ECRイオン源への^{6}Li$^+$イオンの入射

2005.6.9 森信

2005.7.21 修

１．座標

ECR イオン源中心軸を z 軸とする円筒座標系 (r, φ, z) を考える。既に報告した表面電離器からのイオン輸送計算[1]と整合させて、ECR 磁気遮蔽板外面を $z = 0$ とする。長さの単位は mm である。粒子軌道座標 φ の代わりに、$l = r^2\dot{\varphi}$ を用いることにし、これを軸の周りの角運動量と名付ける。念のため、ECR 各位置の z 座標を示しておく。

イオン輸送系出口	ECR 入口	ECR 中心
$z = -500$	0	555 mm

２．場の分布

電場、磁場の分布については、プロクラム TOSCA を用いた川口氏、民井氏による数値計算がある。その計算結果を z 軸上でおよそ再現する関数として、左右非対称な Gauss 型及び Woods-Saxon 型関数を採用する。即ち

$$\frac{B_z}{B_{\max}} = e^{-(\frac{z-z_B}{\sigma_B})^2}, \qquad \begin{pmatrix} z \le z_B \text{ で } \sigma_B = \sigma_{B1} \\ z \ge z_B \text{ で } \sigma_B = \sigma_{B2} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$\frac{V}{V_{\max}} = \frac{e^{\frac{z-z_V}{\sigma_V}}}{1 + e^{\frac{z-z_V}{\sigma_V}}} \tag{2.2}$$

である。民井氏の数値計算値と上記関数との比較を図 2.1 に示す。図 2.2 はその一部の拡大

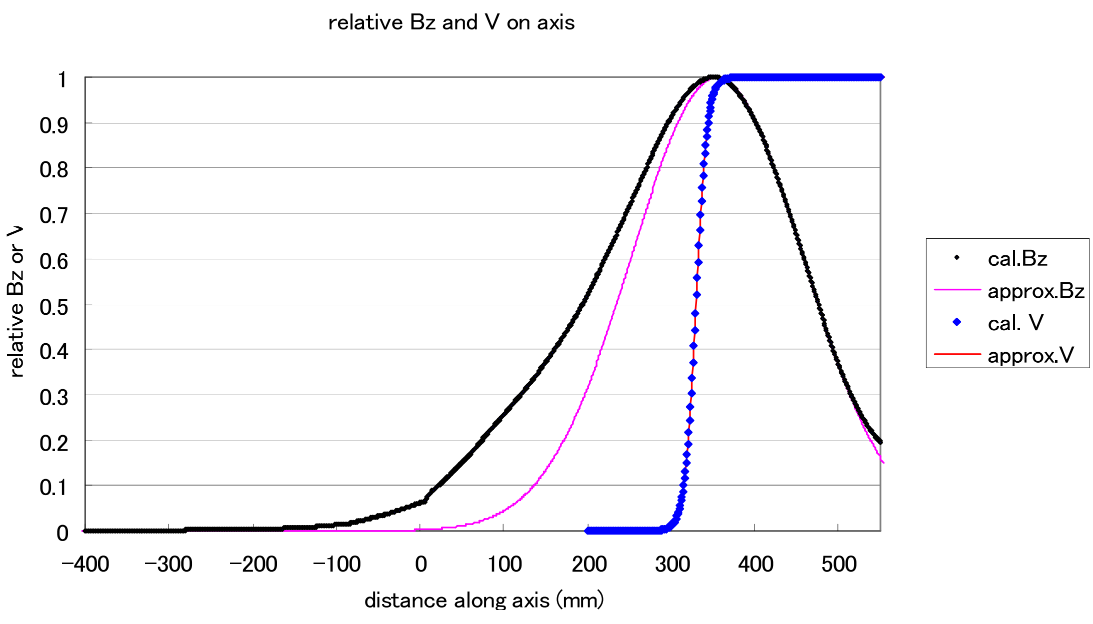

図 2.1. z 軸上の磁場（黒点）静電ポテンシアル（青点）と式(2.1)(ピンク線), (2.2)(赤線)の比較

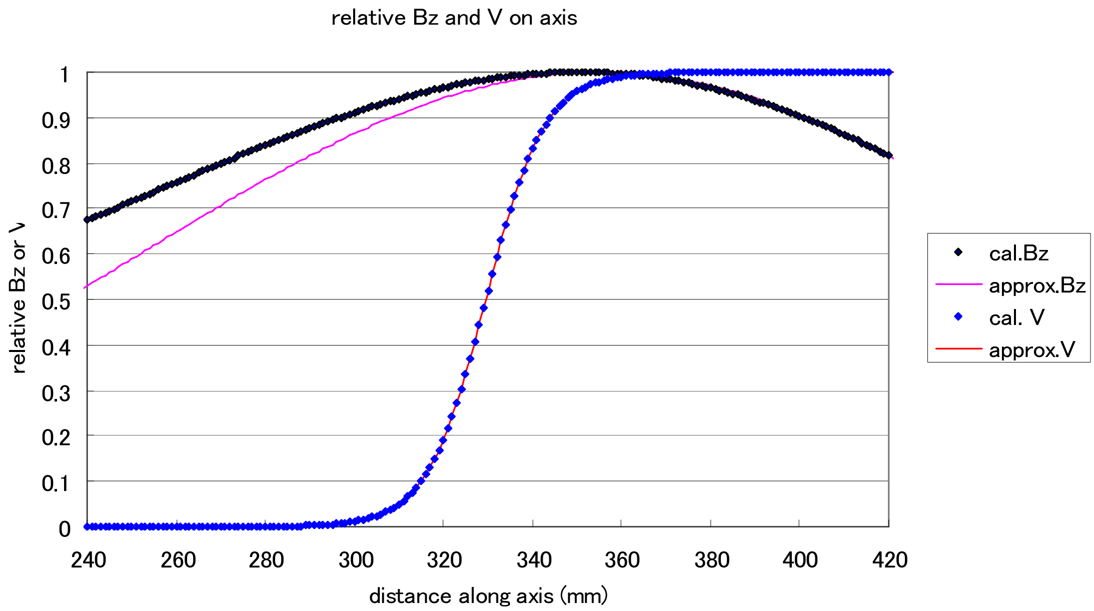

図 2.2. 図 2.1 と同じ。静電ポテンシアルの変化を見やすくするため、横軸を拡大して表示したもの。

図である。実は、これらの図では磁場分布は左右対象な Gauss 型となっており、パラメーターは $z_B = 355$, $\sigma_{B1} = \sigma_{B2} = 144.3$ 及び $z_V = 329.5$, $\sigma_V = 6.60$ である。静電ポテンシアル分布は民井氏の電極配置に対応する。以下の軌道計算ではこの場の分布を仮定しており、磁場には問題を残すが、軌道計算から得る結論には大きな影響は無いと考えられる。

２．ECR 源入り口での軌道計算

粒子軌道の計算は末尾付録の式(A1.1')－(A1.3')を数値的に積分することで求める（Runge-Kutta-Gill 法)。軸から離れた場所の電磁場は、(A2.1)－(A2.4)式の展開で r の 3 次項までを取り入れた。（現在の問題の取り扱いでは、結果的には、r の 1 次までを考慮すれば十分である。）

式(A1.3')から分かるように、z方向には、角運動量$l \neq 0$の時に磁場から受ける力と、電場から受ける力が働く。式(A1.3")から $B,\ B'/B > 0$ なら $\dot{l} < 0$ であることを考えると、十分磁場に入った時(A1.3')の第 1 項は負となる。また減速電場では、主要な効果を持つ第 2 項も負である。このため、初期条件によっては、それによって定まる特定の位置$z = z_r$で $\dot{z} < 0$ になる（粒子の運動方向が反転する）ことがある。

微分方程式(A1.1')は$r = 0$ でsingularであり、その効果はlに依存することが計算上の注意点である。以下では、$B_{max} = +3$T, $V_{max} = 19990$ V, Li^+入射エネルギー20 keVを仮定する。つまり、減速領域を通過したLi^+イオンのエネルギーは 10 eVとなる。また、軌道の傾きは $t = dr/dz$ 、規格化角運動量は $L = l/v$ で表し、初期値は添え字 0 をつけて示す。特に意識

的に区別する必要がない限り、Lもlも共に角運動量と呼ぶ。

３．粒子軌道と減速電場印可場所

3.1.　１段減速

(A3.1)式第 3 項は、粒子に対して電場が減速開始領域及び一様減速領域で発散、減速終了領域で収束のレンズ効果を持つことを示している。レンズ効果は r の大きさに依存する。このため、減速電場の適切な置き場所を検討する必要がある。図 3.1 は、１段の減速の場合、同一の初期値の粒子軌道について減速場所を変えて計算した結果を示す。初期入射角度は、電磁場のない場合、粒子軌道は $z = 210$ mm（上流輸送系出口から 710 mm）で軸と交叉するよう選ばれている。ポテンシアル分布の相対的形は図 2.2 に示したとおりである。

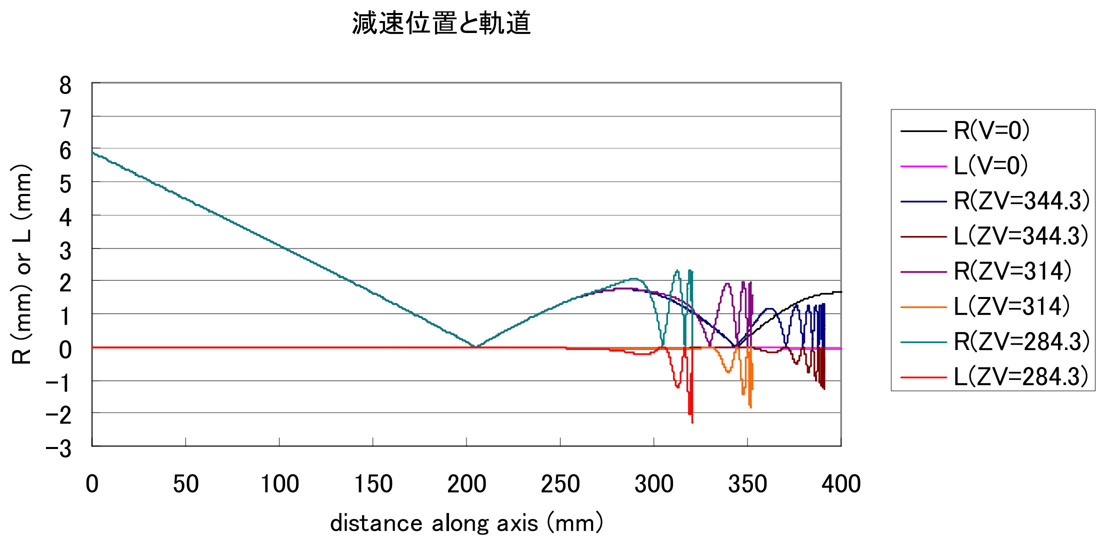

図 3.1.　減速位置z_Vを変えた場合の軌道座標r, Lの変化。軌道初期値は$r_0 = 20$ mm,　$t = -0.0282$, $L = 0$ である。z_Vの値は図中凡例参照(mm)。

図中、黒及びピンク色の線は減速電場のない場合の軌道座標に対応する。この時$z = 284.3$ でrは極大になり、$z = 344.3$ で極小になるから、減速領域中心z_Vをこれらの場所の周辺で変化させた。軌道計算は軌道反転位置z_rで止めている。rの大きい場所に減速電場を置くと、その後のr及びLの変動範囲が大きくなる傾向が見られる。

電場領域透過の目安として、$z_r - z_V$をプロットしたものが図 3.2 である。$z_r - z_V$は電場領域からどれくらい奥まで粒子が進入したかの目安である。これから、$z_V = 340$ 付近で最も進入距離が大きくなることが分かり、図 3.1 の黒線と比較すると、rの小さ

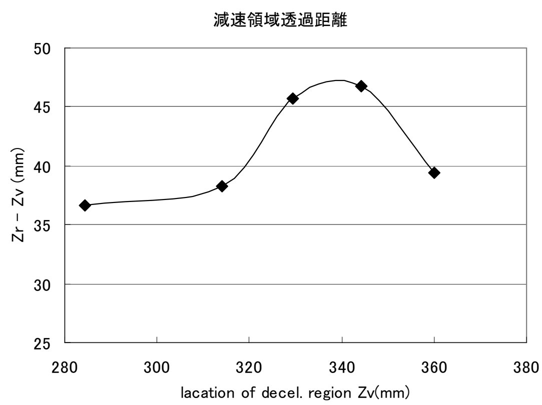

図 3.2.　減速領域位置と通過距離z_r − z_Vの関係

軌道初期値は図 3.1 に同じ。

い場所に減速電界を置くことが望ましいことが推測される。ただし、図に示した例は粒子が全て反射される場合で、進入距離の減速位置依存性は非常に大きい訳ではない。

図 3.2 からは、$z_V = 340$ 程度が望まれることになるが、民井氏の電極配置$z_V = 329.5$ も悪い選択ではあるまいと思われる。

3.2. 2 段減速

減速を複数段に分けて実施することも考えられるが、前節に見たとおり、電場のレンズ効果に配慮が必要である。傾向を見るために 2 段減速を検討した。第 2 段電極は民井設定（z_{V2} = 329.5）に固定し、第 1 段電極の望ましい位置z_{V1}を探すこととする。図 3.3 は、2 段減速における軸上場電磁場分布の例である。このような電磁場分布の中の軌道を示したものが図 3.4 である。

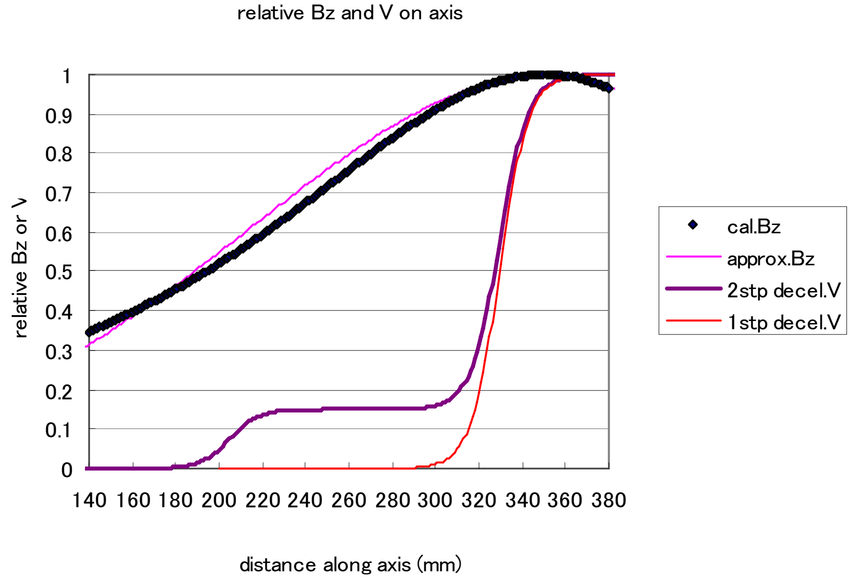

図 3.3. 2 段減速の場合の磁場および静電ポテンシアルの軸上分布

磁場分布は図 2.1，2.2 に同じ。紫色の線は 2 段減速（1 段 : z_V=205, 電圧=15%， 2 段 : z_V=329.5，電圧=85%)、赤線は 1 段減速（z_V=329.5, 電圧=100%）の場合のポテンシアル分布である。

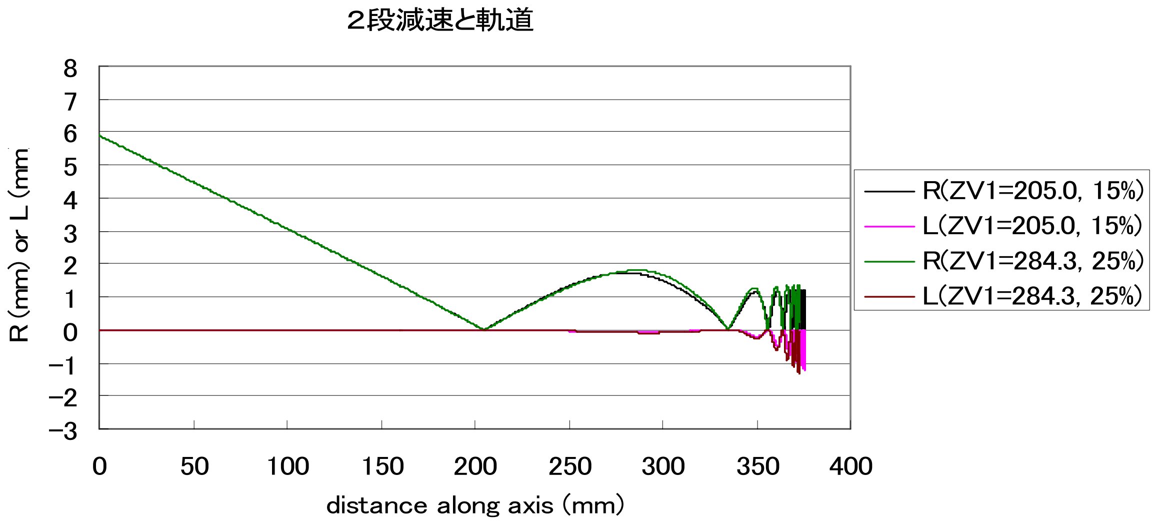

図 3.4. 2 段減速における軌道 ［黒，ピンク線；第 1 段減速位置z_{V1} = 205.0, 緑，茶線；第 1 段減速位置z_{V1} = 284.3］ いずれの場合も到達位置を最大にするように、第 1 段／第 2 段電圧比を決定している。軌道初期値は図 3.1 に同じ。

図 3.4 の曲線は第 1 段減速位置を最初のr-node（z = 205.0）に置いた場合とr-極大位置(z = 284.3)に置いた場合の軌道座標を示しており、各々の場合で、到達点z_r（軌道反転位置）が最大になるように、第 1 段/第 2 段減速電圧比を選んでいる。いずれの場合でも、電圧比によって到達位置は変わるが、それは、第 1 段減速によって粒子軌道と第 2 段減速との整合性が変化するためであると考えられる。その結果（？）電圧比が最適化された場合には、第 2 段減速領域での軌道はほぼ同じとなる。

到達位置z_rは第 1 段減速位置をr-nodeに置いた場合z_r = 375.7、r-極大に置いた場合z_r = 372.6 であり、前者がわずかに大きい。また、前者は 1 段減速の場合の値z_r = 375.2 よりきわめて僅かに大きい（殆ど変わらない）。ただし、こうした検討は、より深い進入距離を与える粒子初期条件に対して検討する必要がある（つまり、上記は感度の悪い検討かも知れない）が、上記の結果は、複数段減速に大きなメリットが無いことを示すものかも知れない。

以下では 1 段減速でz_V = 329.5（民井電極配置）の場合に検討を限定する。

４．入射角度t_0の効果

最大到達位置z_rはもちろん粒子入射角度に依存する。その例を図 4.1 に示す。t_0 = -0.0282 は、電磁場のない場合z = 210 mm（上流輸送系出口から 710 mm）で軸と交叉するように、（磁場中でのrを最小化するために）上流の輸送系の検討において決められた値である。図に示した範囲では、t_0 = -0.0282 の時に最も粒子のECR源内到達距離が大きいことが分かる。

入射角度の変化はr-node位置の変化をもたらす。このことを念頭に置くと、図 4.1 は図 3.1 のr-nodeと減速位置の関係を、粒子入射角度を媒介変数として見ていることに対応するとも考えられる。つまり、図 3.2 で民井電極配置z_V = 329.5 は既に良い設定であることが分

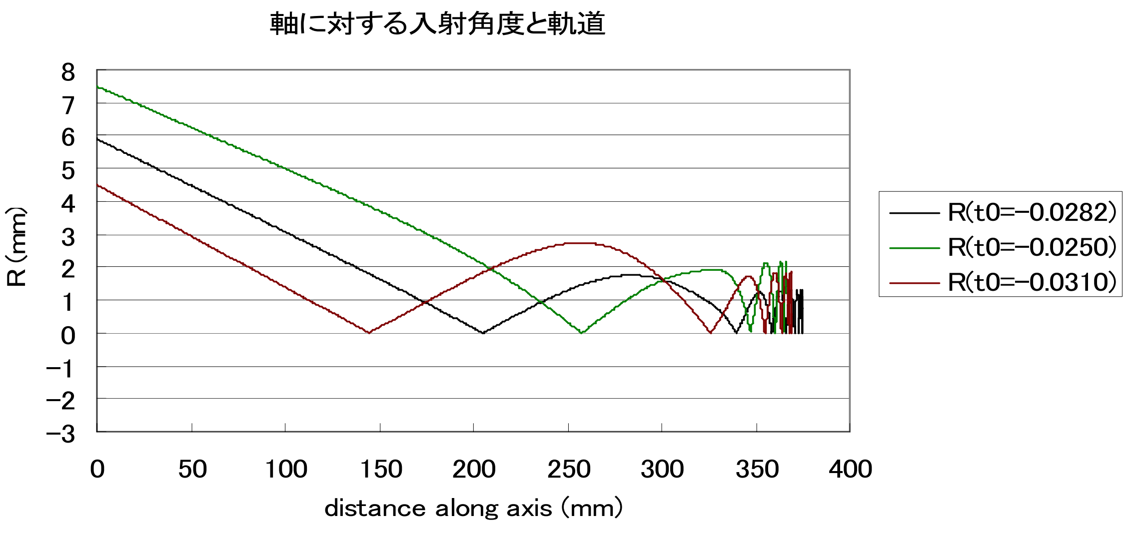

図 4.1.　z_0 = 20 で入射角度を変化させた場合の r 座標

入射角度（の正接）の値は図中の凡例参照。

かるが、図 4.1 はこれを再確認しているに過ぎない。図 3.2 からは、z_V = 329.5 は最適電極位

置よりおよそ 10 mm程度上流にあることが推定できる。入射角度の変更によって逆にr-nodeをこの程度上流に動かせばz_V = 329.5 は最適位置となるであろう。実際、より細かに入射角度を変えて計算してみると、ECR源内到達距離を最大にする入射角度はt_0 ~ -0.0285 であることが分かる。この値とt_0 = -0.0282 との差は、r-nodeを 10 mm程度を上流に動かすことと矛盾しない。

５．初期座標r_0の影響（r-nodeを固定）

以上の考察から、r-nodeを固定したままで初期座標r_0を変化させて粒子軌道の変化を調べることとする。r-nodeを固定するとは、$-r_0/t_0$ = 710 mmを保つようにr_0と共にt_0も同時に変化させることを意味する。角運動量はこれまで同様L_0 = 0 のままである。

図 5.1.にr_0 = 20, 15, 10 mmの 3 つの場合について粒子軌道のr座標を示す。r_0 = 20, 15 mmの場合には、粒子軌道は途中（z = 375.2 及び 382.4 mm）で反転し、r_0 = 10 mmの場合には粒子はECR源プラズマ領域に進入していることが分かる。

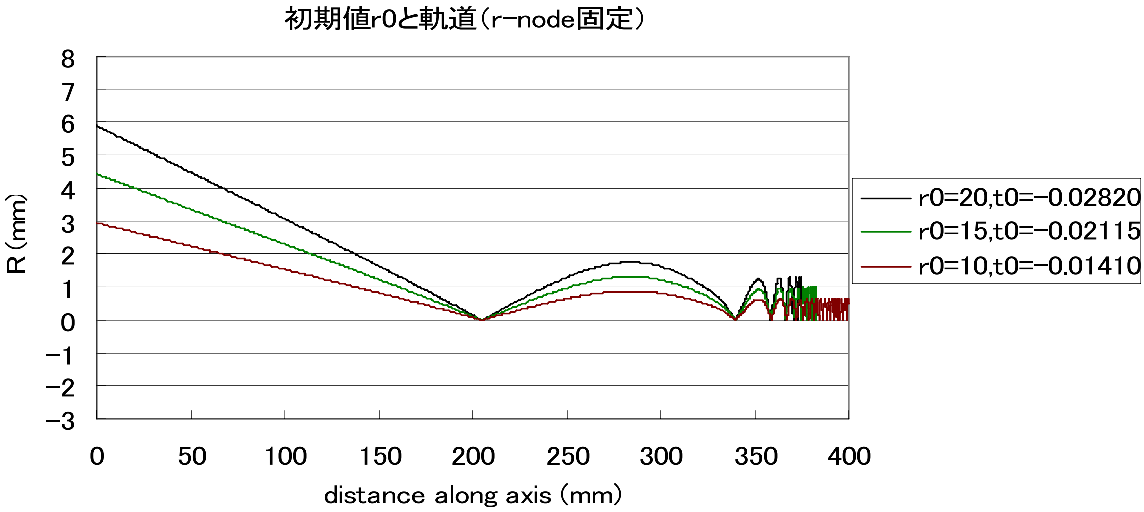

図 5.1.　r-nodeを固定しながら、r_0を変化させた場合の r 座標

r_0，t_0値については図中の凡例参照。

以降では、粒子がプラズマ領域に入射したと判断する基準として、$z_r \geq 385$ となること（即ち、粒子がプラズマ中心から 170 mm以内に到達すること）を採用する。この判定基準によって、プラズマ領域入射の限界r_0値を求めるとr_0 ~ 14 mmが得られる。入射ビームの最大r_0値を~24 mm（一様分布）と仮定すると、L = 0 ならば、透過率は ~$(14/24)^2$ ~ 34 %と言うことになる。

６．角運動量の影響と制御

6.1.　角運動量の影響

式(A1.1')－(A1.3')から、軌道はrの小さいところで角運動量lに敏感に影響されることが予

想される。そこで、$r_0 = 20$ mm, $t_0 = -0.0282$（$-r_0/t_0 = 710$）の場合について、規格化角運動量L_0を変化させて軌道を計算した例を図 6.1 に示す。$L_0 = 0.05$ mmの粒子はプラズマ領域に到達しているが$L_0 = 0$, 0.1 mmの場合には粒子軌道は反転している。入射ビームに予想される角運動量は$L_0 = \pm 0.1$mm程度の幅を持つことが予想され、前節で反射された$r_0 = 20$ mmの粒子でも、L_0によってはプラズマ領域に到達するものもあることが分かる。

そこで、いくつかのr_0の値ごとに、プラズマ領域に粒子が到達するL_0の上限値$L_>$と下限値$L_<$を求め、それらをプロットしたものが図 6.2 である。図の黒線（$L_>$）と緑線（$L_<$）の間に入るL_0値を持つ粒子がECR源内のプラズマ領域に到達することとなる。

図 6.2 では縦軸をL_0としたが、縦軸を$L_0/r_0 \equiv t_{v0}$としたのが図 6.3 である。t_{v0}は相対的なφ-方向速度成分である。$L_>$及び$L_<$に対応するt_{v0}を図 6.3 ではそれぞれ$t_{v>}$, $t_{v<}$とした。興

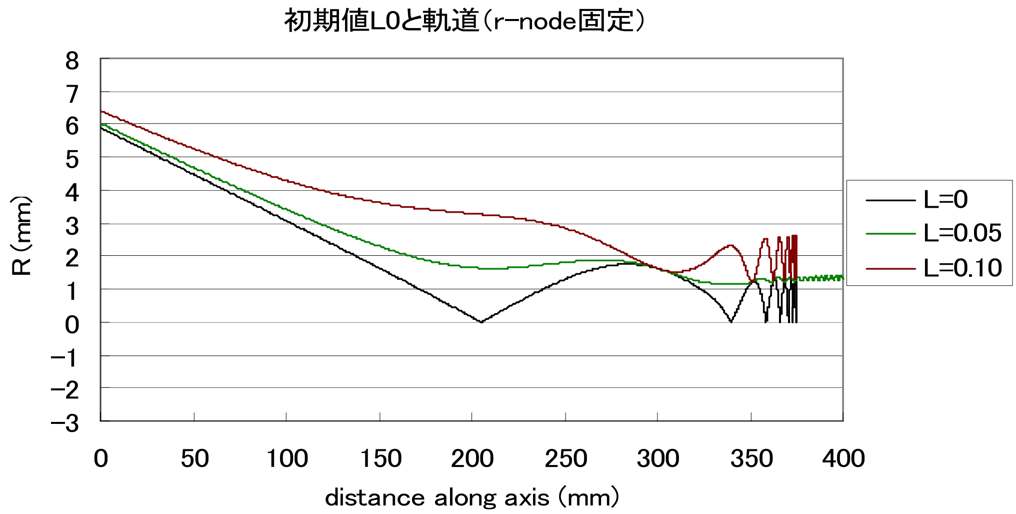

図 6.1.　$r_0 = 20$mm,　$t_0 = -0.0282$ とし、規格化運動量（単位mm）を変化させた場合の r 座標

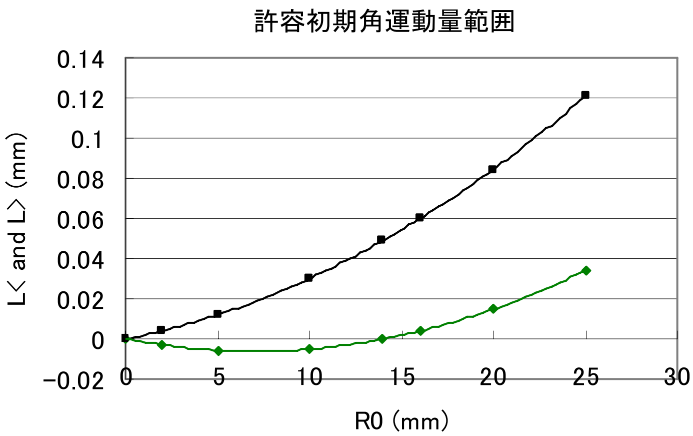

図 6.2.　減速領域を通過するために許容されるL_0の上限値$L_>$（黒）と下限値$L_<$（緑）

全ての計算で$r_0/t_o = 709$ としてr-nodeを固定している。

味深いことに（当たり前のこと？）、$t_{v>}$, $t_{v<}$はr_0の変化に対して、互いに平行に直線的に変

化する。

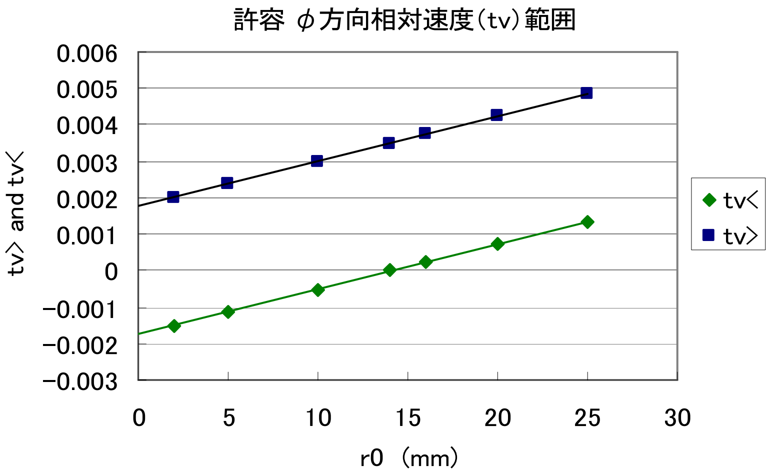

図 6.3. 図 6.2 の縦軸ををφ-方向相対速度に換算したもの。換算式は$t_{v0}=L_0$ / r_0であり、$L_0=L_>$, $L_<$に応じて$t_{v0}=t_{v>}$, $t_{v<}$と表記した。許容幅は$t_{v>}-t_{v<}$ = 0.0036 である。

6.2. 角運動量L_0の制御

入射粒子の軌道初期値は、できるだけ図 6.2, 6.3 の黒線と緑線の間に納まるように調整できることが望まれるのは言うまでもない。そのような調整は、ビーム中心軸とECR源の中心軸を一致させないことで実現できる可能性がある。上流輸送系の検討[1]では、直交座標系(x, y, z)が用いられている（以下、ビーム座標系という）。ビーム座標系での座標変数から、(A7)式を用いてr_0, L_0（以下、ECR座標系）に変換することができる。ここで、ECR源の軸をZ軸とする直角座標系(X, Y, Z)を考え（以下、ECR座標系）、ビーム座標系と原点がX-Y面上で(x_0, y_0)だけずれ、z軸とZ軸はX-Z面内、Y-Z面内で角度α及び βだけ傾いているとする。$x_0, y_0,$ α及び βはいずれも小さい量とすれば、

$$\begin{aligned} X &= x + x_0, \quad X' = x' + \alpha, \\ Y &= y + y_0, \quad Y' = y' + \beta \end{aligned} \tag{6.1}$$

となり、 ECR源の座標系で見る角運動量L_0は、ビーム座標系での角運動量Lと次の関係で結ばれることになる。

$$L_0 = L + (x\beta - \alpha y) + (x_0 y' - x' y_0) + (x_0 \beta - \alpha y_0) \tag{6.2}$$

この第 2, 3 項は 0 の回りに分布するものであり、第 4 項は分布中心の移動を示している。これにより、L_0を望む領域に分布させることも不可能ではない。ただし、第 2, 3 項の存在は本来のLの分布幅を広げる効果を持つことに注意が必要である。即ち、L_0を収めたい領域以上に分布幅が広がらないように注意しなければならない。

7. 透過率の実際

7.1. 入射粒子軌道座標の初期値

表面電離器から上流輸送系出口までの輸送行列を用いて、ECR 源入射粒子の初期座標を計算することが出来る。文献[1]の表 8.1 を上流輸送系の輸送行列として採用することとし、その行列要素を表 7.1 に転載する。表面電離器における個々の Li イオンについて、軌道座

標初期値 x, θ, y, φ は、それぞれ± 12 mm, ± 25 mr, ± 8 mm, ±25 mr の範囲に一様に分布するものとする。

表 7.1.　表面電離器から輸送系出口までの輸送行列（単位：mm, rad）

	x	θ		y	φ
x	-0.750	-111.0	y	2.917	-24.0
θ	0.001057	-0.200	φ	-0.004108	0.125

ECR源への透過率を算出するためには、一様乱数によって表面電離器での座標初期値を決定し、その個々の場合について透過の可否を検討する。このため、座標初期値は、上記輸送行列及び(A7)式を用いて輸送系出口（ECR源系入口，ECR座標 z = -500 mm）でECR座標 r_0, t_0, t_{v0} に換算する。こうして求めたECR座標系での軌道初期値の（輸送系出口もしくはECR系入口での）分布を、図 7.1，7.2，7.3 に t_0-r_0, $t_{v0}-r_0$ 面上の散布図（scatter plot）として示した。上記輸送行列は、輸送系出口から 710 mmに粒子が収束するよう決定されている。このため、表面電離器での初期値 $\theta = \varphi = 0$ の場合、t_0 と r_0 には $-r_0/t_0 = 710$ の関係が

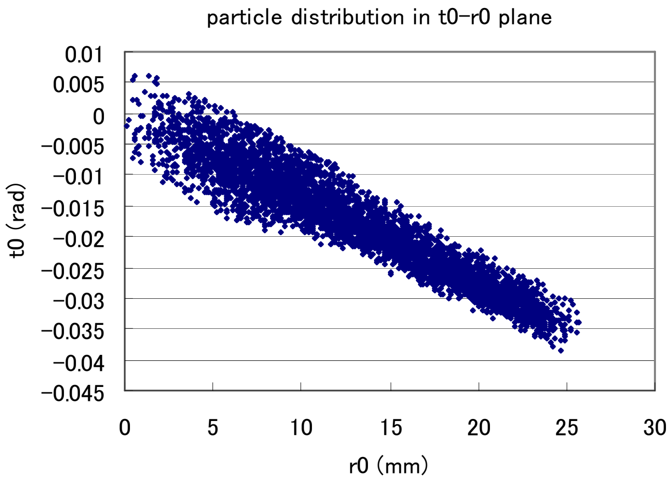

図 7.1.　入射粒子のECR源入り口における t_0-r_0 平面内の分布.

表面電離器における初期座標は x = ±12 mm, θ = ±25 mr, y = ±8 mr, φ = ±25 mr の範囲で一様とした。

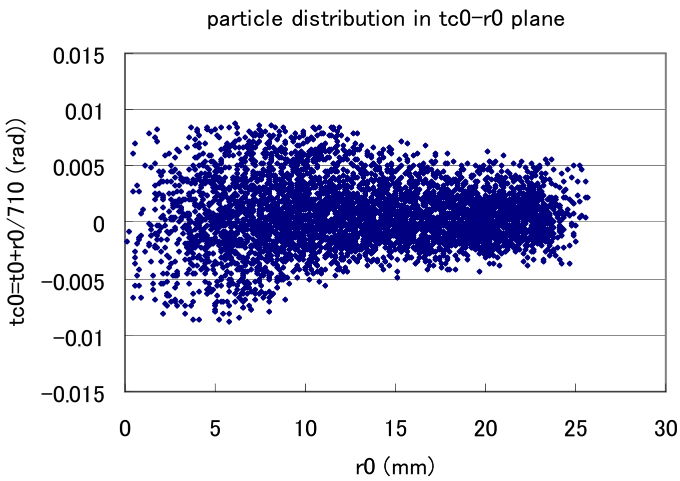

図 7.2.　入射粒子のECR源入り口における $t_{c0}-r_0$ 平面内の分布.

図 7.1 の縦軸を $t_{c0} = t_0 + r_0/710$ に従って t_{c0} に変換したもの

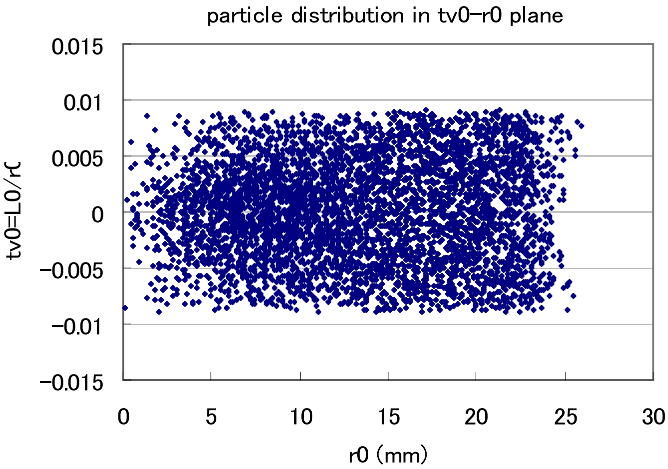

図 7.3.　入射粒子のECR源入り口における$t_{v0}-r_0$平面内の分布.

表面電離器における初期条件は図7.1，7.2 に同じ。

ある。図 7.2 はこの関係を補正して見やすくしたものである。即ち、図 7.1 の縦軸を$t_{c0} = t_0 + r_0/710$ に従ってt_{c0}に変換している。

これらの図から、入射初期条件の分布範囲は前節までの検討に照らして、かなり広いと言えるものであることが分かる。特に図 7.3 の$t_{v0} = L_0/ r_0$の分布幅は、図 6.3 に示した許容範囲よりも著しく大きい。これだけ大きい分布幅を持つ場合には、6.2 節に述べた入射制御の効果も疑問視されるところである。

7.2.　透過率の推定

上記の ECR 入射初期座標の各々の場合について 2 節に述べた方法で粒子軌道を追跡し、粒子が $z \geq 385$ mm に達することを判定条件として、透過率を調べた。個々の条件下で、検討したケースの総数はいずれも 5000 である。この検討で透過と判定された粒子について、図 7.2，7.3 と同様の分布図を描いたものが図 7.4，7.5 である。この時、透過率は約 12 %であった。

図 7.4 から、粒子の透過のためには、上流輸送系の出口で角度t_{c0}の分布幅は±1.6 mr以下の程度が要請されることが分かる。また、図 7.5 に見る$t_{v0} = L_0/r_0$の上下限は図 6.3 の$t_{v>}$，$t_{v<}$

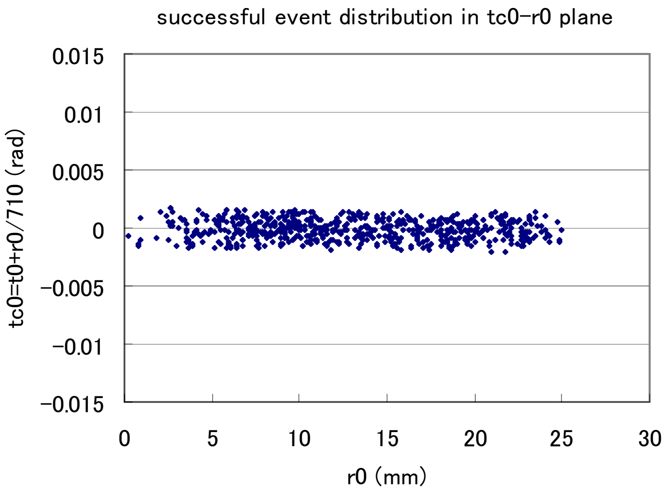

図 7.4.　“透過”と判定される粒子のt_{c0}-r_0面内の分布。

表面電離器における初期条件は図 7.1−7.3 に同じである。

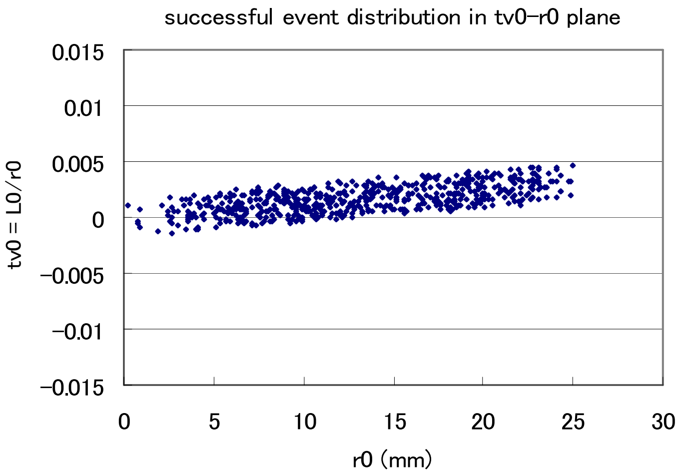

図 7.5.　“透過”と判定される粒子のt_{v0}-r_0面内の分布。
表面電離器における初期条件は図 7.1−7.3 に同じである。

に良く一致している。そして図 7.3 と 7.5 を比較すると、透過率を約 12 %までに低下させる最大の要因は、入射粒子の$t_{v0} = L_0/r_0$の分布の広さ（図 7.3）にあることが推定される。

以上の観測からは、Li^+ビームをプラズマ領域に入射させるためには次の入射条件が必要であると結論できる。

(1) 輸送系は、Li^+ビームが出口から 710 mmの位置に収束するように制御する。

(2) 個々の粒子の軌道傾き角度には、輸送系出口で上記収束のためにつけるべき角度を中心として、±0.016 rad 程度のばらつきが許容される。これは *r*-方向の相対速度成分に対するばらつきの許容範囲と言っても良い。

(3) φ-方向の相対速度成分の許容範囲の幅は±0.018 であり、その中心値は $0.000124r_0$の形でr_0の関数である。

(4) なお、(2), (3)を総合すれば、磁場の無い場合の Li ビームの収束点では、ビーム幅はおよそ 3 mm ϕ 以下の程度に制御されなければならないことになる。

7.2.　透過率の改善

ECR減速領域での粒子透過率を改善するのに最も有効な方法は、入射粒子の角運動量L_0の分布幅を縮小することであるのは 7.1, 7.2 節の議論から明らかであろう。それには、表面電離器における初期座標の分布幅を小さくすることが必要である。

表面電離器初期座標には、x, θ, y, φ があるが、Li の原子ビーム幅に制約を与えないためには、x, y の分布幅を減少させるのは当面避けるべきであろう。従ってイオン引き出し電極の工夫によって達成できそうな、θ, φ の減少による透過率の変化を考慮してみる。

図 7.6 は角度幅$\triangle\theta$, $\triangle\varphi$を、$\triangle\theta = \triangle\varphi$の条件下に変化させて透過率を計算した結果である。ECR源入口（輸送系出口）でのt_{v0}, t_{co}の分布幅は、この角度幅変化において、ほぼ初期角度幅に比例して変化する。しかし、図 6.2 の角運動量の許容範囲はかなり厳しい制約であり、$\triangle\theta = \triangle\varphi = 10$ mrでt_{v0}分布の上限がようやく$t_{v>}$程度になるほどである。参考までに$\triangle\theta = \triangle\varphi = 10$ mrの場合のt_{v0}-r_0面上の入射粒子分布及び透過粒子分布を図 7.7 に示しておく。

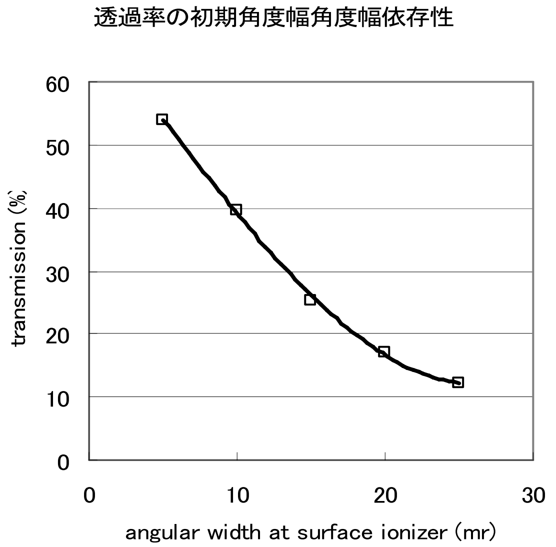

図 7.6　ECR 源減速領域透過率の表面電離器におけるビーム角度幅への依存性
　横軸はビーム角度幅$\triangle\theta$ = $\triangle\varphi$ (mr)であり、各点は 5,000 events の集計である。

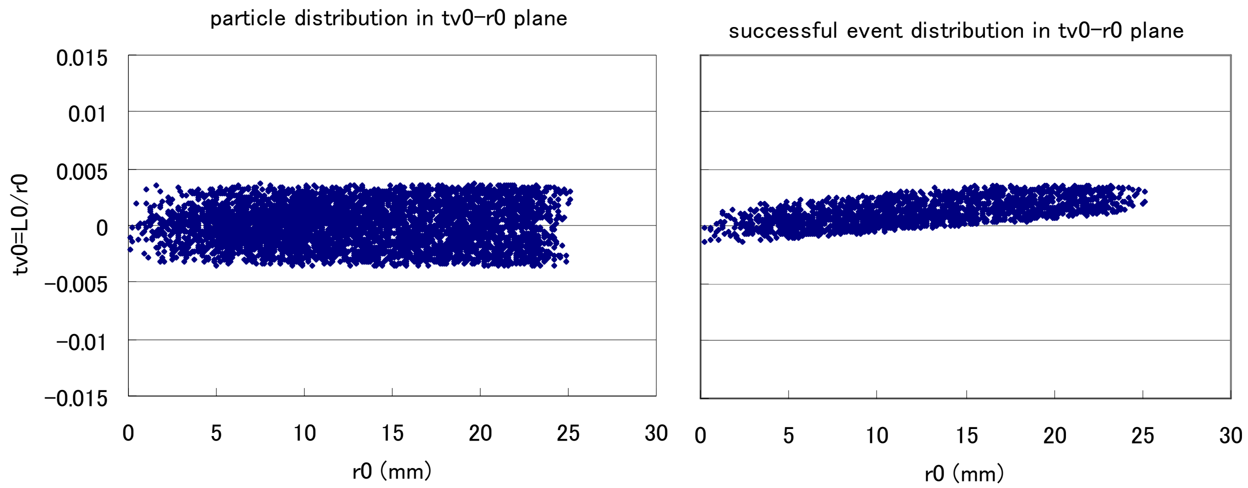

図 7.7.　$\triangle\theta = \triangle\varphi = 10$ mrの場合の、L_0-r_0面上のECR源入射粒子分布（左）及び透過粒子分布（右）

このようにt_{v0}（L_0）分布幅が広い場合には、6.2 節で述べた透過率向上策は残念ながら有効に機能しないようである。若干の試みの計算によれば、t_{v0} (L_0)分布の中心を適当に移動させるに必要なビーム座標軸とECR座標軸のずれは、t_{c0}, t_{v0} (L_0)の分布幅を過剰に拡大し、結果的に透過率の向上につながらないことが認められた。従って、表面電離器におけるビームの角度幅を低減することだけが当面の透過率を改善する方法とも言える。6.2 節の方法は$\triangle\theta$, $\triangle\varphi$が無視し得る程小さくなった場合には適用可能となると考えられる。

８．未検討項目

上記の検討では、磁場の最大強度を 3 Tとしている。$L = 0$ に対するr-nodeの位置は磁場強

度に依存する。このため、磁場強度を変更すると、減速場の最適位置もまた変わることが予想される。減速場の位置をその都度変更することは実際的でないから、磁場強度の変更に対応するためには、2 段減速方式を積極的に考慮すべきであろう。即ち、1 段目の減速で、下流のr-node位置を調節し、2 段目の減速領域と整合させる方法が有効かも知れない。2 段目減速場の場所は、民井案に固定するのも一法である。それに対し、最適な 1 段目減速位置と減速比率を検討する必要がる。また、許容t_{v0} (L_0)範囲もまた磁場の関数であろう。この磁場依存性は上記の検討から必ずしも予測ができる訳ではない。減速場の最適位置を決定した後、再び上記と同様の検討を行う必要がある。

このような検討課題はなお多いが、それに先だって、上記検討に現れた透過率が、偏極 Li イオンの生成強度から見て、大きいとするか小さいとするかの判断が重要である。表面電離器、輸送系の具体的な製作可能性を考慮する、Li イオンを ECR 源に入射させる場合、実現可能な透過率は最大磁場 3 T でせいぜい 30-40 %の程度ではないかと推測する。もしこの値が小さいとすれば、Li イオンの輸送を断念し、早急に Li 原子ビームの ECR 源への入射を早急に検討すべきであろう。

文献

[1] S. Morinobu, 表面電離器からの ECR イオン源への Li イオンの輸送, May, 2005

付録

A. 軸対称電磁場中での荷電粒子の運動

A1. 運動方程式

対称軸を z-軸とする円筒座標系 (r, φ, z) を考える。磁場としては coil field を考えることとし、$B_\varphi = 0$ とする。電荷 e, 質量 m の粒子の運動方程式は次のように与えられる。

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{eB_z}{m} r\dot{\varphi} + \frac{eE_r}{m} \tag{A1.1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{e}{m}(B_r\dot{z} - B_z\dot{r}) \tag{A1.2}$$

$$\ddot{z} = -\frac{eB_r}{m} r\dot{\varphi} + \frac{eE_z}{m} \tag{A1.3}$$

これらの式と独立ではないが、エネルギー保存の式

$$\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2 = \frac{2}{m}(T_0 + e\Phi) \tag{A1.4}$$

も成り立つ。T_0, Φ は初期エネルギー、静電ポテンシアルである。

A2. 軸上磁場、軸上静電ポテンシアルによる場の表現

z-軸（対称軸）上の磁場をB, 軸上静電ポテンシアルをϕとすると、任意の点での磁場、電場は次のように与えられる。B_φ, E_φは対称性から 0 とする。

$$B_r(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{(n+1)!n!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} B^{(2n+1)}(z) \tag{A2.1}$$

$$B_z(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^{n}}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} B^{(2n)}(z) \tag{A2.2}$$

$$E_r(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^{n+1}}{(n+1)!n!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} \phi^{(2n+2)}(z) \tag{A2.3}$$

$$E_z(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \phi^{(2n+1)}(z) \tag{A2.4}$$

A3.　運動方程式の書き直し

軌道を表す変数 φ の代わりに、$l=r^2\dot{\varphi}$ を用いることにし、これを軸の周りの角運動量と名付ける。運動方程式は次のように書き換えられる。

$$\ddot{r}=\frac{l^2}{r^3}+\frac{eB_z}{m}\frac{l}{r}+\frac{eE_r}{m} \tag{A1.1'}$$

$$\dot{l}=\frac{e}{m}(B_r r\dot{z}-B_z r\dot{r}) \tag{A1.2'}$$

$$\ddot{z}=-\frac{eB_r}{m}\frac{l}{r}+\frac{eE_z}{m} \tag{A1.3'}$$

$$\dot{r}^2+\left(\frac{l}{r}\right)^2+\dot{z}^2=\frac{2}{m}(T_0+e\Phi) \tag{A1.4'}$$

さらに、場の展開式(A2.1) – (A2.4) 1 次までの展開を用いると、(A1.1) – (A1.3)は

$$\ddot{r}=\frac{l^2}{r^3}+\frac{eB}{m}\frac{l}{r}-\frac{e\phi''}{2m}r \tag{A1.1''}$$

$$\dot{l}=-\frac{e}{m}\left(\frac{B'}{2}r^2\dot{z}+Br\dot{r}\right) \tag{A1.2''}$$

$$\ddot{z}=\frac{e}{m}\left(\frac{B'}{2}l+\phi'\right) \tag{A1.3''}$$

となる。(A1.2)式から、磁場が存在しない場合には l は保存されることが分かる。磁場の存在する ECR の入射部では、(A1.2")式の括弧内第 1 項は正であるが、第 2 項は初めのうちは負、磁場に粒子軌道が巻き付き始めると正、負に符号を変化させる。加減速電場がない場合には(A1.2")式は積分可能である。

A4.　近軸光線近似による表現

運動方程式から時間を消去して軌道の方程式とし、z による微分をダッシュ($'$)で表して、r, r' が小さいとして r, r'の 1 次までの量を残すと、

$$r''=\frac{L^2}{r^3}+\frac{eB}{\sqrt{2m(T_0+e\phi)}}\frac{L}{r}-\frac{e}{2(T_0+e\phi)}\left(\frac{1}{2}\phi''r+\phi'r'\right) \tag{A3.1}$$

$$L'=-\frac{e}{\sqrt{2m(T_0+e\phi)}}\left(\frac{1}{2}rB'+r'B\right)-\frac{e\phi'}{2(T_0+e\phi)}L \tag{A3.2}$$

となる。ただし、L と l とは以下の関係にある。L を規格化角運動量と名付けておく。

$$L=r^2\varphi'=\frac{l}{v_z}\approx\frac{l}{v} \tag{A4}$$

Lはその初期値をL_0とすると、電場、磁場のどちらか一方のみの場合は簡単に表せて、

a)電場のみの場合 $$L = L_0\sqrt{\frac{T_0}{T_0 + e\phi}} \tag{A5}$$

b)磁場のみの場合 $$L = -\frac{e}{2mv}r^2 B + L_0 = -\frac{r^2}{2\rho} + L_0 \tag{A6}$$

即ち、減速電場中では L は粒子エネルギーの平方根に逆比例して増大し、磁場のみの場合は、$B > 0 \quad (< 0)$ なら磁場強度増大とともに減少（増大）する。

なお、円筒座標系 (r, φ, z) の代わりに直角座標系 (x, y, z) を用いた場合には、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad t = r' = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad L = r^2\varphi' = xy' - x'y \tag{A7}$$

である。