

# Wien Filter revisited

2004/9/7 森信

2006/12/5 修正、加筆

## 1. 前提

電磁場は“対称面”(median plane)を持ち、この面に関して対称な2点で、

(a)磁場ベクトルは他方の向きを反転すれば、互いに鏡映の関係にある。

(b)電場ベクトルはそのままで互いに鏡映の関係にある。

また、median plane 上で

(a')磁場ベクトルは面に垂直である。

(b')電場ベクトルは面に平行である。

## 2. 座標

median plane 上に基準粒子軌道を取り、基準粒子軌道上に原点、median plane 内で軌道接線方向に  $z$ -軸、 $z$ -軸と median plane に垂直な方向に  $y$ -軸、また、右手系を形成するように median plane 内に  $x$ -軸を持つ、局所的な直角座標系を考える(直交曲線座標)。また、基準粒子軌道に沿う距離を  $t$  で表す。粒子座標  $x$ ,  $y$  は基準軌道からの変位に対応する。

## 3. 場の展開係数

median plane 上で電磁場を Taylor 展開する。

$$\begin{aligned} E_x &= E_0(1 + \lambda_1 hx + \lambda_2 h^2 x^2 + \dots), \\ B_y &= B_0(1 + \mu_1 hx + \mu_2 h^2 x^2 + \dots). \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $h$ は基準粒子軌道の曲率であり、曲率半径を  $\rho$  とすれば  $|h| = 1/\rho$  である。なお、基準軌道の曲率への電場、磁場の寄与をそれぞれ  $h_E$ ,  $h_M$  とし、粒子の電荷、運動エネルギーおよび静電ポテンシャルを  $q$ ,  $T$ ,  $\phi$  で表し、基準軌道、基準粒子に関する量を添え字  $0$  をつけて示すことにすると、

$$\begin{aligned} h &= h_E + h_M, \\ h_E &= -\frac{qE_0}{m_0 v_0^2} = -\frac{qE_0}{2(T_0 + q\phi_0)}, \\ h_M &= \frac{qB_0}{m_0 v_0} = \frac{qB_0}{\sqrt{2m_0(T_0 + q\phi_0)}}. \end{aligned} \quad (2)$$

## 4. 軌道の微分方程式

$t$ による微分を'で表わし、基準粒子から質量、エネルギーの fractional な変位をそれぞれ  $\gamma$ ,  $\delta$  で表すと、任意の粒子軌道の1次の微分方程式は次のようになる。

$$x'' - \frac{\phi_0'}{E_0} h_E x' + k_x x = \frac{1}{2} (h - h_E) \gamma + \frac{1}{2} (h + h_E) \frac{T_0}{T_0 + q\phi_0} \delta + \dots, \quad (3.0)$$

$$y'' - \frac{\phi_0'}{E_0} h_E y' + k_y y = 0 + \dots,$$

$$k_x = h(\lambda_1 h_E + \mu_1 h_M) + h(h + h_E) + h_E^2, \quad (3.1)$$

$$k_y = -h(\lambda_1 h_E + \mu_1 h_M) - h h_E - \frac{\phi_0''}{E_0} h_E.$$

ここに、 $h, \lambda, \mu, \phi_0$  等は一般に  $t$  の関数である。(3.0)式左辺第2項は基準軌道に沿って加速される場合に加速による軌道の傾きの変化を示し、第3項は、電磁場の軌道偏向作用の結果として現れる収束作用を示す。(3.1)式  $k_y$  の右辺末尾の項は、加速電場の等電位線の曲がりによって発生する収束力を示し、アインツェルレンズで主役をなす項である。一般に基準軌道を等電位面内にとるとすれば、

$$\phi_0 = \phi_0' = \phi_0'' = 0 \quad (4)$$

である。また、共通の加速電圧で加速された単一種の粒子を扱う場合には、 $\gamma = \delta = 0$  として良い。

## 5. 直線型 Wien Filter

Wien Filter では（必然ではないが）中心軌道を直線にするために、

$$h = h_E + h_M = 0 \quad (5)$$

とする。(3.1)式で  $\lambda_1 h = \lambda, \mu_1 h = \mu$  を有限に保ちながら、 $h \rightarrow 0$  の極限を取り、(4)式を考慮すると、

$$k_x = (\lambda h_E + \mu h_M) + h_E^2 = h_E (h_E + \lambda - \mu) = h_M (h_M + \mu - \lambda), \quad (6)$$

$$k_y = -(\lambda h_E + \mu h_M) = -h_E (\lambda - \mu) = h_M (\lambda - \mu)$$

である。 $\lambda, \mu$  はそれぞれ median plane 上での電場勾配、磁場勾配で、次式で与えられる。

$$\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \lambda_1 h = \frac{1}{E_0} \left. \frac{\partial E_x}{\partial x} \right|_{y=0}, \quad \mu = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_1 h = \frac{1}{B_0} \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{y=0}. \quad (7)$$

1) 一様場では、 $\lambda = \mu = 0$  であり、

$$k_x = h_E^2 = h_M^2, \quad k_y = 0 \quad (8)$$

であるから、収束（発散）効果は  $x$ -方向に存在するが、 $y$ -方向には存在しない。

2) 非一様場では  $x$ -,  $y$ -の両方向に収束（発散）効果を持たせることも可能である。非一様場は磁極に傾きを持たせたり、電極面を曲面にする事などで達成される。特に、

$$h_E = -h_M = -2(\lambda - \mu) \quad (9)$$

が成り立つ時は、 $x$ -,  $y$ -の両方向に同等の収束効果を持つ。しかし、spin回転を目的とするWien Filterでは、 $B_0$ 従って $h_M$ はspin回転角に対する要請で決まるから、特定の電磁場分布を持つ場で任意の粒子に対応することは一般に不可能である。

## 6. Wien Filter の入出口

入出口では、比較的狭い範囲ではあるが、 $E_0, B_0$  (従って $h_E, h_M$ ) は一定値ではない。このため、一般に(5)式は成り立たず、基準粒子軌道の明確な設定が困難であるほか、電磁場の展開においても曲線座標系は不便になるため、入出口の狭い範囲に空間固定の直角座標系を考え、粒子入射方向に $z$ -軸を取る。median plane上で電場、磁場の分布を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} E_x &= E_0(1 + \lambda x + \lambda^{(2)} x^2 + \dots), \\ B_y &= B_0(1 + \mu x + \mu^{(2)} x^2 + \dots). \end{aligned} \quad (10)$$

この場合、粒子軌道の1次の微分方程式は次のようになる。ただし、 $z$ に関する微分を'で表わし、 $\gamma = \delta = 0$ とする。

$$\begin{aligned} x'' - \frac{\phi_0'}{E_0} h_E x' + k_x x &= -(h_E + h_M), \\ y'' - \frac{\phi_0'}{E_0} h_E y' + k_y y &= 0, \end{aligned} \quad (11.0)$$

$$\begin{aligned} k_x &= (\lambda h_E + \mu h_M) + h_E h_M + 2h_E^2, \\ k_y &= -(\lambda h_E + \mu h_M) - \frac{\phi_0''}{E_0} h_E. \end{aligned} \quad (11.1)$$

$\phi_0', \phi_0''$ は $z$ -軸上の電場 $z$ -成分 $E_z$ とその $z$ -方向の変化率であり、 $h_E, h_M, \lambda, \mu$ を含めて $z$ の関数である。Wien Filter内部ではこれらは定数となり、以下では、それらをもう一つの下付添字0を加えて表示する。

## 7. $\lambda = \mu = 0$ の場合の直線型 Wien Filter の transfer matrix

入出口で $z$ -軸上で加速はなく、出入口およびWien Filter内部で $\phi_0' = \phi_0'' = 0$ とおける場合を考える。(11.1)から  $k_x = h_E^2, k_y = 0$  であるから、 $\theta = x'$ の1次近似解は

$$\theta = \theta_0 - x_0 \int_{z_a}^z h_E^2 dz - \int_{z_a}^z (h_E + h_M) dz$$

で与えられる。直線型Wien Filterでは内部の一様場領域では第3項の被積分関数を0と置くのが適当である。また、入出口で $h_E, h_M, \lambda, \mu$ が変化する範囲を $(z_a, z_b)$ とし、実効的な場の境界を $z = 0$ とする。即ち

$$\begin{aligned} \int_{z_a}^{z_b} (h_E + h_M) dz &= 0, \\ \int_{z_a}^{z_b} h_E dz &= h_{E0} z_b, \quad \int_{z_a}^{z_b} h_M dz = h_{M0} z_b \end{aligned} \quad (12)$$

である。

任意の粒子軌道の座標を中心軌道に対する相対変位で表わすこととし、 $x, y, \theta, \varphi$  を改めて相対変位とするよう、式の書き直しを行う。その上で、粒子座標を median plane 内についてベクトル $(x, \theta)$ 、transverse plane 内について $(y, \varphi)$ で表し、その変換行列を考えると、Wien Filter 入口での変換行列は

$$\text{median plane} : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ I & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{transverse plane} : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = -2\left(\int_{z_a}^{z_b} h_E^2 dz - h_{E0}^2 z_b\right) \quad (13)$$

で与えられる。出口での変換行列も $I$ の符号を反転すれば同じ形となる。Wien Filter 内部の一様場（長さ $L$ ）による変換行列は、中心部での $h_E$ の絶対値を $h_{E0}$ で表して、

$$\text{median plane} : \begin{bmatrix} \cos h_{E0}L & \frac{\sin h_{E0}L}{h_{E0}} \\ -h_{E0} \sin h_{E0}L & \cos h_{E0}L \end{bmatrix}, \quad \text{transverse plane} : \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

で与えられ、結局 Wien Filter 全体の 1 次変換行列は

$$\begin{aligned} \text{median plane} & : \begin{bmatrix} \cos h_{E0}L + \frac{I}{h_{E0}} \sin h_{E0}L & \frac{1}{h_{E0}} \sin h_{E0}L \\ -\left(\frac{I^2}{h_{E0}} + h_{E0}\right) \sin h_{E0}L & \cos h_{E0}L - \frac{I}{h_{E0}} \sin h_{E0}L \end{bmatrix}, \\ \text{transverse plane} & : \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。なお、上記においては、 $z_b - z_a \ll x, y$ と同程度に小さいと仮定されていることを付記しておく。（即ち、 $\Delta z / L = |z_b - z_a| / L \ll 1$ と仮定されている。）

## 8. 直線型 Wien Filter における中心軌道

上記の計算では、Wien Filter の入出口領域と内部領域のそれぞれで中心軌道の偏向角を 0 にすることとした ((12)式)。しかし、直線型 Wien Filter では、系全体で偏向角を 0 にする方がむしろ实际的であろう。その場合、入出口では一般に(12)の第 1 式は成り立たないことが予想される。このため、中心軌道は入出口領域で幾何学的中心軸（以下、幾何学軸）に対して有限の角度を持つことが予想され、一様場領域で $h_{E0}$ と $h_{M0}$ に違いがあれば更に角度補正を受けるであろう。これによる中心軌道の幾何学軸からの変位について考えておく必要がある。

座標系は 6 節と同じく空間固定の直角座標系とし、 $z$ - 軸を幾何学軸とする。電磁場分布についても(10)式を想定し、簡単のために $\lambda = \mu = 0$ とする。系全体で偏向角が 0 になる条件は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (h_E + h_M) dz = h_{E0}L_E + h_{M0}L_M = 0 \quad (16)$$

である。 $L_E$ および $L_M$ はそれぞれ「有効電極長」および「有効磁極長」で、それらの平均長を $L$ とし、 $\Delta$ を小さな補正量とすれば

$$L_E = (1 - \Delta/2)L, \quad L_M = (1 + \Delta/2)L, \quad h_{E0}/h_{M0} \approx (1 + \Delta) \quad (17)$$

である。微分方程式(11)の $x, x'$ についての1次近似解から、Wien Filter中央での中心軌道の幾何学軸に対する変位 $x_c$ と傾き $x'_c$ を求めると、

$$\begin{aligned} x_c &= \Delta \left[ L \sin \frac{h_{E0}L}{2} + \frac{1}{h_{E0}} \left( \cos \frac{h_{E0}L}{2} - 1 \right) \right], \\ x'_c &= \Delta \left[ h_{E0}L \cos \frac{h_{E0}L}{2} - \sin \frac{h_{E0}L}{2} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

を得る。ただし、 $\Delta$ の2次以上の項は無視した。

この式に見るように、 $\Delta = 0$ 即ち電場有効長と磁場有効長が等しいときには、中心軌道はWien Filterの中央部で幾何学軸に一致する。(中心に関して系が対称なら、系の出口でも中心軌道と幾何学軸は一致する。)

逆に、 $\Delta \neq 0$ の場合には、一般に $x_c$ と $x'_c$ を同時に0にする事は出来ず、そのいずれかを0にするための場の強度は、特定の粒子に対して特定の値に定まる。これはspinの回転制御を目的とするWien Filterでは、(場の強度は必要なspin回転角から決まるため)望ましいことではない。

以上から、常時 $x_c$ と $x'_c$ をWien Filter中央で十分小さく保つためには、 $\Delta = 0$ であることが最も望ましい。即ち、このためには“電磁場の強度や空間分布ではなく”電磁場の“実効長の同一性が基本的”であることに注意を喚起しておきたい。このことは装置の設計上、大切な留意点であるからである。

## 9. 民井軌道数値計算と実効的行列要素

### 9.1. 民井軌道計算

3次元数値計算による電場・磁場分布に基づき、粒子軌道をRunge-Kutta法によって追跡した民井氏の計算[1, 2]がある(以下、民井軌道計算)。この民井軌道計算においては、Wien Filter(有効長 $L \approx 0.35$  m)の前後に同じ長さのdrift space(長さ $L_D$ )を加えた全長1 mの系で、粒子初期座標に対してWien Filter中心での座標と、系の出口での座標が計算されている。場の強度は、 ${}^6\text{Li}$ のspin制御に必要な最大値で、 $q = 3$ ,  $T_0 = 60$  keVの ${}^6\text{Li}$ に対して  $|h_{E0}| = |h_{M0}| = 6.1123 \text{ m}^{-1}$  ( $E_0 = 2.445$  kV/cm,  $B_0 = 1.76$  kG)である(spin回転角度 $100^\circ$ に対応する)。

表 1. 系の中心における軌道座標の初期値依存性(民井軌道計算)

$x_0$ -dependence			$\theta_0$ -dependence			$y_0$ -dependence			$\varphi_0$ -dependence		
$x_i$ (mm)	$x$ (mm)	$\theta$ (mr)	$\theta_i$ (mr)	$x$ (mm)	$\theta$ (mr)	$y_i$ (mm)	$y$ (mm)	$\varphi$ (mr)	$\varphi_i$ (mr)	$y$ (mm)	$\varphi$ (mr)
-20	-13.04	69.581	-20	-6.59	15.138	-20	-19.9	0.522	-20	-10	-20.15
-15	-9.44	55.725	-15	-4.72	12.097	-15	-15	0.193	-15	-7.5	-15.13
-10	-5.93	39.648	-10	-2.9	8.381	-10	-9.99	0.000	-10	-5	-10.09
-5	-2.54	21.112	-5	-1.07	4.382	-5	-5	-0.044	-5	-2.5	-5.048
0	0.72	-0.199	0	0.72	-0.199	0.0	0.0	0.000	0	0.0	0.000
5	3.78	-25.043	5	2.49	-5.4	5	5	0.044	5	2.5	5.048
10	6.62	-53.536	10	4.21	-11.27	10	9.99	0.000	10	5	10.092
15	8.98	-87.321	15	5.9	-17.84	15	14.95	-0.193	15	7.5	15.126
20	10.72	-126.95	20	7.55	-25.16	20	19.89	-0.522	20	10	20.146

表 2. 系の出口における軌道座標の初期値依存性 (民井軌道計算)

$x_0$ -dependence			$\theta_0$ -dependence			$y_0$ -dependence			$\varphi_0$ -dependence		
$x_0$ (mm)	$x$ (mm)	$\theta$ (mr)	$\theta_0$ (mr)	$x$ (mm)	$\theta$ (mr)	$y_0$ (mm)	$y$ (mm)	$\varphi$ (mr)	$\varphi_0$ (mr)	$y$ (mm)	$\varphi$ (mr)
-20			-20	11.44	41.072	-20	-19.54	0.679	-20	-20.00	-19.947
-15	28.92	81.506	-15	8.99	31.423	-15	-14.8	0.375	-15	-15	-15.044
-10	20.32	55.559	-10	6.2	21.314	-10	-9.99	0.011	-10	-10.00	-10.076
-5	10.54	28.301	-5	3.16	10.774	-5	-5.04	-0.086	-5	-5.02	-5.053
0	-0.12	-0.206	0	-0.12	-0.206	0	0.000	0.000	0	0.00	0.000
5	-11.78	-29.8	5	-3.66	-11.567	5	5.04	0.086	5	5.02	5.053
10	-24.52	-60.307	10	-7.5	-23.322	10	9.99	-0.011	10	10.02	10.076
15			15	-11.6	-35.417	15	14.8	-0.375	15	15.01	15.044
20			20	-15.9	-47.812	20	19.54	-0.679	20	19.96	19.947

Wien Filter 中心での軌道座標と出口での軌道座標について、民井軌道計算結果をそれぞれ表 1 及び 2 に掲げる。1 次近似では、median plane 座標と transverse plane 座標は独立であるから、 $y$ -,  $\varphi$ -座標の  $x$ -,  $\theta$ -初期座標への依存性、 $x$ -,  $\theta$ -座標の  $y$ -,  $\varphi$ -初期座標への依存性は割愛した。(事実、 $\theta$ -座標の  $y$ -初期座標依存性に弱い 2 次項の存在が認められる以外には、median, transverse 両面内の座標に顕著な相関は認められなかった。)  $x$ -,  $\theta$ -座標については、その初期値依存性を図 1 にも示しておく。

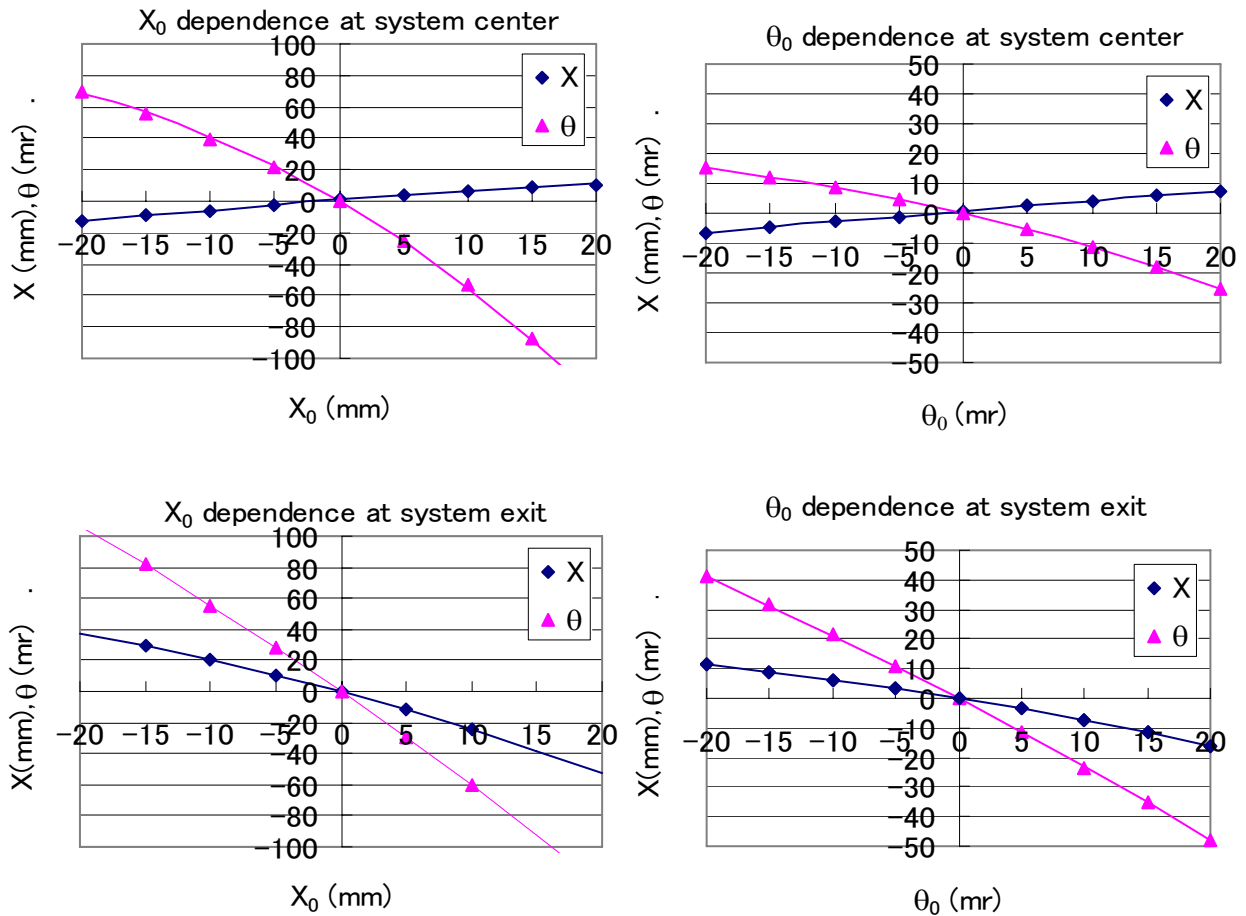


図 1. 民井軌道計算における、系の中心 (上) と系の出口 (下) での  $x$ -,  $\theta$ -座標の初期座標依存性

## 9.2. 民井軌道計算結果と実効的行列要素

計算結果には系の中心、出口の両方の座標に概ね次のような状況が認められる。

- 1)  $x, \theta$ の $x_0$ 依存性には、1次項以外に明らかに2次項の存在が認められるが、その寄与は、 $x_0 = \pm 10 \text{ mm}$ で1次項の10%以下である。
- 2)  $x, \theta$ の $\theta_0$ 依存性にも2次項の存在が認められるが、その寄与は、 $\theta_0 = \pm 10 \text{ mr}$ で1次項の5%以下である
- 3) 中心軌道： $x$ -方向に残る中心軌道の角度変位から、 $h_{E0}L_E$ と $h_{M0}L_M$ は良い一致を見せる（相対的に $1 \times 10^{-4}$ 程度の違い）。
- 4) 民井軌道計算の座標値を初期値の2次関数として fit し（図 1）、その1次項の係数を実効的な1次行列要素とすれば、その値は表3の通りである。ただし、各々の行列の行列式の値は1から若干ずれる。これは、とりもなおさずこうした1次輸送行列による近似の悪さ示すといえるが、本稿ではこれを無視し、表には行列式の値で規格化し直した値を掲げた。規格化前の行列式の値は系前半部の場合 1.10、系全体の場合 1.02 であった。

表 3. 民井計算から推定される実効的1次行列要素

要素	$(x x)$	$(x \theta)$ [m/r]	$(\theta x)$ [r/m]	$(\theta \theta)$
系前半部	0.5769	0.3371	-4.5962	-0.9526
系全体	-2.2195	-0.6786	-5.7427	-2.2063

## 10. 実効的 fringing field parameter

民井軌道計算では最大強度の場が想定されている。そのため、任意強度の場で Wien Filter の光学計算を行うためには、上述の実効的行列要素から(13)式に示したパラメータ $I$ を推定しておくことが有用である。有効長 $L$ も厳密には不明であるが、ここでは民井氏の設計[1]に基づき、 $L = 0.35 \text{ m}$ とする。

民井計算における系の中心では、1次の行列要素は $I$ に線形であるから、各行列要素を再現するような $I$ は一意に定まる。ただし、表1の行列要素にも不正確さが含まれているため、その値は再現したい行列要素毎に異なってしまふ。このため、各行列要素を再現する $I$ の値を別々に求め、それらを単純平均して $I = 1.26 \text{ m}^{-1}$  (for  $|h_{E0}| = |h_{M0}| = 6.1123 \text{ m}^{-1}$ )を得た。これから任意強度の場では

$$I = \frac{1.26}{6.1123^2} h_{E0}^2 = 0.0337 h_{E0}^2 \text{ m}^{-1} \quad (h_{E0} \text{ in m}^{-1}) \quad (19)$$

としておけばよいことになる。因みに、この $I$ の値を用いて(13)-(15)から算出した表1

表 4. fringing field integral 推定値を用いた表3の行列要素再現値

	$(x x)$	$(x \theta)$ [m/r]	$(\theta x)$ [r/m]	$(\theta \theta)$
系前半部	0.6612	0.3584	-4.7554	-1.0651
系全体	-2.1098	-0.7793	-5.3697	-2.4573

に対応する行列要素は表 4 のとおりとなる。

6 節の取り扱いによる matrix element は表 3 の実効的行列要素を大略再現していると言える。しかし、その再現は完全ではない。この不完全さは、民井軌道計算が対象とした Wien Filter[1]では入出口の非一様場領域の長さが全長に較べて比較的大きく ( $\Delta z / L \ll 1$  が満たされない)、6 節の 1 次近似では精度が不足するためであろうと推測される (未確認)。また、表 3 の値にも、行列要素導出方法による系統誤差が含まれることも考慮の余地があるものと考えられる。

(19)式の  $I$  の値と 6 節の取り扱いによる輸送行列要素を用いた、ECRIS からの引き出しイオンの輸送計算は別稿にゆずる。

#### 文献

[1] A. Tamii, Wien Filter に関する検討, Sept., 2004

[2] A. Tamii, private communication, Sept., 2004