V|jj'\rangle_J}{\sum_J (2J+1)}, \qquad N_j = \sum_m a^\dagger_{jm} a_{jm}$$

---

2 体相互作用の Monopole の成分

$$V^{(0)} = \sum_{jj'} \Delta\varepsilon_{jj'} N_j N_{j'}$$

Monopole と1粒子エネルギー

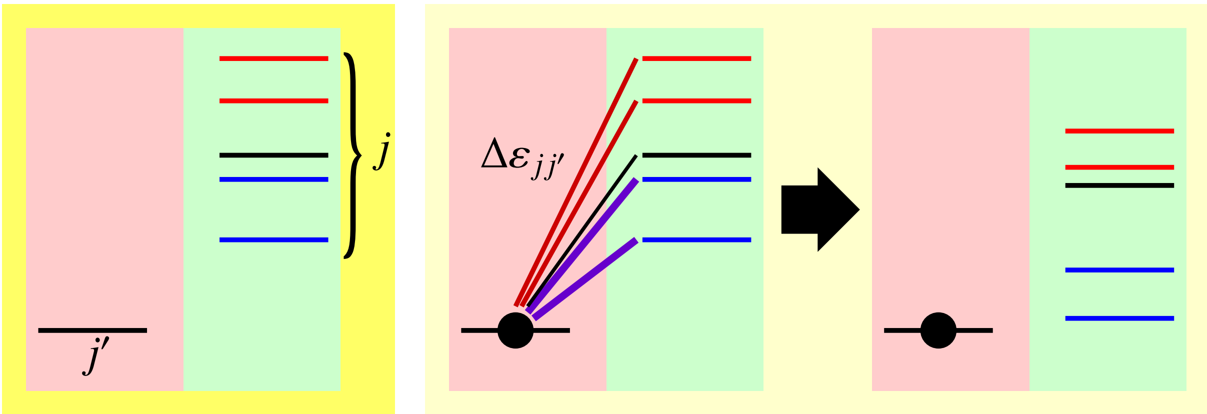
Monopole は1粒子エネルギーに寄与する。

Open Shell の原子核の状態 $|\Phi\rangle$ に対する1粒子エネルギー

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^{\mathrm{core}} + \langle\Phi| \sum_{j'} \Delta\varepsilon_{jj'} N_{j'} |\Phi\rangle$$

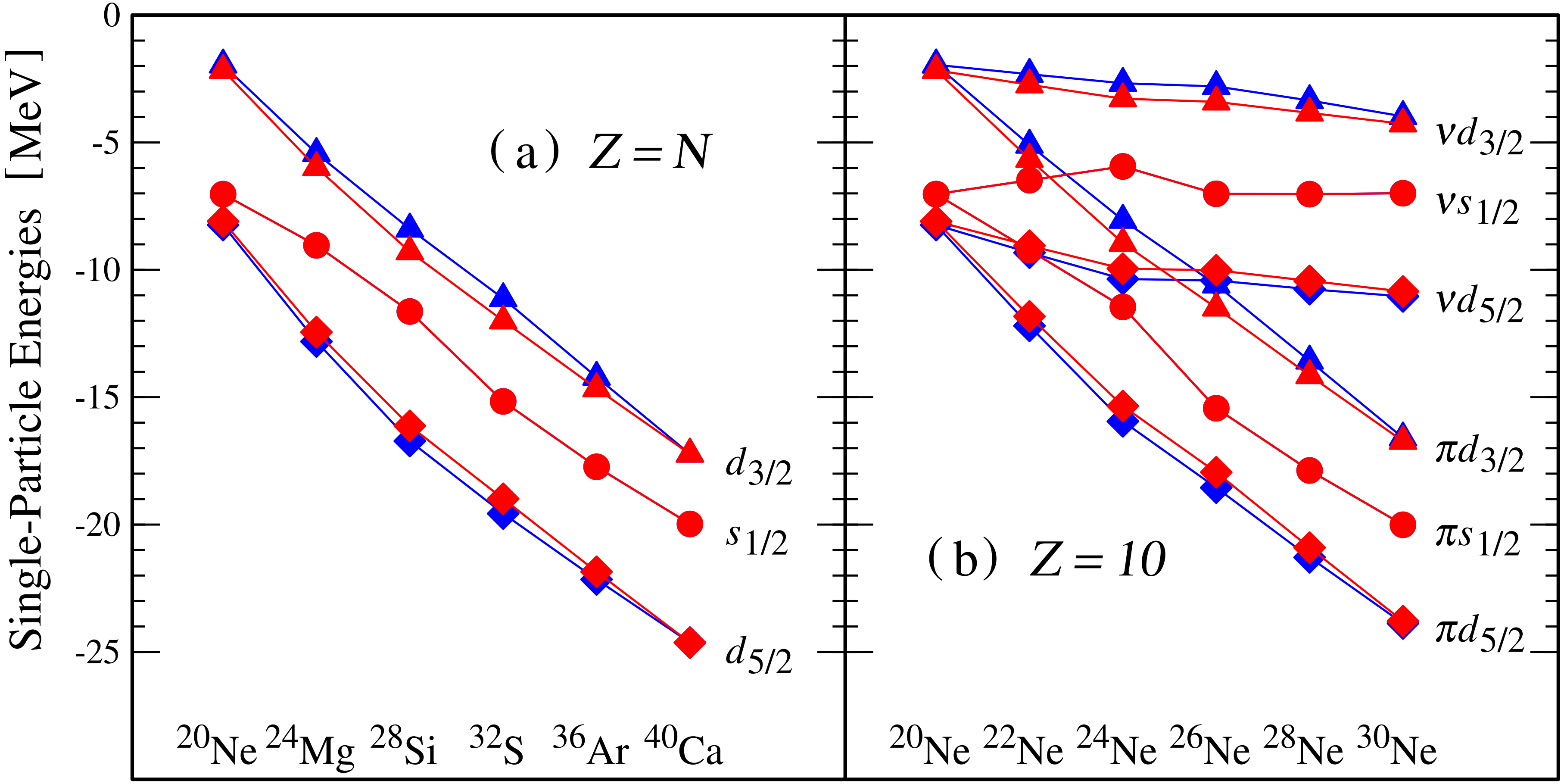
$$\Delta\varepsilon_{jj'} = \frac{\sum_J (2J+1) \langle jj'|V|jj'\rangle_J}{\sum_J (2J+1)}, \qquad N_j = \sum_m a^\dagger_{jm} a_{jm}$$

軌道 j' に核子が1つ入ると $\Delta\varepsilon_{jj'}$ の分だけ軌道 j の1粒子エネルギーが下がる。



Monopole と1粒子エネルギー

同じ Shell 内における1次のテンソル力の効果



赤：1次のテンソル有（通常の計算），青：1次のテンソル無

魔法数から最も離れた領域では，最大 2 MeV 程度 *LS*-splitting を弱める効果が見られる。

Monopole と1粒子エネルギー

2体相互作用をどこまで1体場（1粒子エネルギー）に繰り込めるか？

Open Shell の原子核の状態 $|\Phi\rangle$ に対する1粒子エネルギー

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^{\mathrm{core}} + \langle\Phi| \sum_{j'} \Delta\varepsilon_{jj'} N_{j'} |\Phi\rangle$$

$$\Delta\varepsilon_{jj'} = \frac{\sum_J (2J+1) \langle jj'|V|jj'\rangle_J}{\sum_J (2J+1)}, \qquad N_j = \sum_m a^\dagger_{jm} a_{jm}$$

2体相互作用の Monopole の成分

$$V^{(0)} = \sum_{jj'} \Delta\varepsilon_{jj'} N_j N_{j'}$$

2重閉殻の ^{40}Ca （1つの配位であらわされる）では以下が成り立つ。

$$\langle {}^{40}\mathrm{Ca}| \sum_j (\varepsilon_j - \varepsilon_j^{\mathrm{core}}) N_j |{}^{40}\mathrm{Ca}\rangle = \langle {}^{40}\mathrm{Ca}|V^{(0)}|{}^{40}\mathrm{Ca}\rangle$$

$$\sum_{jj'} \Delta\varepsilon_{jj'} \langle {}^{40}\mathrm{Ca}|N_j|{}^{40}\mathrm{Ca}\rangle\langle {}^{40}\mathrm{Ca}|N_{j'}|{}^{40}\mathrm{Ca}\rangle = \sum_{jj'} \Delta\varepsilon_{jj'} \langle {}^{40}\mathrm{Ca}|N_j N_{j'}|{}^{40}\mathrm{Ca}\rangle$$

Monopole と1粒子エネルギー

2体相互作用をどこまで1体場（1粒子エネルギー）に繰り込めるか？

Open Shell の原子核（状態 Φ）では一般に

$$\langle\Phi|\sum_j(\varepsilon_j-\varepsilon_j^{\mathrm{core}})N_j|\Phi\rangle \neq \langle\Phi|V^{(0)}|\Phi\rangle$$

$$\sum_{jj'}\Delta\varepsilon_{jj'}\langle\Phi|N_j|\Phi\rangle\langle\Phi|N_{j'}|\Phi\rangle \neq \sum_{jj'}\Delta\varepsilon_{jj'}\langle\Phi|N_jN_{j'}|\Phi\rangle$$

であるが， $R=\dfrac{\langle\Phi|\sum_j(\varepsilon_j-\varepsilon_j^{\mathrm{core}})N_j|\Phi\rangle}{\langle\Phi|V^{(0)}|\Phi\rangle}$ **は**

Φ	^{20}Ne	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S	^{36}Ar
R	1.035	0.994	1.009	1.004	1.000

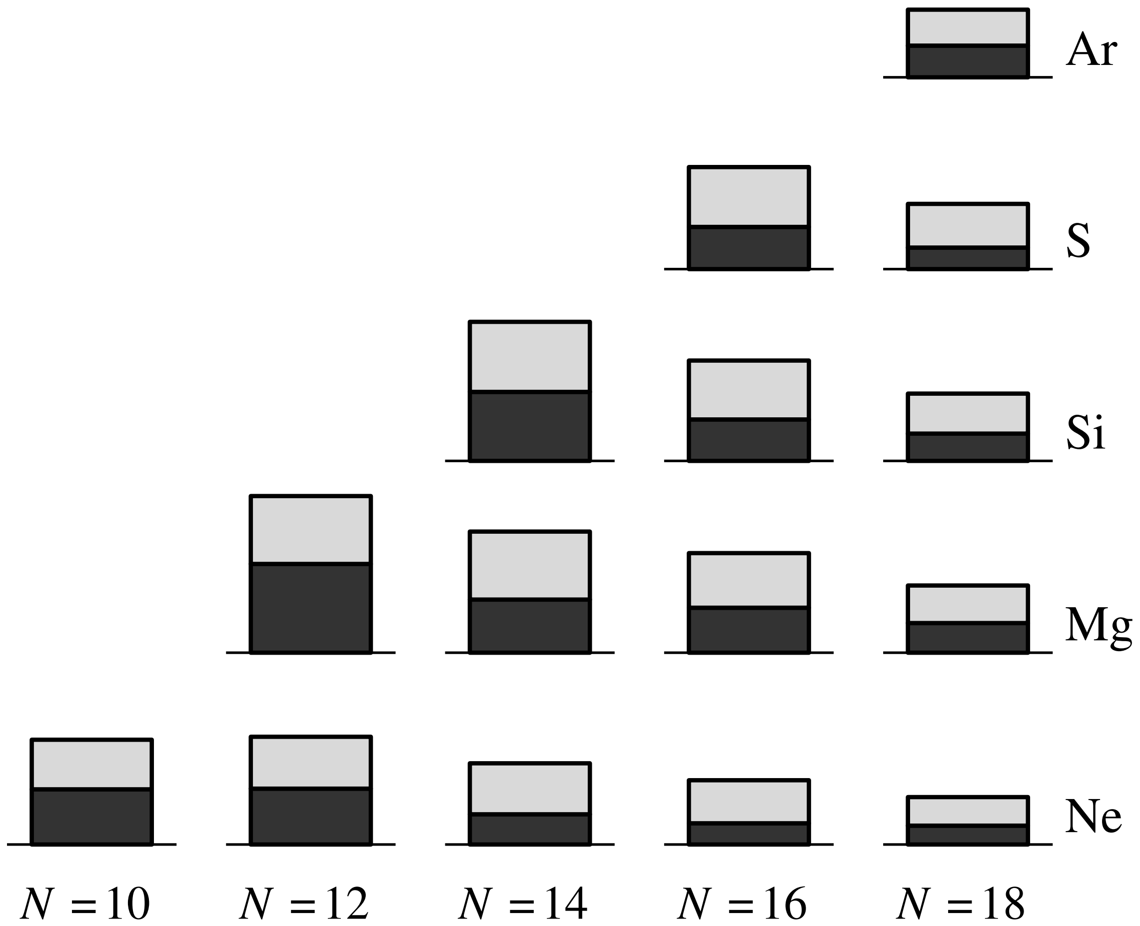
であるため， $\langle\Phi|\sum_j(\varepsilon_j-\varepsilon_j^{\mathrm{core}})N_j|\Phi\rangle \approx \langle\Phi|V^{(0)}|\Phi\rangle$ **がいえる。**

2体相互作用の Monopole の成分はほとんど1粒子エネルギーに繰り込むことができる。

Quadrupole と変形

陽子・中性子間の相互作用がもたらす束縛エネルギーの上昇分のうち，Monopole の寄与以外を取り出す。濃い部分が Quadrupole によるもの。

Monopole 以外の寄与は *sd* 殻の原子核では ^{24}Mg のときが最大で約 30 MeV。



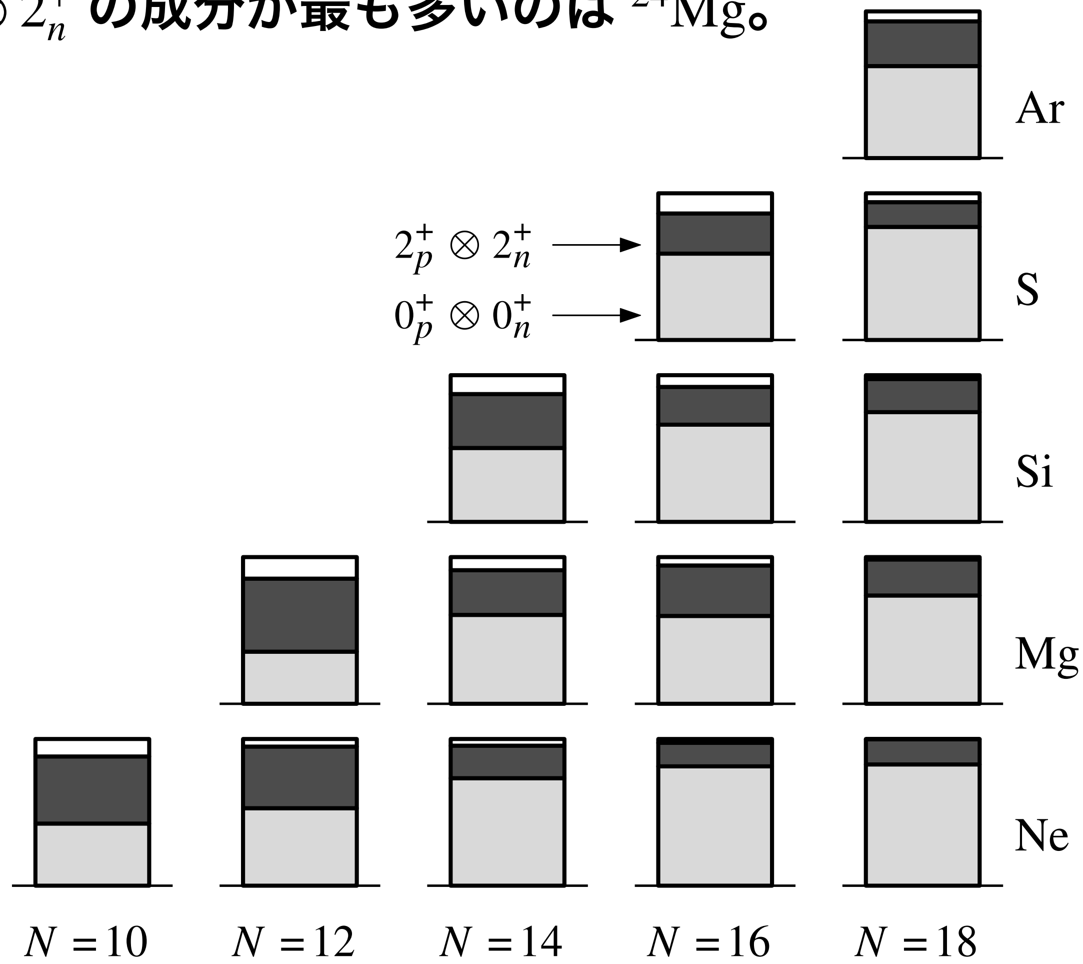
Quadrupole と変形

波動関数のうち $0_p^+ \otimes 0_n^+$ と $2_p^+ \otimes 2_n^+$ の成分を抜き出す。

$2_p^+ \otimes 2_n^+$ が変形の主成分。

束縛エネルギーにおける Quadrupole の寄与と相関がある。

sd **の原子核で $2_p^+ \otimes 2_n^+$ の成分が最も多いのは ^{24}Mg。**



まとめ

Empirical interaction をいくつかの成分に分解し，どの成分が原子核の束縛エネルギーに寄与するかを調べた。

- 模型空間は sd 殻，^{16}O core で $8 \le Z \le 20$, $8 \le N \le 20$ の偶々核について調べた。
- sd 殻に対する Empirical interaction である Wildenthal USD (B. H. Wildenthal, Prog. Part. Nucl. Phys. 11 (1984) 5) について調べた。

♦ 陽子・中性子間の相互作用の寄与が大きい。

♦ Monopole の効果が非常に大きい。

♦ Monopole の中でも Triplet-Even 次いで Singlet-Even の寄与が大きい。

♦ 1 粒子エネルギーにおいてテンソル力の 1 次は LS-splitting を弱める効果。

♦ 2 体相互作用の Monopole の成分のほとんどを 1 粒子エネルギーに繰り込める。

♦ Higher multipoles の寄与は最大で 30 MeV 程度 (^{24}Mg)。

♦ 配位混合によって最大で 30 MeV 程度の束縛エネルギーを獲得する。

♦ Higher multipoles では Quadrupole の寄与が大きく，原子核の波動関数中の $2_p^+ \otimes 2_n^+$ 成分と関係している。

補足

2体行列要素の分解（その１）

核力の平均を抜き出す

2体相互作用の平均（例として $j_1 \neq j_2$ の場合）

$$\langle j_1 j_2 | V^{\text{ave.}} | j_1 j_2 \rangle = \frac{\sum_J (2J+1) \langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_J}{\sum_J (2J+1)}$$

$\longrightarrow$ **Monopole 相互作用**

$$\langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_J = \underbrace{\langle j_1 j_2 | V^{\text{ave.}} | j_1 j_2 \rangle}_{J\text{ によらない}} + \langle j_1 j_2 | V^{\text{other}} | j_1 j_2 \rangle_J$$

2体行列要素の分解（その１）

多重極展開

ポテンシャルがわかっているときは，以下のような多重極に展開が可能。

（例として中心力の場合）

Fourier 変換と逆 Fourier 変換 $(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}\boldsymbol{p} \exp\{-i\,\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\} \int \mathrm{d}\boldsymbol{r} \exp(i\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\, V(r),$$

$$\exp(i\,\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} i^k j_k(pr) \left(\boldsymbol{Y}^{(k)}(\Omega)\cdot\boldsymbol{Y}^{(k)}(\Omega_p)\right)$$

多重極展開

$$V(r) = \sum_k \int_0^\infty p^2 \mathrm{d}p\, v(p)\,(2k+1)\left(\boldsymbol{F}^{(k)}(p;\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{F}^{(k)}(p;\boldsymbol{r}_2)\right),$$

$$\boldsymbol{F}^{(k)}(p;\boldsymbol{r}_i) = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}\, j_k(pr_i)\,\boldsymbol{Y}^{(k)}(\Omega_i),$$

$$v(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty r^2 \mathrm{d}r\, V(r)\, j_0(pr) \qquad \textbf{(Fourier-Bessel Transform)}$$

2体行列要素の分解（その１）

多重極展開

ポテンシャルがわかっているときは，以下のような多重極に展開が可能。

（例として中心力の場合）

$$V(r) = \sum_k \int_0^\infty p^2 \mathrm{d}p\, v(p)\,(2k+1)\left(\boldsymbol{F}^{(k)}(p;\boldsymbol{r}_1)\cdot\boldsymbol{F}^{(k)}(p;\boldsymbol{r}_2)\right)$$

$k=0$ ： **Monopole 相互作用** $\longrightarrow$ **核力の平均に対応**

$k=2$ ： **Quadrupole** $\longrightarrow$ QQ**-force に対応**

Racah 代数を利用すれば，2体行列要素を多重極に展開可能。

（ポテンシャルがわからなくてもよい。）

（例として $j_1 \neq j_2$ の場合）

$$\langle j_1 j_2 | V_k | j_1' j_2' \rangle_J = \sum_{J'} (-1)^{J-J'}\,(2k+1)\,(2J'+1) \times W(j_1 j_2 j_1' j_2'; Jk)\; W(j_1 j_2 j_1' j_2'; J'k)\,\langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_{J'}$$

$$\langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_J = \sum_k \langle j_1 j_2 | V_k | j_1' j_2' \rangle_J$$

2 体行列要素の分解（その 1 ）

「多重極展開」と「核力の平均」の対応関係

$$\langle j_1 j_2 | V_k | j_1' j_2' \rangle_J = \sum_{J'} (-1)^{J-J'} (2k+1)(2J'+1) \times W(j_1 j_2 j_1' j_2'; Jk)\, W(j_1 j_2 j_1' j_2'; J'k)\, \langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_{J'}$$

$$\langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_J = \langle j_1 j_2 | V_0 | j_1' j_2' \rangle_J + \sum_{k \neq 0} \langle j_1 j_2 | V_k | j_1' j_2' \rangle_J$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_J = \langle j_1 j_2 | V^{\text{ave.}} | j_1 j_2 \rangle + \langle j_1 j_2 | V^{\text{other}} | j_1 j_2 \rangle_J$$

$$\langle j_1 j_2 | V^{\text{ave.}} | j_1 j_2 \rangle = \frac{\sum_J (2J+1) \langle j_1 j_2 | V | j_1 j_2 \rangle_J}{\sum_J (2J+1)}$$

2体行列要素の分解（その１）

ハミルトニアンの行列の対角成分と非対角成分

$$E = \left(C_1^*,\ C_2^*,\ \cdots,\ C_n^* \right) \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \cdots & H_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_k C_k^* C_k H_{kk} + \sum_{k \neq \ell} C_k^* C_\ell H_{k\ell}$$

$$H_{k\ell} = \sum_{jm} \varepsilon_j^{\mathrm{core}} \langle \phi_k^{(\mathrm{basis})} | a_{jm}^\dagger a_{jm} | \phi_\ell^{(\mathrm{basis})} \rangle + \sum_{j_1 j_2 j_1' j_2' JM} \langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_J \langle \phi_k^{(\mathrm{basis})} | A^\dagger(j_1 j_2; JM)\, A(j_1' j_2'; JM) | \phi_\ell^{(\mathrm{basis})} \rangle$$

Monopole 相互作用の行列要素は対角成分にしかない。
非対角成分は配位混合をあらわす。
Monopole 以外の相互作用の行列要素が配位混合の度合いを決める。

2体行列要素の分解（その 2）

Triplet-Even, Singlet-Even などの各チャネルに分解

(1) 2粒子状態はアイソスピン T，スピン S，相対の軌道角運動量 L で区別される。
反対称化により T と S がわかれば L の Even, Odd が決まる。

$\longrightarrow$ S : **Triplet** or **Singlet**,　L : **Even** or **Odd**

(2) 中心力，スピン・軌道力，テンソル力はテンソル構造が異なる。

中心力	$1, (\sigma_1 \cdot \sigma_2)$ など	$k = 0$
スピン・軌道力	$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}$	$k = 1$
テンソル力	$S_{12} = (\sigma_1 \cdot \boldsymbol{r})(\sigma_2 \cdot \boldsymbol{r})/r^2 - (\sigma_1 \cdot \sigma_2)/3$	$k = 2$

			Central	**Spin-orbit**	**Tensor**
T	S	L	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
0	0	**Odd**	**SO**	–	–
	1	**Even**	**TE**	**LSE**	**TNE**
1	0	**Even**	**SE**	–	–
	1	**Odd**	**TO**	**LSO**	**TNO**

2体行列要素の分解（その２）

Triplet-Even, Singlet-Even などの各チャネルに分解

(1) jj 結合から LS 結合へ移る。（Λ は全軌道角運動量，つまり重心を含む。）

$$\langle j_1 j_2 | V | j_1' j_2' \rangle_{TJ} \longrightarrow \langle \Lambda S | V | \Lambda' S \rangle_{TJ}$$

(2) 2粒子状態の反対称性から S と T を決めると L の Even, Odd が決まる。

(3) 中心力 ($k = 0$)，スピン・軌道力 ($k = 1$)，テンソル力 ($k = 2$) はテンソルの構造が違うので，Racah 係数を利用することによって，それぞれを分離できる。

$$\langle \Lambda S | V_k | \Lambda' S \rangle_{TJ} = \sum_{J'} (-1)^{J-J'} (2k+1)(2J'+1) \times W(\Lambda S \Lambda' S; Jk) W(\Lambda S \Lambda' S; J'k) \langle \Lambda S | V | \Lambda' S \rangle_{TJ'}$$

(4) (3) で得られた分解された行列要素を jj 結合に戻す。

$$\langle \Lambda S | V_k | \Lambda' S \rangle_{TJ} \longrightarrow \langle j_1 j_2 | V_k(S) | j_1' j_2' \rangle_{TJ}$$

2体行列要素の分解（その2）

Triplet-Even, Singlet-Even などの各チャネルに分解

(1) jj **結合から** LS **結合へ移る。**

(2) 2粒子状態の反対称性から S **と** T **を決めると** L **の Even, Odd が決まる。**

(3) 中心力 ($k = 0$)，スピン・軌道力 ($k = 1$)，テンソル力 ($k = 2$) はテンソルの構造が違うので，Racah 係数を利用することによって，それぞれを分離できる。

(4) (3) で得られた分解された行列要素を jj **結合に戻す。**

			Central	Spin-orbit	Tensor
T	S	L	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
0	0	**Odd**	**SO**	**–**	**–**
	1	**Even**	**TE**	**LSE**	**TNE**
1	0	**Even**	**SE**	**–**	**–**
	1	**Odd**	**TO**	**LSO**	**TNO**