${}^2\mathrm{H}({}^6\mathrm{Li},\alpha){}^4\mathrm{He}$ 反応

以下の点で低エネルギー ^{6}Li の偏極分析反応に適している。

1. 大きい Q 値 22.372 MeV (出射 α は 11 MeV)
2. $A_{yy}[{}^6\mathrm{Li}(\vec{d},\alpha){}^4\mathrm{He}] = A_{yy}[{}^2\mathrm{H}({}^6\vec{\mathrm{Li}},\alpha){}^4\mathrm{He}]$ より、偏極分解能の一部が既知

$A(a,b)B$ 型反応に対する鏡映不変性の制限 (ただし量子化軸はビーム方向)

$$\begin{aligned}\langle I_b M_b I_B M_B|\mathcal{T}|I_a M_a I_A M_A\rangle &= (-)^{I_a-M_a+I_A-M_A+I_b-M_b+I_B-M_B}\pi_a\pi_A\pi_b\pi_B \\ &\quad \times\langle I_b\,-M_b\,I_B\,-M_B|\mathcal{T}|I_a\,-M_a\,I_A\,-M_A\rangle\end{aligned}$$

を使うと、$1^+ + 1^+ \to 0^+ + 0^+$ 型反応の $\mathcal{T}$ 行列要素の独立な成分は

$$\begin{array}{lclcl}\langle 0\,0|\mathcal{T}|{+1}\,{+1}\rangle &=& \langle 0\,0|\mathcal{T}|{-1}\,{-1}\rangle &=& A \\ \langle 0\,0|\mathcal{T}|\;\;0\,{+1}\rangle &=& -\langle 0\,0|\mathcal{T}|\;\;0\,{-1}\rangle &=& B \\ \langle 0\,0|\mathcal{T}|{-1}\,{+1}\rangle &=& \langle 0\,0|\mathcal{T}|{+1}\,{-1}\rangle &=& C \\ \langle 0\,0|\mathcal{T}|{+1}\;\;0\rangle &=& -\langle 0\,0|\mathcal{T}|{-1}\;\;0\rangle &=& D \\ \langle 0\,0|\mathcal{T}|\;\;0\;\;0\rangle && &=& E\end{array}$$

の 5 つとなるので、

$$\begin{aligned}\sigma A_{yy}[{}^2\mathrm{H}({}^6\vec{\mathrm{Li}},\alpha){}^4\mathrm{He}] &= \mathrm{trace}(\mathcal{T}^\dagger\mathcal{P}^{{}^6\mathrm{Li}}_{yy}\mathcal{T}) \\ &= \mathrm{trace}\left[\begin{pmatrix}A^* & B^* & C^* \\ D^* & E^* & -D^* \\ C^* & -B^* & A^*\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & D & C \\ B & E & -B \\ C & -D & A\end{pmatrix}\right] \\ &= -|A|^2 - 3\Im(AC^*) + 2|B|^2 - |C|^2 + 2|D|^2 + |E|^2 \\ &= \mathrm{trace}\left[\begin{pmatrix}A^* & D^* & C^* \\ B^* & E^* & -B^* \\ C^* & -D^* & A^*\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B & C \\ D & E & -D \\ C & -B & A\end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{trace}(\mathcal{T}^\dagger\mathcal{P}^{d}_{yy}\mathcal{T}) = \sigma A_{yy}[{}^6\mathrm{Li}(\vec{d},\alpha){}^4\mathrm{He}]\end{aligned}$$

A_{xx} (A_{zz}), A_{xz}, A_y で同様の関係は成り立たない ($\mathcal{T}$ は対称行列でない事に注意)。

ちなみに $\theta = 0^\circ$ の場合、ビーム周りの回転不変性 $[\mathcal{T}, J_z] = 0$ から

$$\langle 0\,0|[\mathcal{T}, J_z]|M_a M_A\rangle = 0 - (M_a{+}M_A)\langle 0\,0|\mathcal{T}|M_a M_A\rangle = 0$$

つまり

$$\langle 0\,0|\mathcal{T}|M_a M_A\rangle = 0\ ,\quad \text{if}\quad M_a{+}M_A \neq 0$$

従って

$$A = B = D = 0$$

$$A_{zz}[{}^2\mathrm{H}({}^6\vec{\mathrm{Li}},\alpha){}^4\mathrm{He}](0^\circ) = \frac{2(|C|^2-|E|^2)}{2|C|^2 + |E|^2}$$

という程度には簡単化されるが、特定の値をとる訳ではない。

$^1\mathrm{H}(^7\mathrm{Li},\alpha)^4\mathrm{He}$ 反応

以下の点で低エネルギー $^7\mathrm{Li}$ の偏極分析反応に適している。

1. 大きい Q 値 17.347 MeV (出射 α は 9 MeV)
2. $T_{20}[^1\mathrm{H}(^7\vec{\mathrm{Li}},\alpha)^4\mathrm{He}](0°) \equiv -1$ より、偏極分解能の一部が既知

$A(a,b)B$ 型反応に対する鏡映不変性の制限 (ただし量子化軸はビーム方向)

$$\begin{aligned}\langle I_bM_bI_BM_B|\mathcal{T}|I_aM_aI_AM_A\rangle &= (-)^{I_a-M_a+I_A-M_A+I_b-M_b+I_B-M_B}\pi_a\pi_A\pi_b\pi_B \\ &\quad\times\langle I_b\,-M_b\,I_B\,-M_B|\mathcal{T}|I_a\,-M_a\,I_A\,-M_A\rangle\end{aligned}$$

を使うと、$\frac{3}{2}^- + \frac{1}{2}^+ \to 0^+ + 0^+$ 型反応の $\mathcal{T}$ 行列要素の独立な成分は

$$\begin{aligned}\langle 0\,0|\mathcal{T}|+\tfrac{3}{2}\,+\tfrac{1}{2}\rangle &= -\langle 0\,0|\mathcal{T}|-\tfrac{3}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = A \\ \langle 0\,0|\mathcal{T}|+\tfrac{1}{2}\,+\tfrac{1}{2}\rangle &= \langle 0\,0|\mathcal{T}|-\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = B \\ \langle 0\,0|\mathcal{T}|-\tfrac{1}{2}\,+\tfrac{1}{2}\rangle &= \langle 0\,0|\mathcal{T}|+\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = C \\ \langle 0\,0|\mathcal{T}|-\tfrac{3}{2}\,+\tfrac{1}{2}\rangle &= -\langle 0\,0|\mathcal{T}|+\tfrac{3}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle = D\end{aligned}$$

の 4 つとなるので、

$$\begin{aligned}T_{20}[^1\mathrm{H}(^7\vec{\mathrm{Li}},\alpha)^4\mathrm{He}] &= \mathrm{trace}(\mathcal{T}^\dagger\tau_{20}^{^7\mathrm{Li}}\mathcal{T})\Big/\mathrm{trace}(\mathcal{T}^\dagger\mathcal{T}) \\ &= \mathrm{trace}\left[\begin{pmatrix} A^* & B^* & C^* & D^* \\ -D^* & C^* & B^* & -A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&-D\\B&C\\C&B\\D&-A\end{pmatrix}\right] \\ &\quad\Big/\mathrm{trace}\left[\begin{pmatrix} A^* & B^* & C^* & D^* \\ -D^* & C^* & B^* & -A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&-D\\B&C\\C&B\\D&-A\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{|A|^2-|B|^2-|C|^2-|D|^2}{|A|^2+|B|^2+|C|^2+|D|^2}\end{aligned}$$

更に $\theta=0°$ の場合、ビーム周りの回転不変性 $[\mathcal{T},J_z]=0$ から

$$\langle 0\,0|[\mathcal{T},J_z]|M_aM_A\rangle = 0-(M_a+M_A)\langle 0\,0|\mathcal{T}|M_aM_A\rangle = 0$$

つまり

$$\langle 0\,0|\mathcal{T}|M_aM_A\rangle = 0\ ,\quad \text{if}\quad M_a+M_A\neq 0$$

従って

$$A=B=D=0$$

から

$$T_{20}[^1\mathrm{H}(^7\vec{\mathrm{Li}},\alpha)^4\mathrm{He}](0°)\equiv -1$$

という一定値となる。