

相对論的多体系としての原子核
－ 相对論的平均場理論とカイラル対称性 －

土岐 博、保坂 淳

平成 20 年 3 月 20 日

まえがき

この本は阪大で物理学を専攻しようとする学部4年と修士1年の学生を対象に行っている授業をもとにして書かれてある。原子核物理の話題は数多く多岐にわたっているが、最近とくに強い相互作用の基礎理論である量子色力学 (Quantum Chromodynamics = QCD) に基づいた研究が活発に行われている。強い相互作用の基礎理論が QCD であることが認識されたのがすでに 1970 年代であるので、この様な研究はすでに 30 年以上も続けられてきていることになるが、強い相互作用の法則が思いのほか難しく、原子核の問題を QCD から直接解くという点では十分成果が得られるに至っていない。この状況は、現在でも完全に解決された訳ではなく、今日に至るまで多くの研究者が研究を続けている。

しかしながら最近になり、面白い発展の方向付けがなされようとしている。カイラル対称性という、QCD の最も重要な側面を原子核物理で本格的に取り入れようとする研究である。この際、パイ中間子の導入が不可欠になる。元々パイ中間子は 1934 年に湯川秀樹によって、強い相互作用をする核力を説明しようと導入された粒子である。その後素粒子物理学の発展において、非常に重要な役割を果たしてきたにもかかわらず、これまで多くの原子核物理の研究ではそれほど重視されてこなかった。多くの核子から構成される原子核において、電荷とスピンを交換しながら相互作用をするパイ中間子を正確に扱うことは非常に難しく、その効果を陽に扱うことは多くの場合避けられてきた。これを、再度見直そうというのである。近年の計算機性能の向上により、複雑な系に対しても厳密な計算が可能になってきたという事情が大いに手伝っている。

パイ中間子とカイラル対称性の問題を扱おうとすると、相対性理論に基づいた量子力学が不可欠になる。これは相対論的量子場の理論の分野であるが、今日、原子核より小さな系を研究しようとする際には必要不可欠な道具である。これを修得するのはそれほどたやすいことではなく、多くの学生そして研究者が相当の時間を費やしてようやく使えるようになっていく。それ相応の努力が必要であるが、一旦それなりの理解に到達すると、驚くほどに自然法則を探求するのに便利な道具であることがわかる。

この教科書は、相対論的量子場の理論に基づいて、最近の原子核物理学がどのように理解されていくかを紹介したものである。およそ各章が 1 回分の授業内容になるように構成した。1 回の授業で説明できる量は限られてくるので、他の関連授業や自学自習に委ねる部分も多々あるかと思う。しかしこの本全体を読み通すことによって、上で述べたような雰囲気は伝わるのではないかと思う。各章の終わりには、簡潔なまとめと問題を用意した。まとめには、最低限その章で学ぶべきことのキーワードが書かれてある。

著者には各章の印象を絵にしてみたいという願望が強くあった。何かを理解し議論する

際には、多かれ少なかれそれなりのものをイメージしているはずである。そこでこの本では試みとして、各章にそれぞれの内容及び人をイメージしたイラストを挿入した。著者の共同研究者である門田英子氏に内容の一読をお願いし、実際にイメージしたものを描いてもらった。著者の方からも多少の注文をつけた。門田氏に感謝したい。

参考文献

この本を執筆するにあたって、いくつかの教科書を参考にした。またこの本のスタイルとして、通常の教科書のように基礎からの過程をすべて記述するというようにしなかった。あえて、手短にすましたところが多々ある。以下の参考書はこれらの点を補ってくれる。

1. J.D. Bjorken and S.D. Drell 著

”Relativistic Quantum Mechanics ”および ”Relativistic Quantum Fields ”(McGraw-Hill Book Company, 1964 年および 1965 年)

相対論的量子力学、場の理論の古典的な名著。ディラック方程式がどのように導出され、どのように応用されるかがいろいろな例とともに詳しく説明されている。

2. 杉本健三、村岡光男 著

原子核物理学 (共立出版、1988 年)

多くの実験データをもとに、原子核物理の説明がなされている。

3. A. Hosaka and H. Toki 著

”Quarks, Baryons and Chiral Symmetry ” (World Scientific, 2001 年)

カイラル対称性を大学院の学生や分野の若い研究者のために紹介した本である。ハドロン物理で実際にどのようにカイラル対称性が使われているかが記述されている。

4. L.N. Sabushkin and H. Toki 著

”The Atomic Nucleus as a Relativistic System ” (Springer, 2004 年)

原子核を相対論的平均場近似で記述するのに必要な数学を説明した本である。相対論的方法で原子核を記述している研究を紹介してある。

5. A. Bohr and B.R. Mottelson 著

”Nuclear Structure” (World Scientific, 1998 年)

原子核物理の古典的な名著。基本事項として原子核における対称性を正確に記述している。原子核物理に限らずひろく物理一般に共通する概念や計算方法が記述されている。

目次

第 1 章	序：強い相互作用する系の面白さ	1
第 2 章	原子核の常識	5
2.1	原子核の質量	5
2.2	原子核の飽和性	7
第 3 章	マジック数とスピン軌道力	11
3.1	マジック数	11
3.2	強いスピン軌道力	15
第 4 章	相対論的量子力学	21
4.1	シュレーディンガー方程式	21
4.2	クライン・ゴールドン方程式	22
4.3	ディラック方程式	23
4.4	ディラック方程式のスピン軌道力	27
4.5	自然単位系と共変的に書かれたディラック方程式	28
4.6	ディラックの方程式から導出されるカレント	30
第 5 章	場の理論における核子と中間子	37
5.1	古典粒子の運動と古典場の理論	37
5.2	場の量子論におけるラグランジアン	40
5.3	実スカラー場の理論の正準量子化	41
5.4	場の理論における相互作用	43
5.5	アイソスピンとフレーバー	44
第 6 章	原子核の相対論的記述	51
6.1	原子核の σ - ω 模型	51
6.2	第二量子化	53

6.3	核物質の性質	55
6.4	中性子星	59
第7章	原子核の構造	65
7.1	σ - ω 模型を使った平均場理論による原子核	65
7.2	有限核の計算結果と実験との比較	67
第8章	カイラル対称性	73
8.1	パイオンの基本的な性質	73
8.2	カイラリティー	75
8.3	対称性と保存カレント	78
8.4	カイラル変換	81
第9章	線形シグマ模型	87
9.1	核子と中間子のラグランジアン	87
9.2	湯川型相互作用	90
9.2.1	行列要素	90
9.2.2	ポテンシャル	92
第10章	南部-Goldstoneの定理と質量生成機構	97
10.1	線形 σ 模型のラグランジアン	97
10.2	カレント	101
第11章	南部-ヨナラシニオ (Nambu-Jona-Lasinio) 模型	107
11.1	平均場近似と質量生成	108
11.2	南部-Goldstoneの定理	111
第12章	原子核におけるカイラル対称性	119
12.1	原子核の線形 σ 模型での記述	119
第13章	原子核と量子色力学	125
13.1	カイラル対称性の申し子であるパイオン	125
13.2	パイオンの原子核における働き	126
13.3	原子核の物理	127

第1章 序：強い相互作用する系の面白さ

現在ナノテクノロジー、ナノバイオロジーが脚光を浴びている。1 ナノは10 オングストローム (\AA) であるが、 1\AA は原子の大きさなので、我々は現在原子 $10\sim 1000$ 個からなる物質のコントロールを目指していると言える。原子としては約 100 余の種類が存在している。その原子の中心に位置し全系を支えているのは原子核である。原子核は陽子と中性子からできており、その中でも陽子が電荷を持っていることから、原子核中の陽子の数が原子における電子の数を決定している。原子の中にある原子核はどんな性質を持っているのであろうか。原子核はどのように作られたのであろうか。原子核は我々が自由にコントロールできるのであろうか。興味深い質問である。

原子を反応させるのに必要なエネルギーは1電子ボルト (1 eV^1) 程度であるのに対して、原子核を反応させるのに必要なエネルギーはその10の6乗倍のメガ電子ボルト (MeV) の大きさになる。これらのエネルギーは温度に換算すると、原子の場合には1万 (10^4) 度くらいだが、原子核の場合は100億 (10^{10}) 度くらいで人間の力では到達が不可能である。しかし、太陽は我々地球に住む生物のために核融合反応を使ってエネルギーを作り出し、そのエネルギーを我々に供給してくれている。この原子核の反応に必要なエネルギーは非常に大きいので、いくら原子核を理解しても、原子核を加工することはできないであろう。原子核物理が星 (天体物理) と非常に深い関係にあるのはこのエネルギーのスケールが一致しているからである。この事実が原子核や素粒子の研究者をして謙虚に自然に耳を傾ける気持ちにさせてくれる理由になっていると思う。だからこそ、自然が与えてくれる情報に対して、総合的に自然を理解する機会を与えてくれるところが魅力であると思っている。

陽子と中性子の質量はほぼ同じであり、違いがあるのは陽子が電荷を持っていることだけで同種の粒子と考えられている。これらの粒子は原子核を構成しているので総称して核子と呼ぶ。これらの核子が集まって原子核を構成することになるが、それは当然これらの粒子が相互作用していることによる。つまり、核子はお互いに相互作用して、単独にいるより多く集まるほうが安定になれるのである。その原子核を作り出す相互作用を強い相互

¹ 1電子ボルト = 1 electron volt は、電子1個が1ボルトの電位差にあるときのエネルギーであり、 1 eV と書く。ジュールとは $1\text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{ J}$ の関係にある。

作用と呼ぶ。この教科書では原子核の性質を理解することから始めて、それを説明するのに何が重要な鍵になっているかを理解する。そしてそれを記述する方法を説明する。その上で、強い相互作用の本質を理解することに努め、これらをもとにして原子核の真の姿を導く。

創立間もない大阪大学（大阪帝国大学）では、湯川が原子核を構成するのに必要な相互作用についての考察を重ねていた。電磁力と重力しか知らない時に、有限の到達距離を持つ力を説明するために新しい粒子の導入を行った。宇宙線の中に見つかった核子と電子の間の重さを持つ粒子はパイ中間子と呼ばれる湯川粒子であった²。その後の研究からこのパイオンは非常に奇妙な性質を持っていることがわかった。擬スカラー粒子であるパイオンが交換されることによって、核子の間にはスピンや角度によって変化する相互作用がもたらされる。電磁相互作用の類似では、磁気双極子同士の相互作用に似た複雑な構造をしている。原子核物理において、パイオンが重要な働きをするのには非常に深い意味がある。それは原子核を構成する核子（陽子・中性子）の質量そのものが強い相互作用を通じて生じるものであり、その証拠として非常に強く相互作用するパイオンが存在しているのである。この素粒子物理の重要な課題が原子核物理の本質になっているところが強い相互作用の面白い所である。この核子の質量の問題や小さな質量を持つパイオンの物理はカイラル対称性の物理と呼ばれる。この教科書ではこのカイラル対称性とはどういうものなのか、何故原子核物理で重要な概念なのかの議論を行う。

20世紀の初期に原子の中に原子核が存在することは、初代阪大総長の原子の長岡半太郎によって原子の土星模型のなかで予言された。この概念は原子構造の解明と量子力学の発展に大きな役割を果たした。原子核物理は1949年の殻模型（shell model）から始まったと言われるが、その段階ではパイオンは直接には殻模型には現れていない。21世紀の初期にある現在、パイオンの役割が脚光を浴びている。原子核物理は真の原子核の描像を導き出す面白い段階にあると言える。

²パイ中間子はこの本の中で最も中心的な役割を果たす中間子である。そこで、これ以降研究者の間で最も良く使われる「パイオン＝(pion)」という呼び方を採用することにする。



不思議がいっぱい 原子核

第2章 原子核の常識

原子核は原子の中心にあり陽子と中性子からできている。大きさは $(1 \sim 6) \times 10^{-15}$ m くらいでその大きさを表すのにフェルミ、もしくはフェムトメートル (fm) の単位を使う。1 fm は 10^{-15} m である。原子の大きさが 1 オングストローム ($1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ m) なののでいかに小さいかがわかるであろう。

原子核のようなミクロの世界と我々の世界を結びつける数字はアボガドロ数である。アボガドロ数はおよそ 6×10^{23} である。水素原子をアボガドロ数個集めるとほぼ 1g になるので、原子一つの重さは 1g をアボガドロ数で割った程度であり、いかに我々の日常から見ればちっぽけなものかがわかるであろう。陽子はそれでも素粒子の中では重い部類に属しておりバリオン (重粒子) と呼ばれる種族の一つである。

一方原子核の周りを回って原子を構成している電子はもっと軽く、陽子の約 2000 分の 1 の質量でレプトン (軽粒子) の一種である。原子核のもう一つの構成粒子である中性子は陽子とほぼ同じ質量を持っておりバリオンの一種である。陽子と中性子は原子核を構成する粒子なので総称して核子と呼ばれる。

この章では原子核の基本的な性質を原子核の常識として列挙し、その定性的な説明を与える。原子核を応用に使う研究者は、これらの知識だけは蓄えておいてもらいたい。

2.1 原子核の質量

Z 個の陽子と N 個の中性子からできている原子核の質量を $M(Z, N)$ と書く。核子の質量を、陽子については M_p 、中性子については M_n と書くことにする¹。質量に光速 c の 2 乗を掛けるとエネルギーの単位になる。核子は原子核を構成するほうが安定なので、そのエネルギーを束縛エネルギーと呼び、 $B(Z, N)$ と書くことにすると、これらの物理量の関係は次のように書ける。

$$M(Z, N)c^2 = ZM_p c^2 + NM_n c^2 - B(Z, N) \quad (2-1)$$

¹ p は陽子 (= proton)、 n は中性子 (= neutron) を表す。

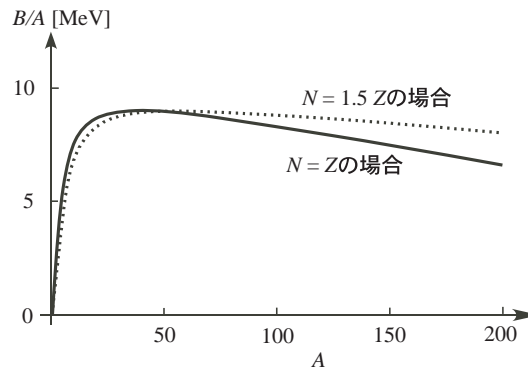


図 2.1: 核子 1 個あたりの束縛エネルギー (B/A) と核子数 (A) との関係。 N は中性子数、 Z は陽子数で、ベータ・ワイッゼッカーの質量公式を使って計算された。

原子核は複数の陽子と中性子で構成されているが、それぞれの核子数 ($A = Z + N$) の中で最も束縛エネルギーが大きな原子核が存在する。まずは原子核を理解するための常識として束縛エネルギーを質量数で割った量、核子あたりの束縛エネルギー B/A を核子数の関数で図にしたものが図 2.1 に示されている。

原子核の常識としてまず覚えておきたいことは、1 核子あたりの束縛エネルギーは約 8 MeV であるということである。核子の質量に c^2 を掛けた数字は 940 MeV であることを考えると質量の約 1% の束縛エネルギーを持っている。次に、 B/A は質量数が小さいところではほぼ単調に増加し $A \sim 50$ で最大になり、さらに質量数が増えていくと単調に減少していることである。最も安定な原子核は鉄であり、すべての原子核は鉄になるのが安定であるということをこの図は示している。何故 A が余り大きくも小さくもないこのような値で最も安定になるのかは次のように考えるとわかる。強い相互作用の観点からはより多くの核子が集まるほうがより強く引力を感じエネルギー的に得をする。一方で、陽子は電荷を持っているので、電磁相互作用の斥力のためにたくさんの核子が集まるとクーロン相互作用による斥力が無視できなくなり、よりエネルギーを損する。この 2 つの性質が競合して鉄がもっとも安定な原子核になる。さらにこの性質により、安定な原子核が存在する範囲 (上限) ができる。最も大きな原子核は質量が約 300 くらいである。これより大きな原子核はより安定になろうとしていくつかの小さな原子核に分裂する。

原子核を応用する立場の人はこの性質を知っていることで十分であろう。原子核からエネルギーを取り出すには鉄より小さな原子核を融合させて鉄に近づけることによりエネルギーを得ることができる。これを核融合という。核融合を起こさせるにはクーロンポテンシャルの障壁を超える必要がある。この障壁を乗り越えることは難しく、現在人口的に核融合を実現するには至っていない。しかし例えば星は重力の助けを借りて核融合を起こし、

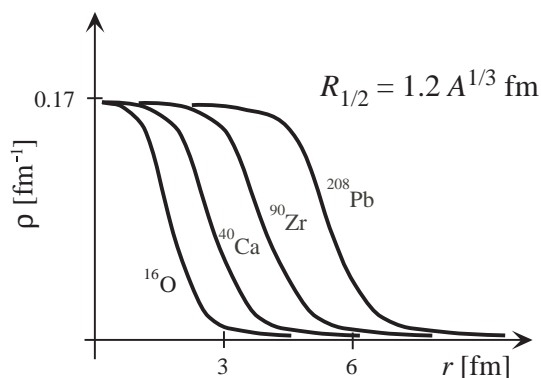


図 2.2: 質量数の異なる原子核において、中心からの距離 r の関数として核子数密度を模式的に表したもの。 $R_{1/2}$ は原点における密度の半分の値をとる中心からの距離である。

さらにそこから得られたエネルギーを利用する過程を繰り返すことによって、軽い原子核の集合から進化し、鉄の集合に向かい続ける。鉄より重い原子核は逆に分裂してより鉄に近づこうとする。これを核分裂という。この場合には中性子を重い原子核に吸収させることによって、核分裂を引き起こすことが可能になる。

2.2 原子核の飽和性

もう一つの原子核の常識は、原子核中の核子の分布密度である。分布密度（以下単に密度という）を異なる原子核ごとに図示すると図 2.2 のようになる。特徴的なことは原子核の中心付近で密度は原子核の種類によらずほぼ一定であることで、その値は $\rho_0 \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$ 程度である。すなわち、一辺が約 1.8 fm の立方体の中に核子が 1 個あるくらいの密度である。したがって、原子核の半径はおよそ $R \sim 1.2A^{1/3} \text{ fm}$ となり、核子数の 1/3 乗で増えていく。この事実は興味深い帰結を得る。すなわち、核子数を無限大にしても、中心部の核子密度は増えることなく一定の値 ρ_0 にとどまることである。この現象を核物質の飽和性と呼ぶ。

クーロン力による反発力を無視すれば、このように強い力のみで束縛する無限に広がった「核物質」を考えることができる。核物質の 1 核子あたりの束縛エネルギーは、密度の関数になっていて、 $\rho_0 \sim 0.17 \text{ fm}^{-3}$ のときに、16 MeV になることが知られている（質量公式 (2-2) の第 1 項）。原子核理論では核子間の相互作用を使ってこの値を再現することが大きな課題である。

要約

1. 原子核の束縛エネルギーは約 8 MeV である。1 核子あたりの束縛エネルギーが一番大きな原子核は鉄である。
2. 原子核の密度分布は原子核の中心部ではほぼ一定で $\rho \sim 0.17\text{fm}^{-3}$ である。

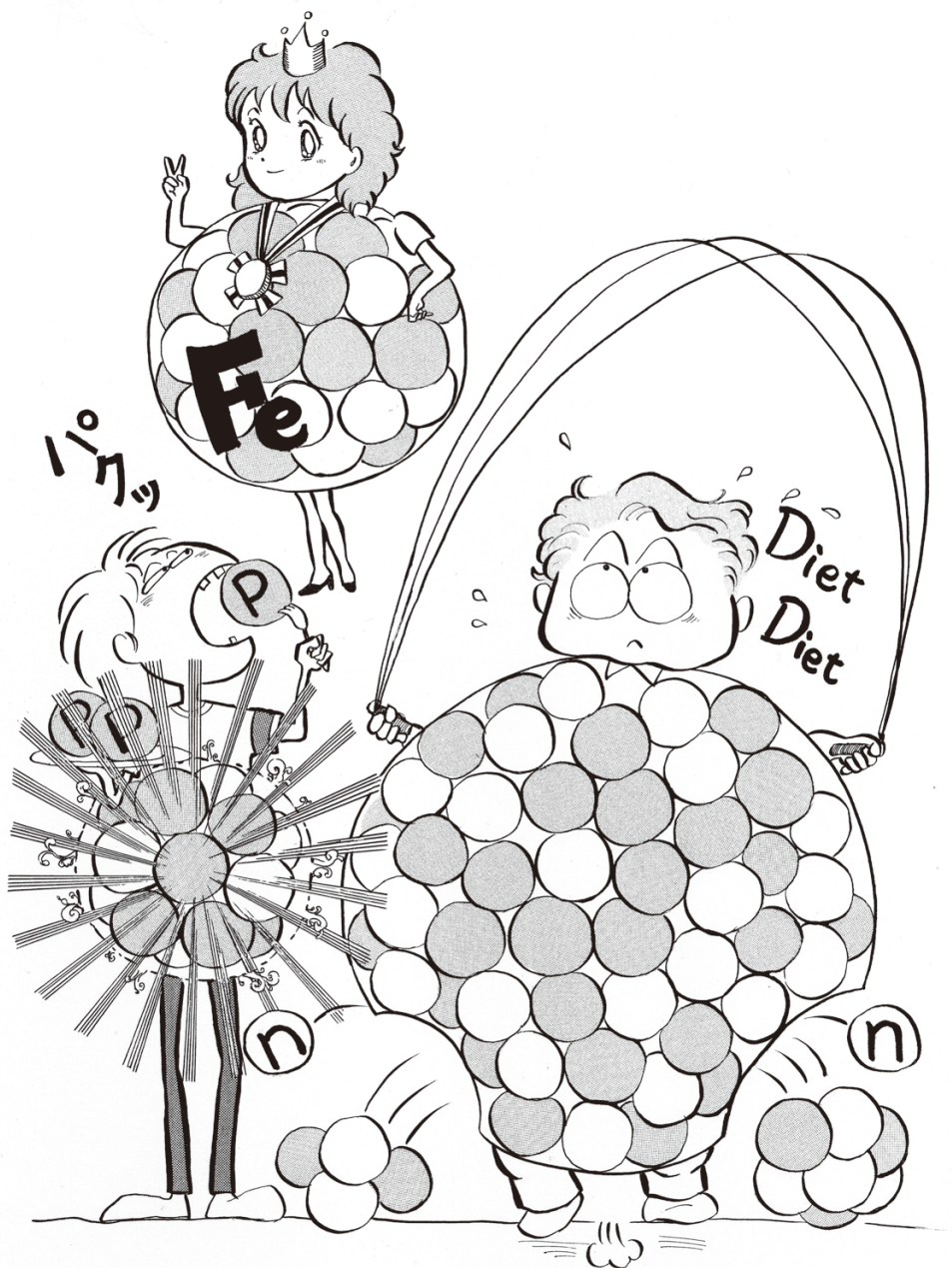
問題

1. 陽子数が Z 、中性子数が N の原子核の束縛エネルギー $B(Z, N)$ は、ベータ-ワイゼッカーの質量公式によって近似的に

$$B(Z, N) = aA - bA^{2/3} - cZ^2A^{-1/3} - d(Z - N)^2/A \quad (2-2)$$

のように与えられる。ただし $A = Z + N$ である。ここで定数はそれぞれ $a = 15.7$ MeV, $b = 17.8$ MeV, $c = 0.712$ MeV, $d = 23.6$ MeV である。この公式を使って ^{54}Fe ($A = 54, Z = 26$) および ^{208}Pb ($A = 208, Z = 82$) の原子核の束縛エネルギーを求めよ。

2. 電子に比べて陽子や中性子は非常に大きな質量を持っている。水素が 1 モルで 1 グラムの重さを持つことから、陽子はどれくらいの質量を持つか概算せよ。さらに水は 1 モルで約 1cm^3 の体積を持つことから原子の大きさはどれくらいかを答えよ。原子核の半径はその 10^{-5} 倍程度の大きさである。



目指せ！理想のプローション！！

第3章 マジック数とスピン軌道力

キュリー (Marie Cury) のラジウムの発見 (1898 年) 以来、原子核 (原子) から各種の粒子 (アルファ線、ベータ線、ガンマ線) が放出されていることが分かっていた。原子核の質量についてもかなりの情報が得られていた。1934 年には湯川 (Hideki Yukawa) の中間子論も提案されていた。しかし、原子核をどのように記述するべきかの手ごかりはなかった。そのような中、1949 年にメイヤー (Meyer) とヤンセン (Jensen) が原子核の殻模型 (shell model) を提案した。原子核物理はこの殻模型から始まったと言われている。そのきっかけとなったのが原子核のマジック数の発見である。

3.1 マジック数

マジック数を理解するために、まず初めに原子の場合を議論する。原子はその中心に陽電荷を持つ重い原子核から生じるクーロン力により、電子が束縛された系である。水素型原子のエネルギー準位は図 3.1 のようになっていて、量子力学の最も基本的な応用例となっていることでなじみ深いと思う。一般に原子のエネルギー準位は、多数の電子間の相互作用によって変更を受けやや複雑な構造になるが、その特徴は水素原子の場合と共通点が多い。原子から一つの電子を取り出すに必要なエネルギー (イオン化エネルギー) を原子数の関数でプロットしたものを図 3.2 に示す。この図から伺えるのは He から電子を取り出すには大きなエネルギーが必要だが、次の Li から電子を取り出すにはあまり大きなエネルギーを必要としない。このようにイオン化エネルギーが大きくなっている原子は Ne, Ar, Xe, と化学的に非常に安定な希ガスと呼ばれる。即ち、電子の数が 2, 10, 36, ... の所でイオン化エネルギーが大きくなっている。この数を原子のマジック数とよぶ。この現象が何故起こるのかに答えを与えるのが量子力学である。

大きな電荷を中心に持つ原子の中における電子の運動は、シュレーディンガー (Schrödinger) 方程式を解くことにより記述される。相互作用は原子核と電子間の電磁気的な相互作用である。上で述べたように、厳密には多数存在する電子の問題を解く必要があるが、ここでは、原子核に一つ一つ電子を加えていきながら原子核と電子の合計の電荷数が Z となった

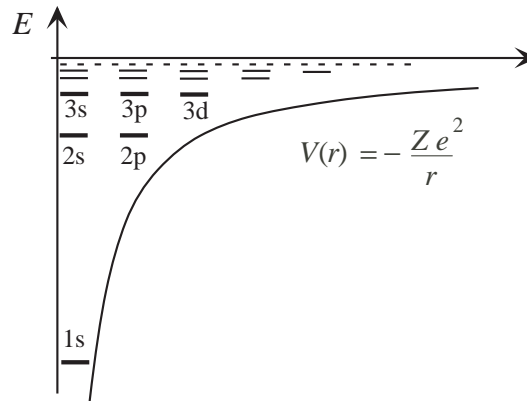


図 3.1: 中心の電荷を Ze (Z は陽子数) とした場合のクーロンポテンシャル内で運動する電荷 $-e$ をもつ粒子のエネルギー準位。

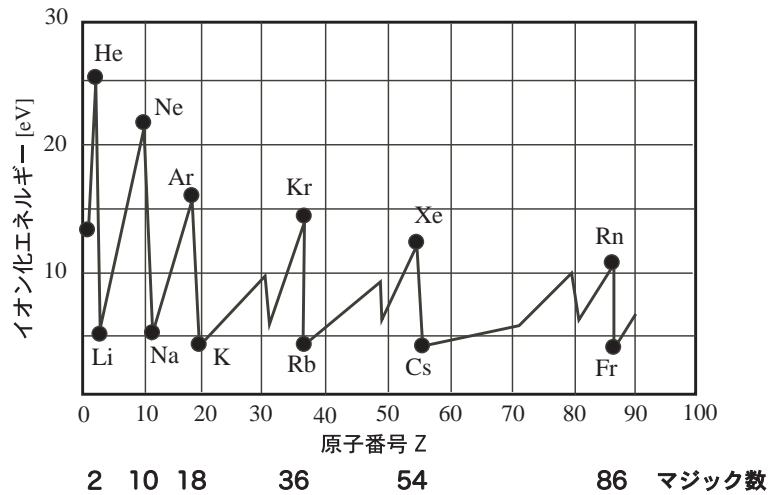


図 3.2: 原子のイオン化エネルギーの概略図。

ところで、新たに付け加えられる電子の運動が以下の簡単な式で表されるとしよう：

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}). \quad (3-1)$$

ここで、 $\psi(\vec{x})$ は電子の定常状態の波動関数、 $r = |\vec{x}|$ である。この方程式を解くとエネルギーは

$$E = -\frac{1}{2} \frac{mc^2 Z^2 \alpha^2}{N^2} \quad (3-2)$$

と与えられる。ここで主量子数 N は $N = n + l + 1$ で与えられる自然数であることが量子力学によって知られている。ここで n はノード（節）量子数で、負でない整数の値

($n = 0, 1, 2, \dots$)をとる。 l は軌道核運動量と呼ばれ、やはり $l = 0, 1, 2, \dots$ という負でない整数値を取る。さらに与えられた角運動量数 l に対して、 m で区別される量子状態が $2l + 1$ 個存在する($m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$)。さらにそれぞれの状態にはスピンの向きが上向きと下向きの2つの量子状態がある($s_z = \pm 1/2$)。

先に説明したように、多くの原子の場合エネルギー準位は多数の電子の影響でこのような簡単な形にはならないが、定性的に原子の性質を理解するには役に立つ。エネルギー準位を $1s, 2p$ などのように、主量子数($N = 1, 2, 3, \dots$)と角運動量($s(l = 0), p(l = 1), d(l = 2), \dots$)で表すことにする。図 3.1 に従ってそれぞれの状態に下から電子を詰めていくとすると、最低状態(1s)に電子2個、少しエネルギー間隔をおいて次の状態(2s, 1p)に8個などと順次入っていく。その次の準位に(3s, 2p, 1d)の3つが縮退しているとなると、これらの準位には最大で18個の電子が入ることになるが、実際には(3s, 2p)の対8個分と、1dの10個分とで縮退が解ける。10個はスカンジウム Sc から始まる遷移元素になる。このように1粒子のエネルギー準位が離散的にはっきりと存在するとマジック数が理解できる。

原子核の場合はどのようになっているだろうか。イオン化エネルギーに対応する物理量は陽子や中性子の分離エネルギーである。中性子の分離エネルギーを図 3.3 に示す。原子の場合に比べてそれほどはっきりとはしていないが、核子数が8, 20, 28, 50, 82というところで分離エネルギーが最大になっていることが見てとれる。これらの数字を原子核のマジック数とよぶ。

原子核のマジック数がどのように出てくるか考えてみよう。そのために三次元の調和振動子の中で核子が運動していると仮定してみよう。その場合のシュレーディンガー方程式は以下のようにかける：

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{1}{2}kr^2 \right) \psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x}). \quad (3-3)$$

この固有エネルギーは $E = \hbar\omega(N + 3/2)$ 、 $\omega = \sqrt{k/m}$ である。ここで $N = 2n + l$ であり、ノード量子数は($n = 0, 1, 2, \dots$)という整数値をとり、また、軌道核運動量は水素原子の場合と同じく $l = 0, 1, 2, \dots$ という整数を取る。電子の場合と同じようにエネルギー準位をプロットすると図 3.4 のようになる。この場合には図に示すように2, 8, 20, 40, 70, ...でマジック数が現れる。実験との比較では20までは一致している。しかし、28, 50, 82は違っている。20の上に8個詰める、40の上に10個埋める、70の上に12個詰めることができるエネルギー状態を作ることができれば実験で得られているマジック数を再現することが可能になる。数字の8, 10, 12は2つずつ増えていく規則性がある。

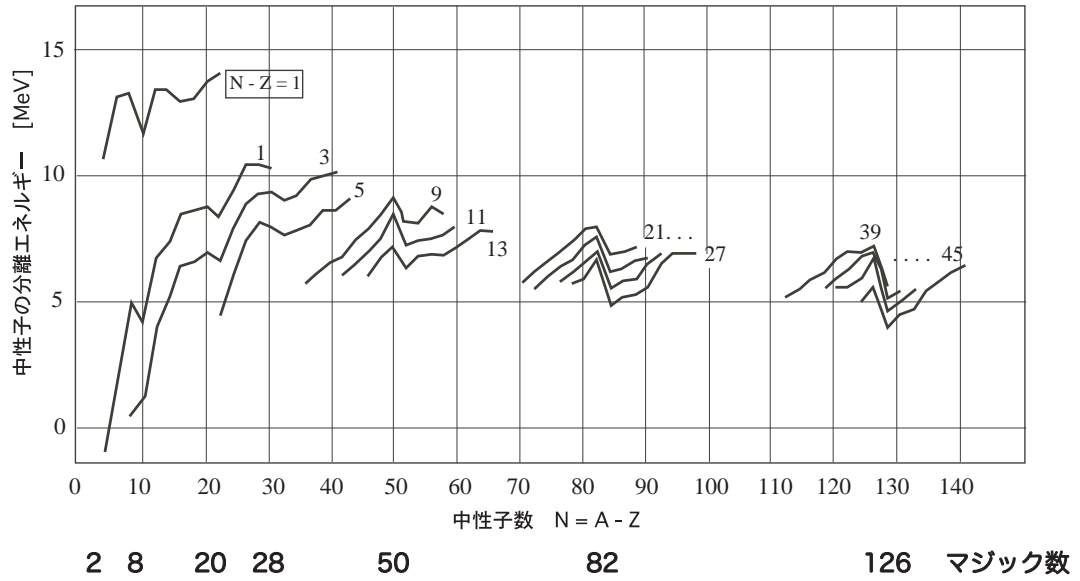


図 3.3: いろいろな原子核の中性子の分離エネルギー。横軸は中性子数でマジック数を対応する位置に示してある。それぞれの折線は一定の $N - Z$ の値に対する原子核の分離エネルギーをつないだもので、 $N - Z$ の値はそれぞれの線の右端に示してある。

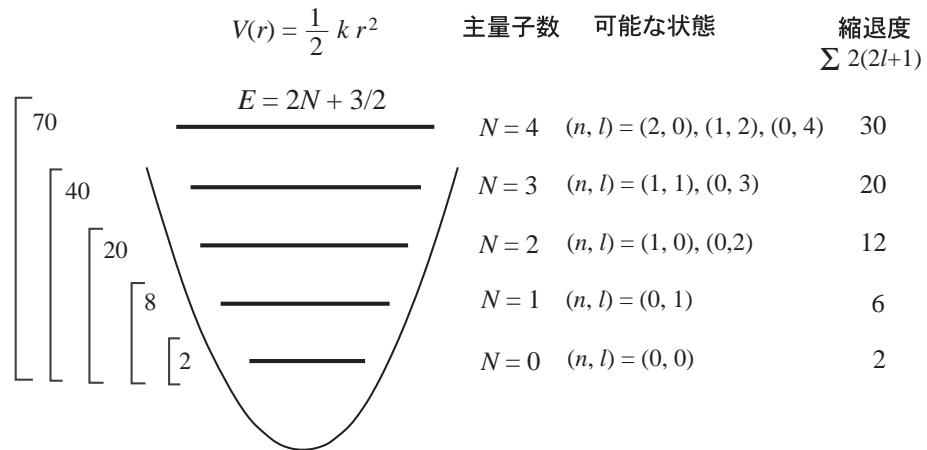


図 3.4: 調和振動子ポテンシャル内で運動する粒子のエネルギー準位

3.2 強いスピン軌道力

この二つずつ増える数字はどのようにすれば出てくるのであろうか。核子はフェルミオンでスピンを持っている。そのスピンと軌道回転運動が相互作用することによって、スピン軌道力が出てくる。その相互作用ポテンシャルは次のように書ける：

$$V_{ls} = b\vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (3-4)$$

ここで、 b は場所に依存したポテンシャル関数である。スピンを \vec{s} 、軌道角運動量を \vec{l} と表し、 \vec{s} と \vec{l} を足した物理量を全角運動量と呼び、 $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ と書くとこの \vec{j} は $\vec{l} \cdot \vec{s}$ と交換することがわかる。したがって、 $\vec{l} \cdot \vec{s}$ の相互作用のもとで \vec{j} は良い量子数、すなわち運動の保存量であることがわかる。そこで $\vec{l} \cdot \vec{s}$ の期待値を書くと

$$\langle (ls)jm | \vec{l} \cdot \vec{s} | (ls)jm \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) \right). \quad (3-5)$$

この式で $l = 3$, $j = 7/2$ の場合にはその軌道の中に $2j + 1 = 8$ 個の量子状態に1つずつ、合計8個の核子を入れることが可能になる。したがってこのスピン軌道力を仮定し、同じ l に対してより大きな j の状態($j = l \pm 1/2$ のうちの $j = l + 1/2$ の状態)のエネルギーを下げるように相互作用の強さとその符号を選ぶと $20+8$ で28のマジック数を得ることが可能になる。

この考えを推し進めると $l = 4$ で $j = 9/2$ を採用すると10という数字を作ることができ、 $40 + 10 = 50$ のマジック数を作ることができる。このように考えると次のようなハミルトニアンを採用すると原子核のマジック数を再現できるモデルを作ることが可能であろう：

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}kr^2 + b\vec{l} \cdot \vec{s}. \quad (3-6)$$

この期待値は次のように書くことができる：

$$\langle (ls)jm | H | (ls)jm \rangle = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right) + \frac{b}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) \right). \quad (3-7)$$

ここで、角周波数は $\omega = \sqrt{k/m}$ である。この式の中に適当な数字を導入すると図3.5にあるようなエネルギー準位を得、その結果実験から期待されるようなマジック数を得ることができる。この図を示すにあたって、現実のポテンシャルは調和振動子のものとは少し異なることを考慮した。これらの準位は必ずしも実際の計算で用いられる値を正確に反映してはいないが、定性的な様子を見るのには役に立つ。特に、もともと縮退した調和振動子のエネルギー準位のうち、一番高い角運動量 j を持った状態が大きく下がることによって、エネルギー間隔が広がりマジック数28, 50, 82を説明することに注意して欲しい。

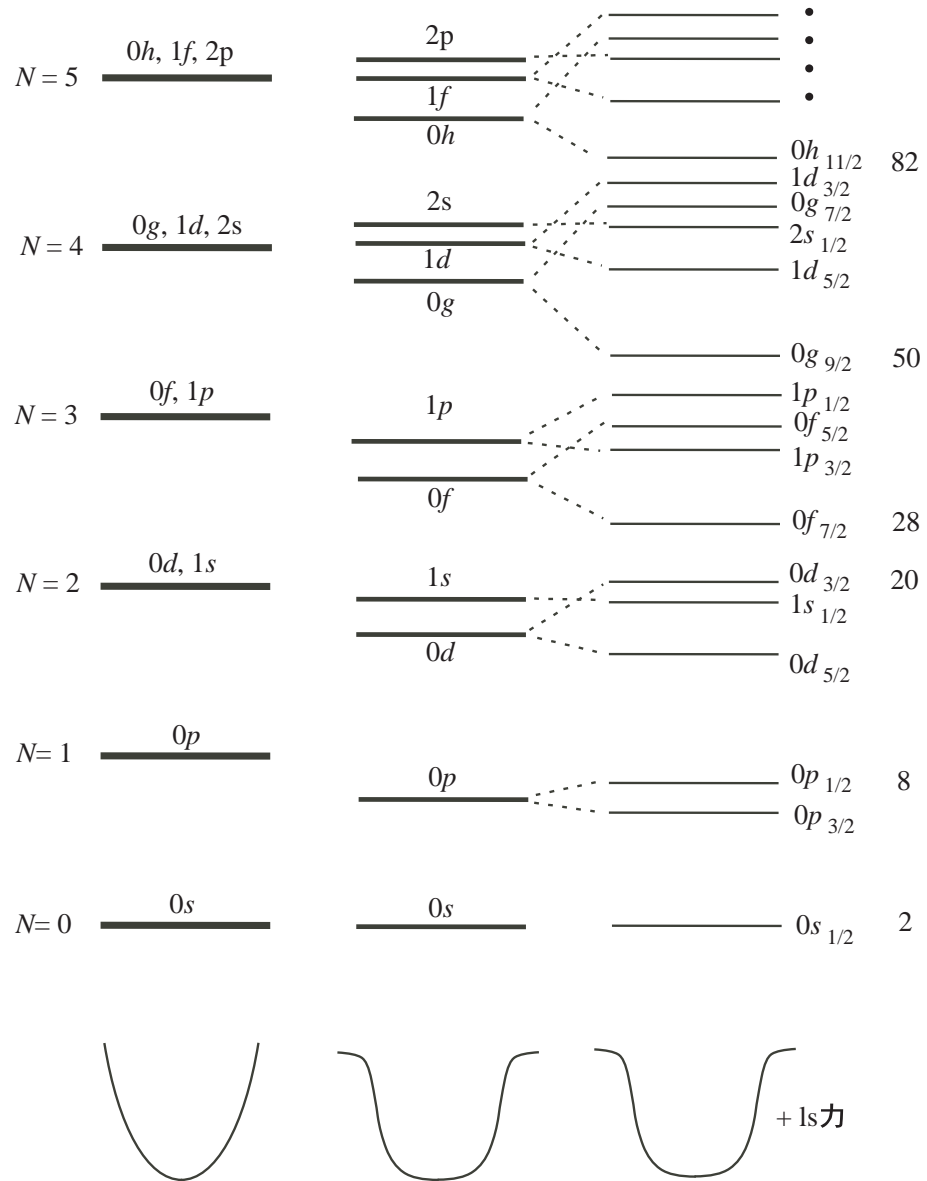


図 3.5: 左：調和振動子ポテンシャルのエネルギー準位、中央：現実に近いポテンシャル中のエネルギー準位、右：スピン軌道力を加えた場合の単一粒子のエネルギー準位。右の数字は、準位間隔が広がることで現れるマジック数を示している。

原子核物理では、当初現象論的に導入されたスピン軌道力の起原を解明することが大きな目標になる。この後の章でみるように、相対論的な枠組みによって最も自然にスピン軌道力を導入することができる。1990年代に詳しい研究が展開され、一定の理解が得られたと考えられた。ところが、そこでは、核子の有効質量が現象とあわないことが知られていた。しばらくして、最近新たな発展が全く異なる観点からなされた。それが、パイオンの物理と関係しているのである。パイオンは、強い相互作用を支配する法則 QCD が現在の我々の世界にもたらす、最も重要な要素である。カイラル対称性の自発的な破れという、自然の多様性を作り出す原理とも密接に関係している。ようやくこれまで現象論的に頼るところが多かった原子核物理に、QCD という基本原理との接点を見いだすことができそうな状況になってきた。その一端を紹介するのが、この本の重要な目標である。

要約

1. 原子核では質量の異常な変化が特別な個数で起こる。それをマジック数と呼ぶ。マジック数は 2, 8, 20, 28, 50, 82 である。
2. 理論的には三次元の調和振動子のポテンシャルを用いるとマジック数は 2, 8, 20, 40, 70 である。
3. この違いは強いスピン軌道力を導入することで説明された。

問題

1. スピン軌道力の演算子 $\vec{l} \cdot \vec{s}$ は、 \vec{l} もしくは \vec{s} とは交換しないが、全角運動量 $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ とは交換することを示せ。また、その行列要素が

$$\langle (ls)jm | \vec{l} \cdot \vec{s} | (ls)jm \rangle = \frac{1}{2} \left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) \right). \quad (3-8)$$

のように書けることを示せ (3-5)。

2. 3次元の調和振動子に関して以下の問いに答えよ。

(a) シュレーディンガー方程式を書け。

- (b) x, y, z の3方向について変数分離をすることによって、エネルギーが $E = (n_x + n_y + n_z + 3/2)\hbar\omega$ と書けることを示せ。
- (c) $N = n_x + n_y + n_z$ とおいたときに、 $N = 0, 1, 2, 3$ の状態のパリティと縮退度を求めよ。
- (d) 同じ問題を角運動量を用いて解くことができる。このとき状態は、角運動量子数 l, m と節の量子数 n とで分類できる。 $N = 0, 1, 2, 3$ の場合にどのような角運動量と節の状態が許されるかを求め、その方法で求められる縮退度が前問で得られた縮退度と一致することを確認せよ。

3. (a) 中心からの距離 r のみに依存する等方的 (球対称) なポテンシャルを $V(r)$ と書くと、ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(r)$$

と書くことができる。極座標で変数分離した後に角度方向の波動関数を球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ で表し、角運動量 l をもつ動径方向の波動関数が満たすシュレーディンガー方程式を導け。

- (b) 動径方向の波動関数が原点付近で r^l の様にふるまうことを示せ。



自転しながら公転するもの

第4章 相対論的量子力学

原子核のマジック数を説明するためには強いスピン軌道力を導入することが必要であった。そこでどのように考えればスピン軌道力を自然に理論に導入できるかを議論したい。そのために核子の従うべき相対論的量子力学の方程式であるディラック (Dirac) の方程式を導出する。

4.1 シュレーディンガー方程式

古典力学では、相互作用が $V(r)$ で与えられている場合のハミルトニアン (Hamiltonian) は

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) \quad (4-1)$$

と与えられる。シュレーディンガー方程式は次の量子化の手続きで得ることができる。

1. まず (4-1) において、

$$H \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (4-2)$$

の置き換えをする。

2. 次に (4-1) は、

時間 t と場所 \vec{x} に依存する波動関数 $\psi(t, \vec{x})$ に作用して成り立つ式とする：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = H \psi(t, \vec{x}). \quad (4-3)$$

3. 波動関数の絶対値の2乗が確率分布であると解釈する。

以上の規則によって次のシュレーディンガー方程式を得ることができる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(r) \right] \psi(t, \vec{x}). \quad (4-4)$$

その性質を知るために連続の方程式を導く：

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (4-5)$$

ここで電荷密度 ρ と電流密度 \vec{j} は ψ を使って次のように書かれる：

$$\rho = \psi^* \psi, \quad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*). \quad (4-6)$$

この方程式は連続の方程式と呼ばれ、解釈としては密度の変化は粒子の移動によって引き起こされるということを表している。

4.2 クライン・ゴールドン方程式

シュレーディンガー方程式は光速の比べゆっくりとした（非相対論的な）速さで運動する粒子に対して成り立つ量子力学の運動方程式である。これの相対論版はどのようなものか考えたい。まず相対論におけるエネルギーと運動量の関係を書くと

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (4-7)$$

古典論にならってハミルトニアンを書こうとすると

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (4-8)$$

のように平方根の形で表現する必要があり、どのように平方根の中の微分を扱えばよいかという問題が生じる。また符号の不定性も残る。そこで2乗の形のままで量子化の手続きを試みる。シュレディンガー方程式では $H\psi$ を時間の1次微分 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ としたので、 H^2 の場合にはその2乗をとることによって次の方程式を得る：

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(t, \vec{x}) = \left(-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4 \right) \psi(t, \vec{x}). \quad (4-9)$$

この方程式はクライン・ゴールドン (Klein-Gordon) 方程式と呼ばれている。この方程式の意味をつかむために、再度連続の方程式を確認してみる。ただし、密度と電流は (4-6) のものと異なり次のようになる：

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right), \\ \vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right). \end{aligned} \quad (4-10)$$

この式を導く最も直接的な方法は、後でみるようなクライン・ゴールドン場のラグランジアン (5-18) に対してネーター (Nöther) の定理 (9 章を参照) を適用することである。シュレーディンガー方程式では、(4-6) から、その密度 ρ は必ず正の値をとることが保証されていたが、今の場合には関数の微分がはいついて必ずしも正の値をとるということは保障されない。これは量子力学の方程式としては即座には受け入れることができない。歴史的には、この式が導出された当時は受け入れられなかったが、その後多体系を取り扱うための第 2 量子化の手続きとともに解釈が可能となり、中間子の方程式として使われるようになった。

4.3 ディラック方程式

確率必ずしも正にならない原因を手繰ると、微分方程式の中に時間の 2 次の微分がはいつていたからであることが予想できる。そこでディラックは相対論的な量子力学の方程式として時間の 1 次微分を含むものを考え、そのためにハミルトニアンを運動量の 1 次の関数として表すことから出発した。

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p}c + \beta mc^2. \quad (4-11)$$

ここで $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, β は運動量に依存しない“数”である。この式は $\vec{p} \rightarrow 0$ のとき、粒子の静止質量に帰着することがわかる。これに量子化の手続きを応用すると次の方程式を得る：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right) \psi(t, \vec{x}). \quad (4-12)$$

この式で左辺は時間の 1 次微分なので確率は正であることが保障される。その代わりに未知の量 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と β が導入されている。ディラックはこの $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ と β を決めるために、古典的なエネルギーと運動量の関係が出ることを条にとおいた。すなわち、時間の 2 乗の方程式を得るために (4-12) の両辺に再度左辺に $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ 、右辺に H を乗じた。その結果次の式を得る。

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \psi(t, \vec{x}) = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 \right)^2 \psi(t, \vec{x}). \quad (4-13)$$

この式がクライン・ゴールドン方程式になることを条件にした。したがって、 α_i と β の満たすべき方程式は次のようになる。

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \quad (4-14)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (4-15)$$

$$\beta^2 = 1. \quad (4-16)$$

この段階で α_i と β は普通の数ではないことがすぐに理解できる。しかもこれらがゼロではない意味のある”数”である為には、これらは行列である必要がある。そこで、どのような行列になるべきかで、さらに条件を求めたい。まずハミルトニアンはエルミート (Hermite) であるという条件から α_i, β はエルミート行列である。さらに交換関係からこれらの行列のトレースはゼロであることが証明できる。即ち

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \text{tr} \alpha_i = 0, \quad \alpha_i^2 = 1, \quad (4-17)$$

$$\beta^\dagger = \beta, \quad \text{tr} \beta = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (4-18)$$

この条件から行列の次元 (N) は偶数であることがわかる。 $N = 2$ は上記の条件を満たすことができない。従って、 $N = 4$ になることが必要である。この場合には α と β として多くの可能性が考えられる。従って、物理 (自然) の要請から、それらの具体的な行列を採用することになる。そこでディラックが採用した行列は次のようになる。

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4-19)$$

ここで σ_i はパウリ行列で次のように定義されている：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4-20)$$

また、(4-19) の β の成分中 1 と書かれてあるのは 2×2 の単位行列である。

これでディラックの方程式 (4-12) が完成したことになる。(4-12) の右辺で α_i と β が 4×4 の行列であるということは、波動関数 ψ は 4 成分の縦ベクトルになっていることが必要である。すなわち、波動関数は一つの粒子を表現するものであるにもかかわらず、4 つの成分を持った波動関数になってしまった。一つの粒子の運動は一つの波動関数で表現できるべきだが、ディラックの方程式は一つの粒子につき 4 つの自由度があることを要請している。核子はスピン $1/2$ を持っているので、2 つの成分はスピンの異なる状態に対応させることを思いつくが、4 つというのはそのままでは理解できない。そこで、波動関数を

$$\psi(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} F(t, \vec{x}) \\ G(t, \vec{x}) \end{pmatrix} \quad (4-21)$$

のように上成分と下成分で表現し、ディラック方程式を二つの結合した微分方程式の形に書く：

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} F(t, \vec{x}) \\ G(t, \vec{x}) \end{pmatrix} \\ = \left(-i\hbar c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} mc^2 \right) \begin{pmatrix} F(t, \vec{x}) \\ G(t, \vec{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4-22)$$

この式は時間と空間座標について変数分離形をしているのでまず、時間の部分をその固有値を使ってあらわす。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, \vec{x}) \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) F(\vec{x}), \quad \frac{\partial}{\partial t} G(t, \vec{x}) \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) G(\vec{x}) \quad (4-23)$$

として (4-22) を次の連立方程式の形に表す：

$$\begin{aligned} EF(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x}) + mc^2 F(\vec{x}), \\ EG(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) - mc^2 G(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4-24)$$

ここで E は粒子のエネルギーである。そこで下成分を消去して上成分に代入すると次の方程式を得る：

$$EF(\vec{x}) = \left(\frac{-\hbar^2 c^2}{E + mc^2} \vec{\nabla}^2 + mc^2 \right) F(\vec{x}). \quad (4-25)$$

E を求めるために、一定の運動量をもった平面波の解 $F(\vec{x}) = \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}/\hbar)$ 等を代入すると

$$E = \frac{c^2 \vec{p}^2}{E + mc^2} + mc^2, \quad E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4-26)$$

となる。興味深いことに、この式からもエネルギーとして正の状態と負の状態が可能であることがわかる。すなわち、

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (4-27)$$

エネルギー固有値がわかったところで、一定の運動量を持った平面波に対応するディラック方程式 (4-12) の解を与えておく。 ψ の 4 成分は 4 つの自由度で区別されるべきで、そのうち 2 つはエネルギーの正負によって区別される。残りはスピン上下の自由度を使う。ハミルトニアンとの交換関係を使うと、スピンそれ自体は交換せず、スピンの運動量方向の成分 $\lambda \equiv \vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ が交換することがわかる。ここで \hat{p} は単位ベクトル $\vec{p}/|\vec{p}|$ である。この量は

ヘリシティーと呼ばれ、自由に運動するフェルミ粒子の状態をラベルするのにしばしば用いられる。より詳しい導出は他の教科書に譲ることにして、ここではその結果のみを与えることにしよう。以下 E は (4-27) のうち正の値を表すとする。正のエネルギー p_0 と運動量 \vec{p} をもつ平面波の解は

$$\psi(x) = u(\vec{p}, \lambda)e^{-ipx}, \quad u(\vec{p}, \lambda) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \end{pmatrix} \chi_\lambda, \quad (4-28)$$

負のエネルギー $-p_0$ と運動量 $-\vec{p}$ をもつ平面波の解は

$$\psi(x) = v(-\vec{p}, \lambda)e^{+ipx}, \quad v(-\vec{p}, \lambda) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_\lambda \quad (4-29)$$

によってそれぞれ与えられる。ここで χ_λ はヘリシティー $\lambda = \pm$ の 2 成分スピノルである。運動量の方向がスピンの量子化軸方向と同じ場合には、その方向を z 軸と定めて、

$$\begin{aligned} \vec{p} &= (p_x, p_y, p_z) = (0, 0, p) \\ \chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-30)$$

等のように表せる。(4-29) では運動量の符号に注意して欲しい。負のエネルギー解に対しては、 $e^{+ipx} = e^{iEt - i\vec{p} \cdot \vec{x}}$ なので v の引数は $-\vec{p}$ となっている。後に負のエネルギー解は反粒子と解釈されるが、この際には、 $+\vec{p}$ の向きに進む反粒子と解釈される。

以上見たように、1 個の核子を記述するためにはその座標空間における運動状態が同じでも、正のエネルギー状態として 2 つのスピンの状態と、負のエネルギー状態として 2 つのスピンの状態が存在する。特に負のエネルギー状態の持つ物理的な意味とその役割は、ディラック方程式が考案され 80 年経った今日でもしばしば議論・研究の対象になるが、当初ディラックは負のエネルギー準位が核子で完全に詰っている状態を我々の「真空」として定義した。したがって、この負のエネルギー状態に穴が開くとそこに一つの正エネルギー状態があることを意味している。この状態をディラックは反粒子の状態だと解釈した。したがって、全ての粒子は反粒子を持つという予言を行った。

4.4 ディラック方程式のスピン軌道力

スピン軌道力の議論のために中心力を導入する。クーロン力時には次のようなディラック方程式が書ける：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2 - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(t, \vec{x}). \quad (4-31)$$

このクーロン力の部分を $V(r)$ と書いて式の変形を行いたい。(4-22)で行ったのと同様に、変数分離をして

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp(-iEt/\hbar) \begin{pmatrix} F(\vec{x}) \\ G(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad (4-32)$$

と書いて $F(\vec{x})$ と $G(\vec{x})$ に対する連立微分方程式を書くと

$$\begin{aligned} EF(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} G(\vec{x}) + mc^2 F(\vec{x}) + V(r)F(\vec{x}), \\ EG(\vec{x}) &= -i\hbar c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) - mc^2 G(\vec{x}) + V(r)G(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4-33)$$

したがって、下成分の波動関数 G は上成分の波動関数 F を使って次のように書ける。

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{E + mc^2 - V(r)} (-i\hbar c) \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}). \quad (4-34)$$

この G を上の微分方程式に代入すると G が消去されて、次の F だけの2回の微分方程式を得る。

$$-\hbar^2 c^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} F(\vec{x}) + (mc^2 + V(r))F(\vec{x}) = EF(\vec{x}). \quad (4-35)$$

非常に興味深い方程式になるがこの後の処理のためには次の関係式を使う：

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B}, \quad (4-36)$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{x} \frac{d}{dr} f(r). \quad (4-37)$$

ただし、 $\hat{x} = \vec{x}/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で \vec{A} と \vec{B} は適当なベクトル量である。これらの関係式を代入すると次の式を得る。

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\hbar^2 c^2}{E + mc^2 - V(r)} \nabla^2 + \hbar^2 c^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{E + mc^2 - V(r)} \right) (\vec{r} \cdot \vec{\nabla} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{x} \times \vec{\nabla}) \right. \\ \left. + mc^2 + V(r) \right] F(\vec{x}) = EF(\vec{x}). \end{aligned} \quad (4-38)$$

さらに

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}, \\ \vec{l} &= \vec{x} \times \vec{p} = -i\hbar\vec{x} \times \vec{\nabla}\end{aligned}\quad (4-39)$$

を導入すると次のような微分方程式を得る：

$$\begin{aligned}-\left[\frac{\hbar^2c^2}{E+mc^2-V(r)}\nabla^2 - c^2\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{E+mc^2-V(r)}\right)\left(\hbar^2\vec{r}\cdot\vec{\nabla} - 2\vec{l}\cdot\vec{s}\right) + mc^2 + V(r)\right]F(\vec{x}) = EF(\vec{x}).\end{aligned}\quad (4-40)$$

この式から次のようなことが言える。第1項は $E - V \sim mc^2$ とするとシュレーディンガー方程式の運動エネルギーの項になる。第2項目はディラックの方程式から出てくるまったく新しい項であり、ダーウィン(Darwin)項と呼ばれる。 $\vec{l}\cdot\vec{s}$ を含む第3項はスピンと軌道角運動量が相互作用しているのでスピン軌道力と呼ばれる：

$$U_{so} = 2c^2\frac{1}{r}\frac{V'(r)}{(E+mc^2-V(r))^2}\vec{l}\cdot\vec{s}.\quad (4-41)$$

したがって、ディラックの方程式ではスピン軌道力が自動的に現れる。

このスピン軌道力が現象論的には非常に大きな量になるというのがメイヤーとヤンセンが発見したことであるが、逆の意味ではスピン軌道力が大きいことから原子核でも相対論の効果をかちんと取り扱う必要があることを意味している。原子核物理は殻模型の導入以来、多くの現象を理解するために非相対論で理論的に議論されてきたが、最近では相対論効果の重要性が指摘されている。

4.5 自然単位系と共变的に書かれたディラック方程式

物理学では単位は非常に重要である。通常は方程式を書くときには常に単位が右辺と左辺で等しいかどうかをチェックしながら方程式を書いていく。しかし、常に同じような定数を方程式の中に書き込んで計算するのも面倒な仕事である。特にディラック方程式では規約されたプランクの定数 $\hbar = h/(2\pi)$ と光の速度 c が随所に出てきて方程式が煩雑になっている。そこで熟練した物理学者(特に理論研究者)は非常に大胆な単位系を導入する。それは量子力学の定数である \hbar を1にし、相対論の定数である c を1にする単位系を導入する。こうすることにより煩雑な方程式をすっきりと表現することができる。

速度の単位を 1 と書くということは長さの単位と時間の単位を同等にするということである。さらに \hbar を 1 と書くということはエネルギーと時間の逆数の単位が同等であるということである。自然単位系で数値を計算する際に、以下の数値を書いておく：

$$\begin{aligned} c &= 3 \times 10^8 \text{m/s} = [\text{L}]/[\text{T}], \\ \hbar &= 6.6 \times 10^{-22} \text{MeV} \cdot \text{s} = [\text{E}][\text{T}], \\ \hbar c &= 197 \text{MeV} \cdot \text{fm} = [\text{E}][\text{L}]. \end{aligned} \quad (4-42)$$

特に最後の関係式を使うことにより必要な数値を得ることが可能である。たとえば陽子の質量を表現するのに $m = 5 \text{fm}^{-1}$ のように書かれることがある。これを我々の言葉で表現するには

$$\hbar c = 1 \quad (4-43)$$

なので、 $1 \text{fm}^{-1} = 197 \text{MeV}$ となる。これでも質量がエネルギーの単位になっているので気持ち悪いと思う場合には、この量に c^2 をかけると、本当にグラムの単位で表現できる。自然単位系は最初のうちは分かりにくいだが、慣れればこんなに便利なものは無い。

たとえばディラックの方程式を自然単位系で書くと

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi(t, \vec{x}) \quad (4-44)$$

となり、 \hbar と c が方程式に書かれていない分、式の本質が見えやすい。理論研究者はこの方をずっと好むが、実験研究者と話をするときにはすべての計算が終わった後で \hbar と c を含む形に表現しておくが良い。

次は、相対論の要請を考慮したい。そのために 4 元の長さ と 4 元の運動量を導入する。そのためにアインシュタインのエネルギーと運動量の関係を自然単位系で書く：

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2. \quad (4-45)$$

この式で p^2 を左辺に持っていくと

$$E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (4-46)$$

となるので。質量はローレンツ変換のもとでスカラー量であるため、 $E^2 - \vec{p}^2$ もスカラー量となる。 E と p は相対論的には同等の物理量となり、4 元の運動量を次のように導入するのが自然である：

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, \vec{p}). \quad (4-47)$$

ここで μ を上付きの添字で書くのは下付きの4元の運動量もあり、空間成分が負の符号を持つ：

$$p_\mu = (p^0, -p^1, -p^2, -p^3) = (E, -\vec{p}). \quad (4-48)$$

このように書くと上付きの運動量と下付きの運動量を掛けて μ で足し算すればスカラー量になる：

$$p^2 \equiv \sum_{\mu} p^\mu p_\mu = p^{0^2} - \vec{p}^2. \quad (4-49)$$

多くの場合、上下対の添字が現れると和をとることになるので、今後は足し算の記号を書かないで内積を表すことにする： $p^2 = p^\mu p_\mu$.

同様に時間と位置座標も4元の座標という形で導入する： $x^\mu = (t, \vec{x})$ 。その上で運動量の量子化の際に現れる4元の微分を次のように書く：

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right). \quad (4-50)$$

さらに4元の γ 行列を次のように定義する：

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = (\beta, \beta\vec{\alpha}). \quad (4-51)$$

これらを使うとディラックの方程式は次のように非常に見やすい形に書かれる。この形を共変形のディラック方程式とよぶ。

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0. \quad (4-52)$$

このとき、下付の4元ベクトルは上付きの4元ベクトルとミンコフスキー計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて次の関係で与えられる。

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4-53)$$

4.6 ディラックの方程式から導出されるカレント

共变的な形に書かれたディラック方程式から連続の方程式を導く。通常の方法に従って連続の方程式を導くと次のような簡単な形に書ける。

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4-54)$$

ここでベクトルカレント (電流) は

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4-55)$$

とかける。ここで $\bar{\psi}$ (プサイバー) は $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ で定義される。また γ_μ は 4×4 の行列であるが、 $\bar{\psi}$ と ψ ではさむことで 1 成分の数となる。ただしそれらは添え字 $\mu (= 1, \dots, 4)$ をもち、四元ベクトルを構成する。一般に $\bar{\psi}$ と ψ から構成される量を双スピノル (bispinor) と呼び、上のベクトルカレント $j^\mu \equiv j_V^\mu$ と合わせて、以下の 16 個の量を考えることが多い:

$$\begin{aligned} j_S &= \bar{\psi} \psi, \\ j_V^\mu &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \\ j_T^{\mu\nu} &= \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi, \\ j_{PV}^\mu &= \bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi, \\ j_P &= \bar{\psi} \gamma_5 \psi. \end{aligned} \quad (4-56)$$

ここで、新たに次のディラック行列を導入した:

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (4-57)$$

式 (4-56) の量はそれぞれ、スカラー、ベクトル、テンソル、軸性 (擬) ベクトル、擬スカラーと呼ばれる。

要約

1. シュレディンガー方程式を導出し、電流の保存を導いた。
2. 時間の 1 次の微分方程式を使うことによりディラック方程式を導いた。
3. 量子力学と相対論を使う時の便利な単位系として自然単位系を導入した。
4. ディラック方程式のカレント (電流) を導いた。全部で 5 種類の電流がある。

問題

1. ディラック方程式に関する以下の問題に答えよ。

- (a) 量子化の手続きを使ってシュレディンガー方程式を導出せよ。
 (b) ディラックの方程式を使って電流の保存則を導出せよ。
 (c) ディラックの方程式は波動関数が成分 ψ_i を持っているために、次のような連立の1階の偏微分方程式になっている。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_i = \sum_j M_{ij} \psi_j, \quad (4-58)$$

$$M_{ij} = (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2)_{ij}. \quad (4-59)$$

この式に

$$\psi_i = f(t) \phi_i(\vec{x}) \quad (4-60)$$

を代入し、両辺を $f(t) \phi_i(\vec{x})$ で割ると、時間の微分方程式を空間の微分方程式と分けることができる。このことにより、次のような空間だけの微分方程式を得ることを証明せよ。

$$\sum_j M_{ij} \phi_j(\vec{x}) = E \phi_i(\vec{x}). \quad (4-61)$$

(d) 以下の関係式を証明せよ：

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(r) &= \hat{x} \frac{d}{dr} f(r), \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} &= \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (4-62)$$

2. 相対論ではエネルギーと運動量の関係は

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (4-63)$$

によって与えられる。以下の問いに答えよ。

- (a) 量子化の手続き $E \rightarrow i\hbar \partial / \partial t$, $p_x \rightarrow -i\hbar \partial / \partial x$ を行うことにより、クライン・ゴルドンの方程式（以下 KG 方程式と書く）

$$\left(-\partial^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0, \quad \partial^2 = -\vec{\nabla}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4-64)$$

を求めよ。

(b) $\psi = N_0 \exp \frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)$ は平面波の波動関数である。これが KG 方程式の解である為の \vec{p} と E の関係を求めよ。

(c) KG 方程式から連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (4-65)$$

を求めよ。その時

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \\ \vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) \end{aligned} \quad (4-66)$$

となることを確かめよ。

3. 相対論的量子力学の方程式として作られた KG 方程式は、(1) 負エネルギー解をもつ、(2) 確率密度 ρ が正定値にならない、という困難を持つ。ディラックはこの困難を避ける為に時間・空間微分について 1 階の微分方程式を考えた。

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= H \psi, \\ H &= c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2. \end{aligned} \quad (4-67)$$

(a) 量子化の手続きで微分方程式の形に表せ。

(b) ディラック方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{imc}{\hbar} \beta \psi = 0 \quad (4-68)$$

の左側から

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \frac{imc}{\hbar} \beta \quad (4-69)$$

を作用させた式が KG 方程式と同一である為には

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= \beta^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \\ \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 0 \quad (j \neq k) \\ \alpha_j \beta + \beta \alpha_j &= 0 \end{aligned} \quad (4-70)$$

である必要がある。この事を示せ。

(c) $\vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha}$, $\gamma^0 = \beta$ として導入した $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ は

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4-71)$$

を満たすことを示せ。

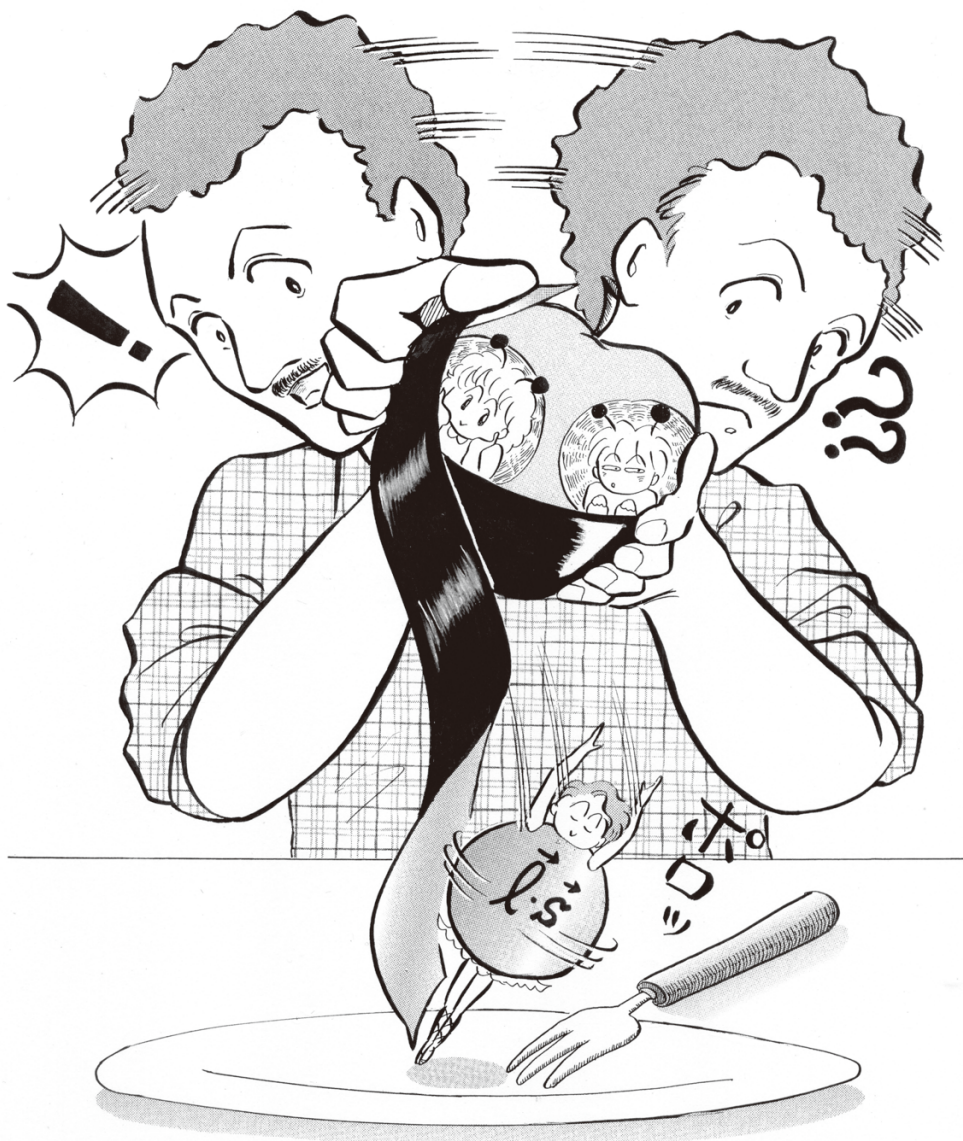
(d) γ 行列の積の一次独立な数は 16 個である。そのことから γ 行列は 4×4 の正方行列であると言える。 γ 行列が

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (4-72)$$

で、それぞれは 2×2 の行列で

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする時 α_i 及び $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ を書け。



一皮むけば見えてくるものもある

第5章 場の理論における核子と中間子

原子核のような多粒子系を扱うには場の理論を使うことが便利である。このことによつて、ディラック方程式やクライン・ゴールドン方程式に現れる負のエネルギー状態をどのように扱うかも理解できるようになる。この章では、最初に古典場の方程式の最も簡単な例として1次元の波動方程式を与え、そのラグランジアンを導入する。その後、原子核を扱う際に必要となる場のラグランジアンを与える。そして中間子を記述するスカラー場の量子化について説明する。

5.1 古典粒子の運動と古典場の理論

この節では場の理論を導入する。そのためには、お互いに連結された多くの（最終的に連続無限個の）粒子系を考えるのが便利である。粒子はお互いに相互作用を及ぼし合いながら、平衡点の周りで振動運動をするものとする。このときある点の粒子の振動が隣の粒子に次々に伝わっていく現象が波動に他ならないが、この波動を量子化することが場の量子論の問題である。

そこで、まず1粒子の振動運動を記述するラグランジアンを導入しよう。簡単のために、振動は1方向のみとしてその変位を表す変数を1個、 $\phi(t)$ という記号で表すことにする。これは時刻 t の関数である。この粒子のラグランジアンは次のように書ける：

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}k\phi^2. \quad (5-1)$$

このラグランジアンを時間で0から t まで積分した量を作用（action）とよび

$$S = \int_0^t L dt \quad (5-2)$$

その変分 $\delta S = 0$ 、すなわち作用 S を最小にする条件によってニュートン (Newton) の方程式を得る。これは最小作用の原理（またはハミルトン (Hamilton) の原理）とよばれ、解析力学の基本的な概念になっている。すなわち

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad (5-3)$$

を使うと

$$m\ddot{\phi} = -k\phi \quad (5-4)$$

の良く知られた、調和振動のニュートンの方程式を得る。

次にひもに等間隔 a で配置された多数の粒子の運動に着目しよう。ひもは張力 T で張られ各粒子はこの張力を受けるものとする (図 5.1 を参照)。また、ひもは伸びに対してフックの法則に従う復元力を与えるものとする。このとき、 i と $i+1$ 番目に着目して、その間のひもの長さを l とすると $l^2 = a^2 + (\phi_{i+1} - \phi_i)^2$ なので、この伸びによって余分に蓄えられたエネルギーは $(k/2)(\phi_{i+1} - \phi_i)^2$ と表すことができる。ここで $k = T/a$ は変位 ϕ に対する復元力の比例定数である。従って、系のラグランジアンとしては

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{\phi}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} k (\phi_i - \phi_{i+1})^2. \quad (5-5)$$

この式で ϕ_i についての作用の変分を取ると

$$m\ddot{\phi}_i = -k[(\phi_i - \phi_{i+1}) + (\phi_i - \phi_{i-1})] \quad (5-6)$$

となる。これは、各粒子に対する運動方程式である。

さて、ラグランジアン (5-5) を次のように書き直す：

$$L = \sum_i a \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\phi}_i^2 - \sum_i a \frac{1}{2} k a \left(\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{a} \right)^2. \quad (5-7)$$

ここで粒子の間隔を短くしながら粒子の数を増やす操作を行う。このとき、密度 $m/a \equiv \rho$ が一定になるように増やしていき、最終的に $a \rightarrow 0$ の連続極限をとる。そして粒子を識別するラベルとして場所の変数 x を用いる。和を積分に変えることによって、最終的に次のラグランジアンを得る：

$$L = \int dx \left(\frac{\rho}{2} \dot{\phi}(t, x)^2 - \frac{T}{2} \left(\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^2 \right). \quad (5-8)$$

ここで $T = ka$ を使った。このラグランジアンから構成できる作用

$$S = \int dt L \quad (5-9)$$

の変分をとり、

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(y, \vec{x})} = 0 \quad (5-10)$$

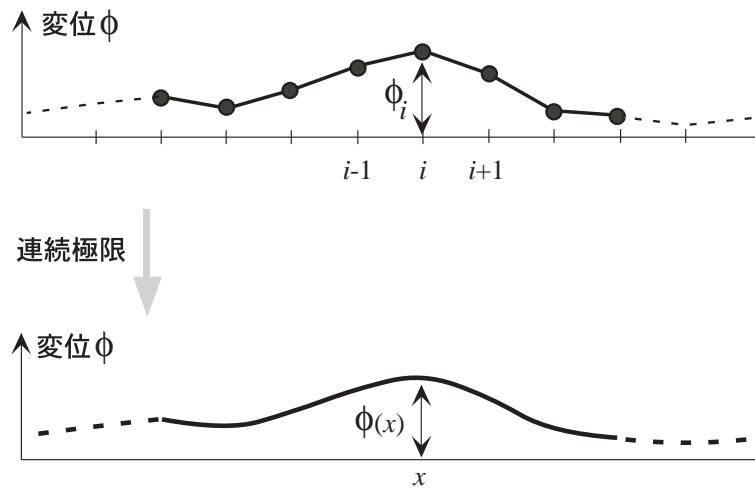


図 5.1: ひもにつけられた粒子の運動とその連続極限

とすることによって、連続的に並んだ粒子の運動（すなわちひもを伝える波）を記述する運動方程式を得る：

$$\rho \ddot{\phi}(t, x) = -T \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2}. \quad (5-11)$$

この方程式は場の理論の最も簡単な例になっている。

一般にひものように連続的に広がった系のラグランジアンは次のように表現される：

$$L(t) = \int_0^L dx \mathcal{L} \left(\phi(t, x), \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right). \quad (5-12)$$

\mathcal{L} の x -積分をしてラグランジアン $L(t)$ が得られるので、 \mathcal{L} はラグランジアン密度と呼ばれる。

この 1 次元のひもの運動を任意の次元に一般化することができる。例えば太鼓の表面を伝える振動を扱うには、2 次元の座標が必要になる。我々の空間は 3 次元なので、その空間を伝える振動の場合には 3 次元の座標が必要がある。したがって、3 次元空間を考えるならそこでのラグランジアン密度を使って、ラグランジアンは次のように書ける：

$$L(t) = \int_0^x d^3x \mathcal{L} \left(\phi(t, \vec{x}), \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial t}, \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial x}, \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial y}, \frac{\partial \phi(t, \vec{x})}{\partial z} \right). \quad (5-13)$$

ラグランジアンを時間で積分して作用は次のように書ける：

$$S = \int dt L(t) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (5-14)$$

ここで、4 つの時間・空間微分 $\partial \phi / \partial t, \partial \phi / \partial \vec{x}$ をまとめて $\partial_\mu \phi$ と書いた。この作用の変分 $\delta S = 0$ を取ると場の変数 $\phi(t, \vec{x})$ に対する次のオイラー・ラグランジュ (Euler-Lagrange)

方程式を得ることができる：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (5-15)$$

5.2 場の量子論におけるラグランジアン

前節で古典力学の波動方程式が、ラグランジアンから最小作用の原理によって得られることを見た。波動方程式の特徴は、変位が時間と場所の関数であるということである。一方で量子力学の方程式も空間の各点での波動関数を与える方程式になっている。古典力学の場合と同様に、量子力学の場合でもラグランジアンを使って運動方程式を導出することが可能である。

例えばディラック方程式を与えるラグランジアン密度は次のように書ける：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi. \quad (5-16)$$

ただし、これからは自然単位系を使って方程式などを書いていく。実際にこのラグランジアンにオイラーラグランジュ方程式を適用することでディラック方程式が得られる：

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0. \quad (5-17)$$

後の議論で登場するのでさらにクライン - ゴルドン方程式を与えるスカラー粒子のラグランジアンを与えておくと次のようになる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2. \quad (5-18)$$

このラグランジアンから次のクラインゴルドン方程式が得られる：

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (5-19)$$

さらに電磁場の方程式はマックスウェル (Maxwell) 方程式だが、その方程式を与えるラグランジアンは

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5-20)$$

と書くことができる。このラグランジアンから得られるのはマックスウェルの方程式である：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (5-21)$$

ここに現れる $F_{\mu\nu}$ は電磁場のテンソル場と呼ばれており、電磁場の4元ベクトルポテンシャル A_μ を用いて次のように書ける：

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (5-22)$$

このゲージ場から作られる反対称テンソルと電場・磁場の関係は次のように与えられる：

$$F^{0i} = -E_i, \quad (5-23)$$

$$F^{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k. \quad (5-24)$$

このゲージ理論を扱うにはゲージ固定を行う必要があるが、この本の主題ではないので別の教科書に細部を譲る。

5.3 実スカラー場の理論の正準量子化

この節では場の量子化を解説する。場の方程式の導入では、系を多数の振動子の集合として扱ったので、それぞれの振動子を量子化すれば良いことが想像できる。実際そのようにすることが可能であり以下そのことを見ていく。音や電波などの波動の場合にそうであったように、1点のみの振動の代わりに、全体が一定の周波数で振動する固有モード（平面波）を扱うのが便利である。これは特定の場所のみが振動するモードをフーリエ変換したモードになっている。量子論では、これは一定の運動量をもった状態に対応する。

これらの事柄を具体的にみるために、まず、最も簡単なクラインゴールドン場の場合を考えることにする。ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 \quad (5-25)$$

と書ける。場 $\phi(x)$ をパラメータ \vec{x} を含んだ一般座標（正準座標）と考える。それに正準共役な運動量は次のように得ることができる：

$$\pi(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(t, \vec{x})}. \quad (5-26)$$

従って、正準運動量は次のようになる：

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x). \quad (5-27)$$

場を量子化する手続きは、まず初めにこの正準座標 $\phi(x)$ と正準運動量 $\pi(x)$ を演算子とみなし、それらの間に同時刻の正準交換関係を設定することから出発する：

$$\begin{aligned} [\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] &= i\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] &= [\pi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = 0. \end{aligned} \quad (5-28)$$

これらの正準座標と正準運動量は時空点 x の関数であるので、いわば、空間の1点 \vec{x} で振幅 $\phi(t, \vec{x})$ が時間 t の関数として振動する様子を表している。上で述べたように、これを空間全体に広がった一定の運動量をもつ平面波で扱うために、これらを平面波解で展開する：

$$\phi(x) = \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{k}}}} [a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{+ikx}]. \quad (5-29)$$

ここで $E_{\vec{k}} = k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$, $kx = k^\mu x_\mu = k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x}$ である。この方程式では ϕ はエルミートであり $\phi^\dagger = \phi$ を満足している。さらに正準運動量は $\pi = \dot{\phi}$ なので、

$$\pi(x) = \int d^3k \frac{-ik^0}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\vec{k}}}} [a(\vec{k})e^{-ikx} - a^\dagger(\vec{k})e^{+ikx}] \quad (5-30)$$

となり、この場合も $\pi^\dagger = \pi$ である。

従って、演算子の $a(\vec{k})$ と $a^\dagger(\vec{k})$ は $\phi(x)$ と $\pi(x)$ で表現できる：

$$a(\vec{k}) = \int d^3x \frac{e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2k^0}} [k^0 \phi(0, \vec{x}) + i\pi(0, \vec{x})], \quad (5-31)$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int d^3x \frac{e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2k^0}} [k^0 \phi(0, \vec{x}) - i\pi(0, \vec{x})]. \quad (5-32)$$

交換関係を使って

$$[a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (5-33)$$

従って、 $a(\vec{k})$ と $a^\dagger(\vec{k})$ は運動量 \vec{k} でエネルギーが $E_{\vec{k}}$ を持つ粒子の消滅と生成演算子と解釈する。このようにして粒子描像を導いたことになる。真空は

$$a(\vec{k})|0\rangle = 0 \quad (5-34)$$

で定義する。さらに粒子がいくつか存在する状態は、真空 $|0\rangle$ に $a(\vec{k})^\dagger$ をいくつか作用させることで構成することができる。今の場合には、どの運動量を持った粒子がいくつ存在するかというように表す。例えば、運動量 \vec{k} の粒子が1個存在する状態は

$$|\vec{k}\rangle = a(\vec{k})^\dagger |0\rangle \quad (5-35)$$

である。また一般に、運動量 \vec{k}_1 の粒子が n_1 個、運動量 \vec{k}_2 の粒子が n_2 個、、、ある状態は

$$(a(\vec{k}_1)^\dagger)^{n_1} (a(\vec{k}_2)^\dagger)^{n_2} \dots |0\rangle \quad (5-36)$$

のように表すことができる。

以上、平面波展開による場の量子化の方法を紹介したが、この手続きで本質的な点は、平面波は相互作用のない自由なハミルトニアン固有関数であるということである。従って、完全系であればどのようなものを用いても、場の量子化を行うことができる。このことは後の章で実際に原子核の問題を解く際に採用する。原子核は大きさをもった有限系なので、無限に広がった平面波よりも有限な広がりを持つ完全系を考えるのが便利なのである。

5.4 場の理論における相互作用

この段階でディラック粒子と電磁場の相互作用を導入する。現在の物理学において最も重要な概念はゲージ原理である。この原理の基本的な考え方の出発点は、粒子の運動は量子力学で記述され、物理量は波動関数の絶対値の2乗で与えられるということである。したがって、波動関数に位相をかけても物理量は変化しない：

$$|\psi|^2 = |e^{i\theta}\psi|^2. \quad (5-37)$$

しかもその位相変換を場所ごとに独立に行うことが可能である。すなわち、 θ を時空点 x_μ の関数とすることができる。この場所に依存したゲージ変換をディラックのラグランジアンを行う。結果は次のようになる：

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - \gamma_\mu\partial^\mu\theta - m)\psi. \quad (5-38)$$

したがって、このラグランジアンはゲージ変換で変化する。すなわちゲージ不変性が成り立たない。そこで、次のように変化するゲージ場を導入する：

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu\theta. \quad (5-39)$$

このゲージ場を使ってディラックのラグランジアンを書くと次のようになる：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi. \quad (5-40)$$

このゲージ場はベクトル粒子であり、電磁場のラグランジアンを付け加えることにより、電磁場を与えるゲージ場という解釈を与えることが可能になる。この全体のラグランジアンはゲージ理論の典型的なものである：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - e\gamma_\mu A^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (5-41)$$

このなかで、 $-e\bar{\psi}\gamma_{\mu}A^{\mu}\psi$ はディラック粒子と相互作用を媒介するボソンとの結合を示すラグランジアンが、どのように書かれるべきかを示す具体例となっている。すなわちディラック粒子のベクトル(電)流 $\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$ と光のベクトル場 A^{μ} とが内積の形で結合し、全体としてスカラー量を作っている。このような例の2つ目は、スカラー流 $\bar{\psi}\psi$ とスカラー粒子 σ が結合することによりできる。これらの他に3つ、従って合計5つの相互作用の形を考えることができる。これらのまとめると表 5.1 のような相互作用を得ることができる。

表 5.1: 核力に寄与する重要な中間子の性質と相互作用の形

中間子	スピン	アイソスピン	質量	相互作用の形
σ	0^{+}	0	500 MeV	$\bar{\psi}\psi\sigma$
ω	1^{-}	0	780 MeV	$\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\omega^{\mu}$
δ	0^{+}	1	980 MeV	$\bar{\psi}\tau^a\psi\delta^a$
ρ	1^{-}	1	770 MeV	$\bar{\psi}\tau^a\gamma_{\mu}\psi\rho^{a\mu}$
π	0^{-}	1	139 MeV	$\bar{\psi}\tau^a\gamma_5\psi\pi^a$

5.5 アイソスピンとフレーバー

原子核の理論を作るにはアイソスピンという概念を理解する必要がある。原子核は陽子と中性子からできている。これらの粒子は電荷だけが違っており、質量はほとんど変わらない。核力を媒介するパイオンも3種類(+, -, 0)の電荷が異なる粒子があるが、それらの質量も近似的にほぼ同じである。質量が同じということから、これらの粒子のあいだには対称性があると考えることができる。すなわち、それらの粒子を同一粒子の別の状態として扱うことができる。

同一粒子に異なるスピン状態があるのと同様に、同一粒子に異なる荷電状態があるとする。このときスピンとの類似で、異なる荷電状態を区別するためにアイソスピンという概念を導入する。そしてスピンは系に回転対称性があることの帰結であるのと同様に、アイソスピンは系に(内部)荷電対称性があることの帰結であると考えられる。以下では、荷電対称性のことをアイソスピン対称性とよぶ。陽子と中性子はアイソスピンの大きさを $1/2$ として、その z 成分を $+1/2, -1/2$ として区別することができる。同様にパイオン ($\pi^{+}, \pi^{0}, \pi^{-}$) はアイソスピンの大きさを 1 として、その z 成分を $+1, 0, -1$ として区別することができる。

アイソスピン対称性は、数学的にはスピンの同様の代数で表現することができる。スピンの代数は $SU(2)$ のリー代数と言われて、スピン演算子（群論の言葉では生成元）の間に成り立つ次の交換関係で特徴づけられる：

$$[s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k. \quad (5-42)$$

スピン演算子 s_i は一般に行列で表現することができるが、最も次元の低い簡単なものは 2×2 の場合で、それらはパウリのスピン行列によって $s_i = \sigma_i/2$ で関係づけられスピン $1/2$ の状態（2成分スピノル）に作用する。

スピン演算子の固有値は、全てのスピン成分と可換であるカシミア（Casimir）演算子である s^2 の期待値と s_z で表現できる（ $j = 1/2, m = \pm 1/2$ ）：

$$s^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle = \frac{3}{4}|jm\rangle \quad (5-43)$$

$$s_z|jm\rangle = m|jm\rangle. \quad (5-44)$$

スピンの大きさが $1/2$ のとき、その z -成分が $1/2$ の状態が上向きスピン状態で、 $-1/2$ の状態が下向きスピン状態を表す。

アイソスピンの場合にも、以上のスピンの関係式をそのまま使うことができる。記号として、 s_i や σ_i のかわりに t_i や τ_i を用いることが多い。アイソスピンの概念は原子核や素粒子の世界でしか登場しない。そこには強い相互作用をする基本的な粒子として、6種のクォークが存在することが知られている。アイソスピンという概念は、この6種類を分類するフレーバーという内部自由度の一部であると考えられている。

ここでスピンとアイソスピンを持った状態をどのように表記するかについて、陽子と中性子の場合を例にとりて簡単に触れておくことにする。これらは核子としてアイソスピン空間で2成分のスピノルを構成する。その波動関数を

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \quad (5-45)$$

のように表すと、 p, n がそれぞれ4成分のディラックスピノルとなる。 $\bar{\psi}$ は

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0 = (p^\dagger, n^\dagger) \gamma_0 = (p^\dagger \gamma_0, n^\dagger \gamma_0) = (\bar{p}, \bar{n}) \quad (5-46)$$

などのようにする。すなわち、アイソスピン空間とスピン（ディラック）空間の演算は独立に行えばよい。行列要素の計算の例として $\bar{\psi} \gamma_\mu \tau_1 \psi$ を考えてみる。まずアイソスピン行列の計算を行う。このときディラック行列は定数のように扱う：

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \tau_1 \psi = (\bar{p}, \bar{n}) \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \bar{p} \gamma_\mu n + \bar{n} \gamma_\mu p \quad (5-47)$$

次に p, n を4成分のディラックスピノルとして計算を進めればよい。

このアイソスピンという自由度まで導入すると、原子核物理で必要な全ての数学的な道具がそろったことになる。パイオンはアイソスピンが1の粒子であるが、他にアイソスピンのゼロの中間子も存在する。一般的に中間子は、スピンとアイソスピンによって区別することができる。同様に、核子から作られる各種の電流にもアイソスピンが0もしくは1、スピンが0もしくは1のものを構成することができる。スピンが0もしくは1のスカラー流もしくはベクトル流を構成するには、すでに見たように、1もしくは γ_μ を $\bar{\psi}$ と ψ ではさんでやればよい。同様に、アイソスカラー流やアイソベクトル流を構成するには、アイソスピン演算子(パウリ行列)を $\bar{\psi}$ と ψ ではさんでやれば良い。これら全ての中間子とその性質、さらにそれらが核子と相互作用する形(相互作用ラグランジアン)を表5.1に示す。これらをもとに、核力を構成することができる。その方法は6章で詳しく見ることにする。

要約

1. 古典場の方程式として、1次元の弦、ディラック場、電磁場の方程式を導入した。
2. 場の量子化を行った。
3. 核子(フェルミオン)と中間子(ボソン)の相互作用の形を導入した。核子のカロントの形とその構成法をみた。
4. アイソスピンの概念を導入し、スピンと同じ代数に従うことをみた。

問題

1. ラグランジアンから運動方程式を導きたい。
 - (a) ラグランジアン密度が次の様に与えられている：

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)). \quad (5-48)$$

このとき、ラグランジアンと作用はどのように書けるか。また作用の変分が 0 となることを使ってオイラー・ラグランジュの方程式を導け：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (5-49)$$

(b) ディラック粒子のラグランジアン密度は次の様に与えられる：

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi(x). \quad (5-50)$$

ただし $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ 。このとき、 $\bar{\psi}(x)$ もしくは $\psi(x)$ で変分しそれぞれの場合に同じディラック方程式が導かれることを確かめよ。

(c) スカラー粒子のラグランジアン密度は次の様に与えられる：

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}m_S^2 \phi^2. \quad (5-51)$$

ϕ で変分をとってクライン・ゴールドン方程式を導け

(d) ベクトル中間子や光子は次のマックスウェル方程式に従う：

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \quad (5-52)$$

ただし A_μ はベクトルポテンシャルである： $(\phi, \vec{A}) = A^\mu$ 。 A_μ で変分を行い運動方程式を導け。これは、相対論的に共変な形で書かれたのマックスウェル方程式である。 $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ を電場 \vec{E} と磁場 \vec{H} で表し、4つのマックスウェル方程式を導け。

2. スカラー粒子の第二量子化を考える。

(a) スカラー粒子の場が次のように平面波で展開される。

$$\phi(x) = \int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_k}} [a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{+ikx}]. \quad (5-53)$$

この時に正準運動量はどのように表されるかを書け。この際に $E_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ である。

(b) この際に場の展開の係数である $a(\vec{k})$ および $a^\dagger(\vec{k})$ は次のように書けることを示せ。

$$a(\vec{k}) = \int d^3x \frac{e^{-i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2k^0}} [k^0 \phi(0, \vec{x}) + i\pi(0, \vec{x})], \quad (5-54)$$

$$a^\dagger(\vec{k}) = \int d^3x \frac{e^{+i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2k^0}} [k^0 \phi(0, \vec{x}) - i\pi(0, \vec{x})]. \quad (5-55)$$

ただし、 $k^0 = E_k$ である。

- (c) スカラー場とその正準運動量の交換関係を使って、これらの係数の交換関係を求めよ。(本文の(5-33)を参照)
- (d) 二粒子状態をこの生成演算子 $a^\dagger(\vec{k})$ を真空 $|0\rangle$ に演算することにより求めよ。その際に同じ量子状態に二つの粒子を持った状態も許されることを示せ。



電磁場の荒波乗り越えて

第6章 原子核の相対論的記述

第5章までで原子核物理を記述するのに必要な全ての概念を導入した。この章では原子核を実際に記述することを試みる。特に原子核を相対論的な量子力学が支配する系としてとらえる。このようにする強い動機は原子核の構造を記述するのに強いスピン軌道力を必要とすることである。また、たくさんの粒子を扱うことも必要となるからである。

6.1 原子核の σ - ω 模型

原子核を相対論的に記述するために必要最小限の中間子を含む原子核物理のラグランジアン密度を導入する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m - g_{\sigma}\sigma - g_{\omega}\gamma_{\mu}\omega^{\mu})\psi \\ & + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma - \frac{1}{2}m_{\sigma}^2\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\omega}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu} \end{aligned} \quad (6-1)$$

ここで核子 ψ はフェルミオンでディラックの方程式に従う粒子、シグマ中間子 σ は実スカラー粒子でクラインゴールドン方程式に従う粒子、オメガ中間子 ω_{μ} は質量を持ったベクトル粒子で、質量項を考慮したマックスウェルの方程式に従う粒子である。これらの粒子はお互いに相互作用しているが、その際にそれぞれの中間子のローレンツ変換の性質と核子で作られるカレントの性質とが一致している。そして全体としてローレンツスカラーの形のラグランジアンになっている（表 5.1 を参照）。

この模型は σ 中間子と ω 中間子が核子と相互作用する形になっているので σ - ω 模型と呼ばれる。最終的に原子核の質量や半径などを忠実に記述するためにはさらにこのラグランジアンに新しい項を付け加える必要があるが、この σ と ω の入ったラグランジアンで原子核物理のほとんどの本質的な概念を理解することが可能である。この式で、 ω 中間子の2つの項の符号が、 σ 中間子の項のそれと逆になっていることに注意してほしい。 σ の場合には粒子数が増えるとエネルギーが質量分だけ増える。一方 ω の場合には、4つの成分のうち実の粒子として物理的に意味のあるのは空間成分で、確かにその場合には実の粒子の数がひとつ増えるとエネルギーが増えるようになっている。

相対論的な系を量子力学的に扱うには、ラグランジアン密度の中に現れる場を量子力学的演算子とみなす必要がある。その自由度は座標 \vec{x} でラベルされるように連続無限個あり、それらすべてを量子化する必要がある。このような系の量子化を定式化したのが場の量子論であり、スカラー（ボソン）場の場合について前章で紹介した。

原子核の場合、非相対論的な枠組みでは核子数 A 個の有限多体系の問題として取り扱うことができる。一方相対論的に記述しようとする、真空を占有する負エネルギー状態を扱う必要性から、無限個の自由度を扱うことになる。従って一般的に問題の扱いが非常に難しくなる。このような多体系の場の理論を簡便に取り扱う方法として、平均場の方法がしばしば用いられる。特に基底状態を求める際には有効である。この方法を σ - ω 模型の場合に見てみる。対象は A 個の核子からなる原子核である。まずボソン場に対して、量子力学的な揺らぎを平均化した「平均場」を用いる。すなわち、次の置き換えをする：

$$\begin{aligned}\langle \sigma \rangle &= \sigma \\ \langle \omega^\mu \rangle &= \delta^{\mu,0} \omega\end{aligned}\quad (6-2)$$

この式でブラとケットは原子核の基底状態における期待値を表し、球形の原子核の場合、 σ と、 ω 中間子の 4 元ベクトルの時間成分が有限の値をとり得る。 ω 中間子の空間成分は、空間の対称性から有限な値をとることはできない。量子論では、場の演算子に有限の期待値を与える状態はコヒーレント状態といわれて複雑な形になる。簡単な場合を 10 章で議論するが、この章では、場の演算子を期待値である定数に置き換えるということだけで十分である。

期待値 σ と ω が従うオイラー・ラグランジュの運動方程式は

$$(-\vec{\nabla}^2 + m_\sigma^2)\sigma = -g_\sigma \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (6-3)$$

$$(-\vec{\nabla}^2 + m_\omega^2)\omega = g_\omega \langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle \quad (6-4)$$

で与えられる。これらの方程式で $\bar{\psi}\psi$ を含む項が現れるが、それについても核子の基底状態の期待値を取る。そこでこれらの期待値をどのように計算したらよいか問題になる。そのためにまず ψ が満足する運動方程式を考える：

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m - g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_0 \omega)\psi = 0 \quad (6-5)$$

この式は、 $\bar{\psi}$ で変分をとったオイラー・ラグランジュ方程式として得られる。これらの方程式において σ と ω は (6-2) 式で与えられる平均場である。この方程式を満足する演算子 ψ を求め、それによって構成される量 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ 等を原子核に対して計算するために、核子（フェルミオン）の量子化の方法を次の節で説明する。

6.2 第二量子化

核子のようなフェルミオンを扱う場合の量子化の手続きの話をする。前章で見たように、粒子の量子力学では座標 \vec{x} を時間の関数として量子化し、その \vec{x} を変数とする波動関数を導入する。この際、粒子数は常に 1 個と決まっていたその数が変化することはない。ところが原子核や素粒子の問題では、多粒子の関わる現象や粒子の生成消滅を伴う現象が日常茶飯事に起こる。これらの扱いを可能にするのが場の量子化の方法である。量子力学では 1 粒子の運動を量子化するのに対して、場の量子化では無限個ある場の自由度を量子化する。その際粒子数の変化という概念が自然に導入されることになる。歴史的には電子の波動関数（場）を再度量子化し多電子の問題を扱うことになったので、第二量子化ともよばれる。

場の量子化の方法をディラックのフェルミオン場の場合にみってみる。前章、スカラー場の量子化の場合には、演算子 $\phi(x)$ を平面波で展開したが、一般には完全系であれば何でもよい。大きさを持った有限核の場合には、有限な広がりをもったポテンシャル中での完全系を採用してもよい。ここではどのような場合でも適用できるような表現を採用する。

まず次のディラック方程式とその解（エネルギー固有状態） ψ_i を考える：

$$(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta(m + U) + V)\psi_i(x) = E_i\psi_i(x), \quad (6-6)$$

U, V はスカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャルである。ここでその形を特定する必要はないが、例えば (6-5) と比較すると、

$$U = g_\sigma \sigma, \quad V = g_\omega \omega \quad (6-7)$$

である。また、ポテンシャルといっても場所に依存する関数の場合や全空間で一様な定数の場合など、いろいろなものを考えることができる。式 (6-6) で ψ_i は完全性と直交性を満足する。この完全性を持っている ψ_i を用いて場の演算子である ψ を展開する。この際に正のエネルギーを持っている状態を $\psi_i^{(+)}$ 、また負のエネルギーを持っている状態を $\psi_i^{(-)}$ と書くことにする。

$$\psi(x) = \sum_i \left[b_i \psi_i^{(+)}(x) + d_i^\dagger \psi_i^{(-)}(x) \right] \quad (6-8)$$

ψ に共役な場を π とかく。それは次の式により ψ で表現することができる：

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = i\bar{\psi}\gamma_0 = i\psi^\dagger \quad (6-9)$$

ψ と同様に π を ψ_i の完全系で展開することができる :

$$\pi(x) = i \sum_i \left[b_i^\dagger \psi_i^{(+)}(x)^\dagger + d_i \psi_i^{(-)}(x)^\dagger \right] \quad (6-10)$$

この π と ψ は共役な量なので量子化の条件を課することが可能である。この際に普通には交換関係を使うが、フェルミオンということで反交換関係を導入する。

$$\{\psi(x), \pi(y)\}_{\text{equal time}} = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (6-11)$$

$$\{\psi(x), \psi(y)\}_{\text{equal time}} = 0 \quad (6-12)$$

$$\{\pi(x), \pi(y)\}_{\text{equal time}} = 0 \quad (6-13)$$

これらは同時刻 (equal time) における反交換関係である。すなわち、 $x_\mu = (t_x, \vec{x}), y_\mu = (t_y, \vec{y})$ において $t_x = t_y$ のときに成り立つものとしている。この反交換関係を使うと、展開係数の間に次の反交換関係を得ることができる :

$$\{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{i,j} \quad (6-14)$$

$$\{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} = \{b_i, b_j\} = 0 \quad (6-15)$$

これと同様の関係が d に対しても成り立つ。この反交換関係で与えることができる演算子は粒子の生成や消滅の意味を持つ。そこでこれらの演算子が演算する状態 (真空) を次のように定義する。まずは真空状態 $|0\rangle$ は

$$\left. \begin{array}{l} b_i |0\rangle = 0 \\ d_i |0\rangle = 0 \end{array} \right\} \text{for all } i \quad (6-16)$$

と定義する。真空に粒子消滅の演算を行おうとしてもそこには粒子も反粒子も存在しないので「粒子を消す」という演算ができない。このように演算が不可能な場合には右辺を 0 と書く。一方、真空に粒子を 1 個加えることは可能で 1 粒子状態を作る :

$$b_i^\dagger |0\rangle = |i\rangle \quad (6-17)$$

2 粒子状態を作るにはもう一度粒子を生成する演算子を演算する。

$$b_j^\dagger |i\rangle = |j, i\rangle \quad (6-18)$$

ここで先ほどの量子化の手続きが重要な意味を持つ。すなわち量子数が等しいとき ($i = j$) には二粒子状態はゼロとなる。2 粒子が同じ量子状態に入れられないというパウリ効果をこの

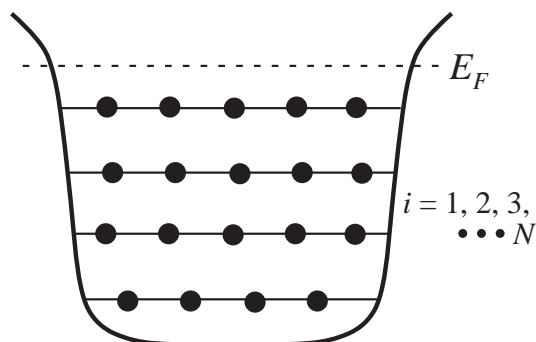


図 6.1: A 個の核子が下の軌道から順に占有して原子核状態を作る様子。一番上の準位をフェルミ準位といい、そのエネルギーを E_F で表す。

ようにして表現することができる。これはフェルミオン場の量子化を反交換関係で定義したことによる。当然この生成の演算を逐次に行っていくとどんな多体状態も作ることが可能である。

原子核の基底状態は次のように作る。核子は一番エネルギーの低い順位のレベルから順に入っていく、与えられた粒子数のレベルまで入る。その一番上の状態をフェルミレベルといい E_F でラベルすることにする。したがって、原子核の基底状態はフェルミレベルまで核子が詰った状態といえる。核子の総数を A としてその状態を $|\Psi_0\rangle$ と表せば、

$$|\Psi_0\rangle = \prod_{i=1}^A b_i^\dagger |0\rangle \quad (6-19)$$

$|\Psi_0\rangle$ は生成演算子と消滅演算子を使って次のようにうまく表現できる。

$$b_i |\Psi_0\rangle = 0 \text{ for } E_i > E_F \quad (6-20)$$

$$b_i^\dagger |\Psi_0\rangle = 0 \text{ for } E_i < E_F \quad (6-21)$$

これですべて必要な道具がそろったことになる。次の章では実際に原子核の束縛エネルギーを計算してみよう。

6.3 核物質の性質

平均場近似の範囲で原子核の性質を計算する。まず最初に核物質の性質を σ - ω 模型で計算する。核物質は無限に大きな系であり、その特徴は σ と ω の平均場は場所によらないで一定であるということである。無限系のエネルギーを計算するためにラグランジアン密度から次の関係式に従って、ハミルトニアンを計算する。

$$\mathcal{H} = \sum \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} \quad (6-22)$$

この関係式によって得られる平均場近似のハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m + \beta g_\sigma \sigma + g_\omega \omega)\psi + \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega^2 \quad (6-23)$$

である。このハミルトニアンに平面波で展開した ψ を代入する。これにより生成・消滅演算子でハミルトニアンが表現される。この段階で興味深いことがわかる。即ち、負のエネルギー状態の全てのエネルギーを足し合わせることを要請している。これはディラック方程式を核子の従うべき方程式と仮定したときからの必然的な結果である。全ての状態のエネルギーを足し上げるので無限大の値になる。この負のエネルギーの足し合わせは真空の時でも同じように起こる。全てのエネルギーを真空のエネルギーを基準として表現することにする。この事情は密度に関しても同じである。この定式化は可能であり物理量の規格化をきっちりと行う必要がある。しかしこの本では話を単純にするためにこの負のエネルギーの寄与を無視することにする。このような取り扱いを負のエネルギー状態を考慮しない相対論的平均場近似と呼ぶ。これまでの原子核構造の研究ではこの近似がよく使われてきた。

正のエネルギー状態だけを扱う近似と平均場近似のもとでの核物質のハミルトニアン密度を核子と反核子の生成演算子と消滅演算子を使って書くと次のようになる：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{V} \sum_i E_i (b_i^\dagger b_i - d_i^\dagger d_i) + \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2}m_\omega^2 \omega^2 \quad (6-24)$$

ここで σ と ω を求める方程式は次のように書ける：

$$\sigma = -\frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (6-25)$$

$$\omega = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \langle \psi^\dagger \psi \rangle \quad (6-26)$$

この際に核子が V の体積の中につまっているとしている。従って正のエネルギーを持つ波動関数は

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} u_{\vec{k}, \lambda} e^{-ikx} \quad (6-27)$$

のように書ける。ここで4章の式(4-28)とは、規格化因子 $1/\sqrt{V}$ の分だけ異なっていることに注意して欲しい。そこで σ と ω を計算する為には上式右辺にあらわれる密度 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 等を計算する必要がある。それらは次のように書ける：

$$\rho = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \frac{4}{V} \sum_i 1 = 4 \int^{k_F} \frac{1}{(2\pi)^3} d^3k \quad (6-28)$$

$$\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \frac{4}{V} \sum_i \frac{m^*}{E_i} = 4 \int^{k_F} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m^*}{E} d^3k \quad (6-29)$$

ここで有効質量とフェルミ運動量はそれぞれ

$$m^* = m + g_\sigma \sigma, \quad k_F = \sqrt{E_F^2 - m^{*2}} \quad (6-30)$$

によって定義される。さらに無限系の場合には運動量が良い量子数になるので、足し算を連続の極限として積分に置き換えてある。この密度とフェルミ運動量の間係を書くと

$$\rho = 4 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 \quad (6-31)$$

従って、 $\rho = 0.17 \text{fm}^{-3}$ の時にはフェルミ運動量は $k_F = 280 \text{MeV}$ となる。

この際に無限系を議論するために空間に長さが L の立方体を考え、質量 m の粒子がそこに詰まっていると考える。箱の中では運動量が良い量子数となり、次のように飛び飛びの値をとる：

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_x \quad (6-32)$$

そのエネルギー（固有値）は次の値をとる：

$$E(k) = E_{n_x, n_y, n_z} = \sqrt{m^{*2} + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \quad (6-33)$$

従って、運動量としてはフェルミ運動量 k_F まで粒子が詰まっている状態の足し上げは L が無限に大きいとして積分に置き換えることが可能である。

$$\sum_i = L^3 \int^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (6-34)$$

さらに無限系では単位体積あたりで表現することが適当であるので、上の置き換えで L^3 で割るとエネルギー密度や核子密度を得ることができる。上記の密度の計算ではこの手法を使ってある。従って、無限系の場合の足し合わせは次の置き換え $\frac{1}{V} \sum_i \rightarrow \int^{k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ を行う。これで全ての準備が整ったので最後のエネルギー密度 E の表現を行う：

$$E = E_N + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^2 \quad (6-35)$$

$$E_N = 4 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E(k). \quad (6-36)$$

ここで $E(k)$ は $E(k) = \sqrt{m^{*2} + \vec{k}^2}$ である。

この表現を使って無限系である核物質のエネルギーを計算することができる。この結果を適当なパラメータを採用して計算すると次の図 6.2 のようになる。この際にラグランジアンの中のパラメータとして密度が 0.17fm^{-3} でその時の束縛エネルギーが 16MeV になる

ように決めてある。この際のパラメーターの値は $g_\sigma = 10.5$ ($m_\sigma = 520\text{MeV}$) と $g_\omega = 13.8$ ($m_\omega = 783\text{MeV}$) である。密度が低いところは相互作用が効かないことから核子の運動から生じ、密度の $2/3$ 乗で最初は増加する。その後、密度が増加し核子間の距離が相互作用の領域に入った段階でエネルギーが負になり、さらに飽和密度のところからより大きな密度になれば核子あたりのエネルギーは増加し正の値に転じる。この増加するメカニズムは相対論的な起源を持っている。従って、密度が 0.17fm^{-3} の所で最も核子あたりのエネルギーが小さくなる。

この結果は原子核を理解する意味で次の重要な意味を持っている。密度が原子核の中心部の大きさとなるところで核子あたりのエネルギーが一番低くなる。その値は 16MeV である。原子核の質量数 A が無限に大きな原子核ではこの飽和密度を取るということになる。実際の原子核は表面を持っているので密度は必然的に減少する必要がある。従って、原子核の質量は体積項と表面項があることになる。

次に相対論の効果を見るためにこの核物質中での核子の振る舞いを考察してみたい。そのために、 $U = g_\sigma \sigma = (\text{一定})$ および $V = g_\omega \omega = (\text{一定})$ と書く。従って、 ψ を与えるディラック方程式は次のようになる。

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m - U - \gamma_0 V)\psi = 0 \quad (6-37)$$

この方程式は簡単に解くことが可能である。その解は平面波であり対応する正エネルギーの固有値は次のようになる。

$$E_{sp} = \sqrt{(m^*)^2 + \vec{k}^2} + V \quad (6-38)$$

ここで $m^* = m + U$ である。この単粒子のエネルギーを別の形に変形しておく。

$$E_{sp} = \epsilon + \frac{m}{\epsilon}U + V + \frac{p^2}{2\epsilon^3}U^2 + \dots \quad (6-39)$$

ここで $\epsilon = \sqrt{m^2 + k^2}$ と定義する。この形は興味深い相対論的效果を表現している。即ち、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルは一次のオーダーで打ち消し合い ($U < 0, V > 0$ となっている) 次の二次のオーダーではスカラーポテンシャルの項だけが生き残り非常に大きな正の値になる。即ち、この項は相対論の場合のみに出てくるものであり、非常に強い斥力の効果を作り出す。これが核物質のエネルギーの振る舞いで密度が高くなるとエネルギーが負から正に転じることの原因になっている。非相対論ではこのような効果は付加的な項として導入する必要があり、一般的には3体力として表現されている。相対論では3体力をあからさまに導入しなくとも2体力の範囲で核物質の飽和性を再現することができる。

6.4 中性子星

これまでは陽子の数と中性子の数が等しい場合の束縛エネルギーと密度の関係を議論してきた。原子核においては陽子間には斥力のクーロン力が働くため、核子数が増えてくるとエネルギーを最小にしようとして中性子数が陽子数より多くなろうとする。さらに中性子星の場合には星全体で電荷を中性にする必要があるため、陽子が存在するためには電子が同数存在する必要がある。電子は質量が核子に比べて $1/2000$ なので運動が相対論的になり、フェルミエネルギーは非常に大きくなり、エネルギーが高くなる。この電子の運動のエネルギーをできるだけ小さくするように、中性子星では中性子数が陽子数より飛躍的に大きくなる。核子間の相互作用を無視すると陽子数は 1% に満たない。

中性子数と陽子数が違う核物質の研究には、アイソスピンに依存する相互作用が重要である。そのためにこれまでのラグランジアンにアイソスピンに依存する項を付け加える。ボソンでアイソスピンが 1 の粒子としては、ロー (ρ) 中間子が知られている。実験的にもはっきりと測定されていて、その質量は 770 MeV である (表 5.1 を参照)。またスピン・パリティは 1^- である。従って、上記のラグランジアンに次の項が付け加わる：

$$L_\rho = g_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu \tau^a \rho^{a\mu} \psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu^a \rho^{a\mu} \quad (6-40)$$

この付加された項のうち質量は実験値を使い、ロー中間子と核子のカップリングである g_ρ は対称エネルギーを再現するように決定する。 $g_\rho = 8.1 (m_\rho = 770 \text{ MeV})$ を選び、対称エネルギーを計算すると $a_{sym} = 37 \text{ MeV}$ となる。その上で陽子数と中性子数を計算したものをプロットすると図 6.2 のようになる。 $N = Z$ の曲線は陽子数と中性子数が等しい対称核物質でそれ以外の曲線は中性子のみでできた中性子物質のエネルギーと密度の関係である。

このエネルギーと密度の関係を核物質の状態方程式とよび、中性子星や超新星爆発の物理の研究のためには最も本質的な物理量になる。図 6.2 で示した状態方程式を使って中性子星の構造を計算すると星の中心密度が原子核の中心の密度 (標準原子核密度) の 3 倍位の大きさになり、そのときの陽子数は中性子数の 1% 位の大きさになる。

要約

1. 原子核の相対論的記述を行うため σ - ω 模型を導入した。
2. ボソンを取り扱うためにボソンの量子場を平均場で近似を行う平均場近似を導入した。

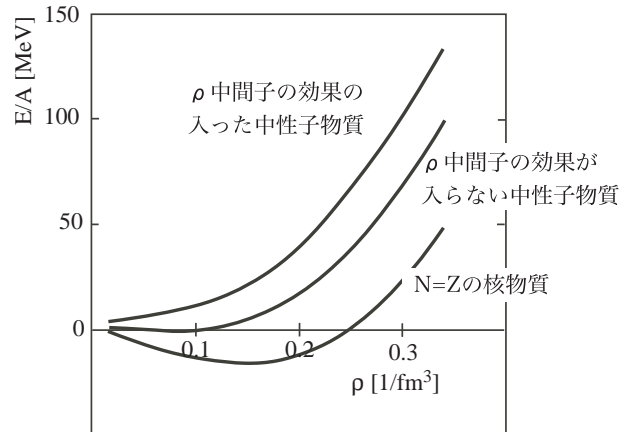


図 6.2: 対称核物質と中性子物質の核物質の状態方程式。

3. フェルミオンである核子を扱う方法として第二量子化の方法を導入した。
4. 無限系である核物質の性質を平均場近似を使って計算した。
5. 中性子星を扱うためにアイソスピン項を導入し、中性子物質の性質を計算した。

問題

1. ラグランジアンが

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m - g_\sigma\sigma - g_\omega\gamma_\mu\omega^\mu)\psi \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \end{aligned} \quad (6-41)$$

と与えられているとする。次の設問に答えよ。

- (a) 平均場近似を次のように取るとして、それらの平均場の値を求める方程式を求めよ。(答えは(6.4)と(6.5)式)この際に $\langle\sigma\rangle = \sigma$ さらに、 $\langle\omega_\mu\rangle = \delta_{\mu 0}\langle\omega\rangle$ とする。
- (b) さらに、 $\bar{\psi}$ で変分を取るにより、 ψ の従う方程式を求めよ。また、その方程式を変形することにより、ディラックの α と β 行列を使う形でディラック方程式を書け。

(c) ハミルトニアン密度はラグランジアン密度を使って、次のように書ける。

$$\mathcal{H} = \sum \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} \quad (6-42)$$

この関係式を使って、平均場近似の場合のハミルトニアン密度を導出せよ。(答えは (6.22) で与えられる)

2. 平均場近似をするとボソン場は古典場として簡単に扱えるが、フェルミオン場は量子効果を正確に取り込む必要がある。その取り扱いにはノーマルプロダクト展開 (Normal Product Expansion) と呼ぶ方法で行う。フェルミオン場を

$$\begin{aligned} \psi(t, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(b_{\vec{k}, \lambda} u(\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} + d_{\vec{k}, \lambda}^\dagger v(-\vec{k}, \lambda) e^{-ikx} \right) \\ kx &= k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x}, \quad k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (6-43)$$

として、以下の問いに答えよ。ここで ψ はフェルミオン場、 u, v は正または負のエネルギーに対応するディラック方程式の平面波解 (スピノル)、 b, d^\dagger は展開係数であり、これらが第2量子化の主役となる。4章の式 (4-28, 4-29) を参照せよ。

(a) ψ は力学における正準座標とみなせ、それに共役な運動量 π_ψ はラグランジアンを使って次の様に得ることができる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m g_\sigma \sigma - g_\omega \gamma_\mu \omega^\mu) \psi + \dots, \\ \pi_\psi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}. \end{aligned} \quad (6-44)$$

π_ψ を求めよ。

(b) 量子化は次の交換関係を課すことによって行うことができる：

$$\{\psi(t, \vec{x}), \pi_\psi(t, \vec{y})\} = i\hbar \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (6-45)$$

ただし $\{\cdot, \cdot\}$ は反交換関係である： $\{A, B\} = AB + BA$ 。この時

$$\begin{aligned} \{b_{\vec{k}, \lambda}, b_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} &= \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ \{d_{\vec{k}, \lambda}, d_{\vec{k}', \lambda'}^\dagger\} &= \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ \{b, b\} &= \{b^\dagger, b^\dagger\} = \{d, d\} = \{d^\dagger, d^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (6-46)$$

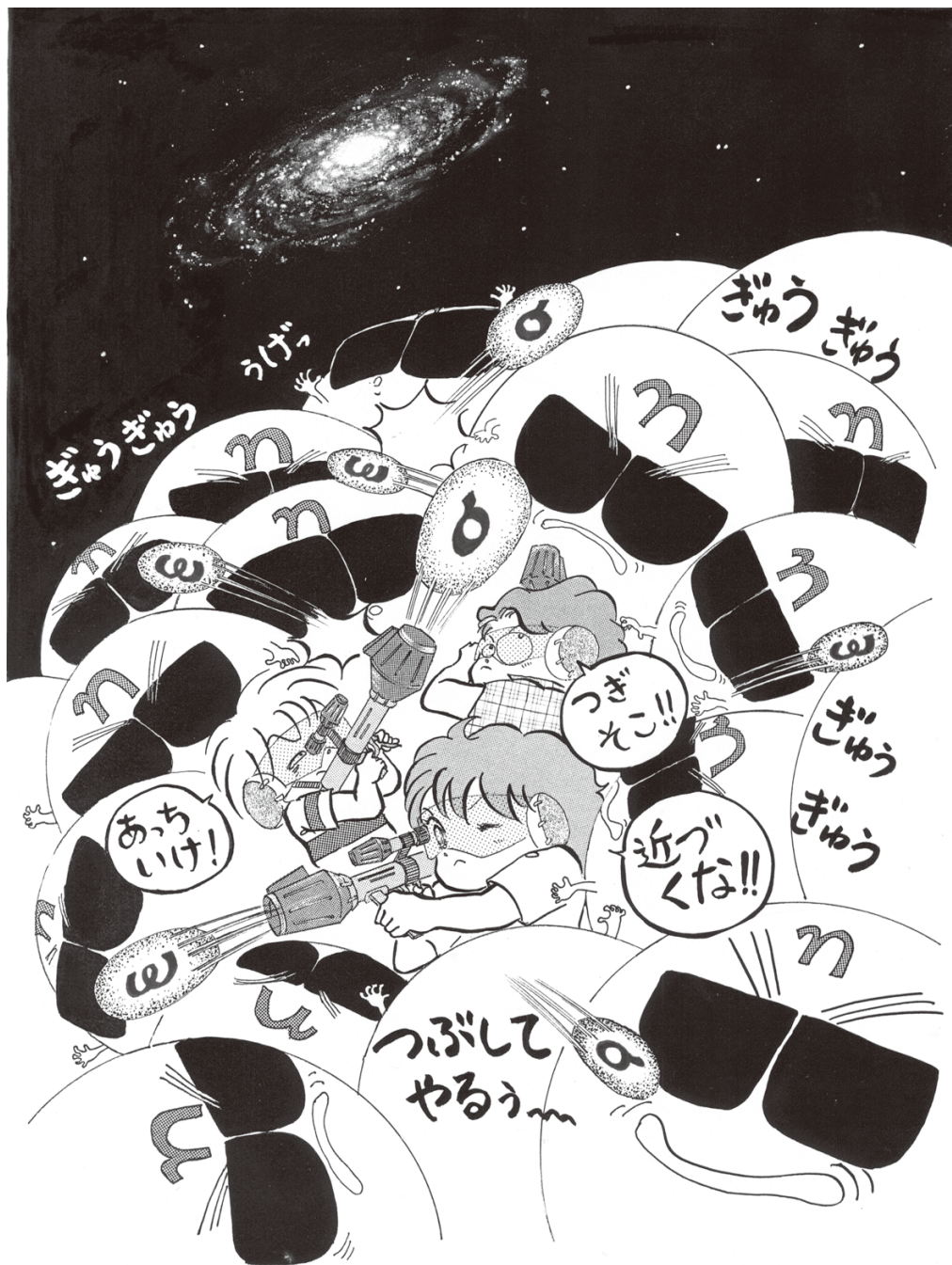
を証明せよ。最後の式で添え字を示していないのは、全ての場合に成り立つことを示している。

- (c) 演算子が決まったので、状態を導入する必要がある。真空 (vacuum) を次の様に定義する：

$$\begin{aligned} b_{\vec{k},\lambda}|\text{vac}\rangle &= 0, \\ d_{\vec{k},\lambda}|\text{vac}\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{6-47}$$

このようにすると $|\text{vac}\rangle$ は particle も hole も無い状態である。その時、核物質ではある運動量 k_F (Fermi 運動量) まで粒子が入っているとしたい。その状態を演算子 $b_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ を使って表現せよ。

- (d) $|\text{vac}\rangle$ が分かったので、一粒子状態、二粒子状態を作れ。さらに、二粒子状態では同じ量子状態に二つの粒子が入った状態が作れないことを示せ。



中性子星は大変です

第7章 原子核の構造

原子核を議論する際に二つのことに注意を払う必要がある。それは、原子核の束縛エネルギーを導出できるかということと、原子核の大きさを再現できるかということである。前章では核物質の性質を導出した。その際に適当にパラメータを選ぶことによって、原子核の飽和密度と束縛エネルギーが出るように計算を行い、核物質はどのような性質を持っているかを議論した。この同じパラメータを用いたラグランジアンを使うと非常に大きな原子核では良い性質を持つ原子核を作ることが可能であることを意味している。従って、原子核の議論には原子核の表面の性質がうまく理論に反映されていることが大事なことで、クーロンの力が適当な大きさで入っていることが重要である。

さらに原子核のマジック数が実験で要請される値で再現される必要がある。それにはスピン軌道力が重要であることが相対論的記述の動機となっている。その辺りに注目しながら、実際の原子核では相対論的平均場モデルはどのようになっているのかを紹介する。

7.1 σ - ω モデルを使った平均場理論による原子核

原子核を記述するのに同じ σ - ω モデルを使う。即ち、有限の大きさを持つ原子核の記述のためにも核物質の場合と全く同じラグランジアンを採用する。計算を行う際に、唯一の違いは σ と ω の平均場が一定の値をとるのではなく、場所に依存している値をとるところである。即ち $\sigma = \sigma(r)$, $\omega_\mu = \delta_{\mu,0}\omega(r)$ とする。この場所に依存している平均場をディラック方程式に代入すると

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m - U(r) - \gamma_0 V(r))\psi(x) = 0 \quad (7-1)$$

となる。ただし、 $U(r) = g_\sigma \sigma(r)$, $V(r) = g_\omega \omega(r)$ とおいてある。この方程式を解く為には $\sigma(r)$ と $\omega(r)$ を求める必要がある。その方程式は

$$(-\vec{\nabla}^2 + m_\sigma^2)\sigma(r) = -g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (7-2)$$

$$(-\vec{\nabla}^2 + m_\omega^2)\omega(r) = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle \quad (7-3)$$

ここで $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ は核子のスカラー密度、 $\langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle$ は核子の（バリオン数）密度である。これらのスカラー密度とバリオン数密度を計算するためには核子の波動関数を計算する必要がある。

$\sigma(r)$ などを得る為には ψ_i を知る必要がある。このためのディラック方程式は次の様になる。

$$(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m + \beta U(r) + V(r))\psi_i(\vec{r}) = E_i\psi(\vec{r}) \quad (7-4)$$

この方程式は解析的には解くことができない。クーロンポテンシャルの場合には Bjorken-Drell (BD) の教科書に詳しく記述してある。この本では、この BD の方法に従う。波動関数は角運動量の固有関数で表現する。

$$\psi_i(\vec{r}) = \psi_{nljm}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{iG_{nlj}(r)}{r} Y_{ljm}(\hat{r}) \\ \frac{F_{nlj}(r)}{r} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} Y_{ljm}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (7-5)$$

ここで角運動量の波動関数は軌道部分とスピン部分から全角運動量の固有値、 jm 、を持つ波動関数を Clebsch-Gordan 係数を使って合成したものである。

$$Y_{ljm}(\hat{r}) = \sum_{m_l m_s} (l m_l 1/2 m_s | j m) Y_{l m_l}(\hat{r}) \chi_{m_s} \quad (7-6)$$

この波動関数を上記のディラック方程式に代入して動径部分の微分方程式を得ることができる。その際に有用な関係式は

$$Y_{ljm}(\hat{r}) = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} Y_{\bar{l}jm}(\hat{r}) \quad (7-7)$$

ここで、 $l = j + 1/2$ の時には $\bar{l} = l - 1$ であり、 $l = j - 1/2$ の時には $\bar{l} = l + 1$ である。さらに、

$$\begin{aligned} -i\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \frac{f(r)}{r} Y_{ljm}(\hat{r}) &= -i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{r} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}) \frac{f(r)}{r} Y_{ljm}(\hat{r}) \\ &= \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} (-i\vec{r} \cdot \vec{\nabla} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla})) \frac{f(r)}{r} Y_{ljm}(\hat{r}) \\ &= \left(-i \frac{d}{dr} \frac{f(r)}{r} - i(1 + \kappa) \frac{f(r)}{r^2} \right) \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} Y_{ljm}(\hat{r}) \end{aligned} \quad (7-8)$$

ここで、 $\kappa > 0$ のとき $j = \kappa - 1/2$ 、 $l = \kappa$ であり、 $\kappa < 0$ のときは $j = -\kappa - 1/2$ 、 $l = -(\kappa + 1)$ である。 j は半奇数をとって全角運動量の意味を持ち、 l は整数値をとって軌道角運動量の意味をもつ。

これらの関係式を使うとディラック方程式は次のような二つのカップルした微分方程式になる。

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{\bar{\kappa}}{r}\right)F_{nlj}(r) + (m + U(r) + V(r))G_{nlj}(r) = E_{nlj}G_{nlj}(r) \quad (7-9)$$

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r}\right)G_{nlj}(r) + (-m - U(r) + V(r))F_{nlj}(r) = E_{nlj}F_{nlj}(r) \quad (7-10)$$

ここで、 $\bar{\kappa} = -\kappa$ である。この微分方程式は数値計算で解を求める。さらに、これらの解 $G_{nlj}(r)$ と $F_{nlj}(r)$ を使って密度を求める。

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \sum_i^{i_F} \bar{\psi}_i(x)\psi_i(x) = \sum_{nlj} \frac{(2j+1)}{4\pi r^2} (|G_{nlj}(r)|^2 - |F_{nlj}(r)|^2) \quad (7-11)$$

$$\langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle = \sum_i^{i_F} \bar{\psi}_i(x)\gamma^0\psi_i(x) = \sum_{nlj} \frac{(2j+1)}{4\pi r^2} (|G_{nlj}(r)|^2 + |F_{nlj}(r)|^2) \quad (7-12)$$

ここで i_F は、核子を下の準位からつめていったときの一番上の準位で、フェルミ準位と呼ばれ、そのエネルギーは E_F である (図 6.1 を参照)。相対論の量子数 $nljm$ はシェルモデルのノード量子数、軌道角運動量、全角運動量、さらにその z 成分となる。従って、シェルモデルと相対論的平均場理論の対応は非常に良い。後は、これらのカップルした微分方程式を逐次に数値的に解いていく必要がある。現在ではこのような数値計算のプログラムは研究者間では無償で公開されている。

原子核の束縛エネルギーとの比較のためにはもう少し必要な項を導入する必要がある。そこで、現在最新の論文で使われているラグランジアンを記述する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m - g_\sigma\sigma - g_\omega\gamma_\mu\omega^\mu - g_\rho\gamma_\mu\tau^a\rho^{a\mu}\frac{1+\tau_z}{2}e\gamma_\mu A^\mu)\psi \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu \\ & - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2\rho_\mu^a\rho^{a\mu} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (7-13)$$

ここで、オメガメソン (ω) とローメソン (ρ) に関する質量や二階の微分の項の説明は前章で行った。電磁場は A^μ で表されており、陽子と電荷 e の結合常数で相互作用する。その際のマックスウエル方程式を与える部分は最後の項で表現されており $H^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ で与えられる。

7.2 有限核の計算結果と実験との比較

前説の方程式を解いて得た結果の説明を行なう。まずは実験とベーテワイゼッカーの質量公式との比較を図 7.1 で行う。ベーテワイゼッカー - の質量公式と実験との比較では (下の

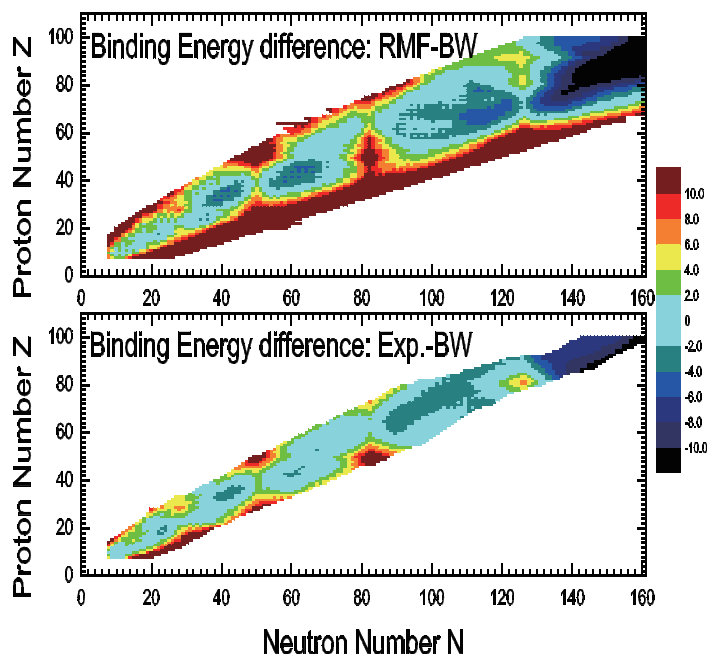


図 7.1: ワイゼッカ - の質量公式と原子核の質量の比較。上図: 相対論的平均場近似で計算した質量とワイゼッカ - の質量公式の質量の差を濃淡で現したもの。下図: 実験で得た質量とワイゼッカ - の質量公式の質量の差を濃淡で現したもの。

図)マジック数のところ以外で実験で得られた質量を再現している。質量公式のパラメータがそのように選ばれているわけだが、わずかに数個のパラメータで原子核の全体の様子が再現できることは重要な事実である。その意味では、原子核の全体の質量の様子を知るためにはベーテワイゼッカ - の質量公式を使うと良いということの意味している。マジック数以外では非常にうまく質量を再現していることが見て取れるであろう。さらに、平均場模型を使って計算したものとベーテワイゼッカーの質量公式と比べたものを上の図に示してある。このように比較すると σ - ω 平均場模型では、全体の質量の振る舞いに加えて、さらにはマジック数がうまく再現できていることがわかる。

さらに、原子核は大きな変形をすることが知られている。変形についても平均場模型は原子核の変形をうまく再現する。この様子が図 7.2 に示されてある。マジック数のところ(実線)では原子核は丸い形状を持っているが、そこから少しでも離れると原子核は変形する方がエネルギーが低いことを表している。

この本ではこれ以上の実験との比較は行わないが、平均場模型と実験データの比較は非

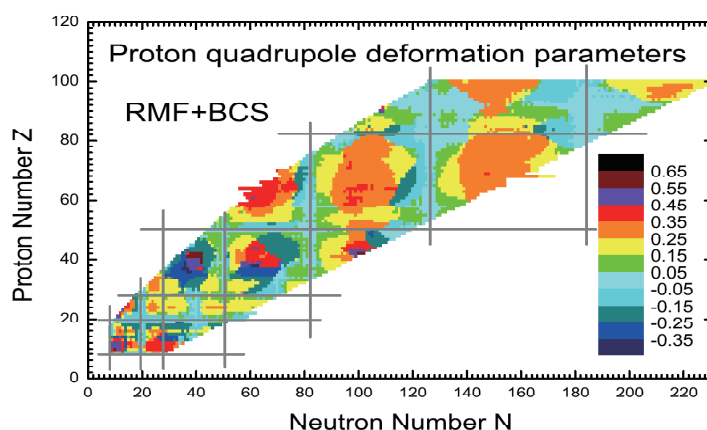


図 7.2: 原子核の変形を縦軸に陽子数、横軸に中性子数で表した平面に濃淡の違いで示したものである。マジック数の所だけが原子核は球形であり、そこから少しでも離れると変形する。

常に良い。そのことにより、最近では相対論的平均場模型を使って研究した非常に多くの論文が発表されている。

要約

1. 原子核を記述するための σ - ω 模型を導入した。
 2. σ 中間子交換力は引力で ω 中間子交換力は斥力である。
 3. 原子核の全体の引力は σ 中間子交換力と ω 中間子交換力が打ち消しあって約 50 MeV の引力になる。
 4. スピン軌道力は σ 中間子交換力と ω 中間子交換力が足し算されて非常に大きな相互作用になる。
 5. 原子核のマジック数や多くの質量を定量的に記述する。
 6. 多くの原子核は変形しており、 σ - ω 模型はそれを再現する。
-

問題

1. ディラック方程式が

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - m - U(r) - \gamma_0V(r))\psi(x) = 0 \quad (7-14)$$

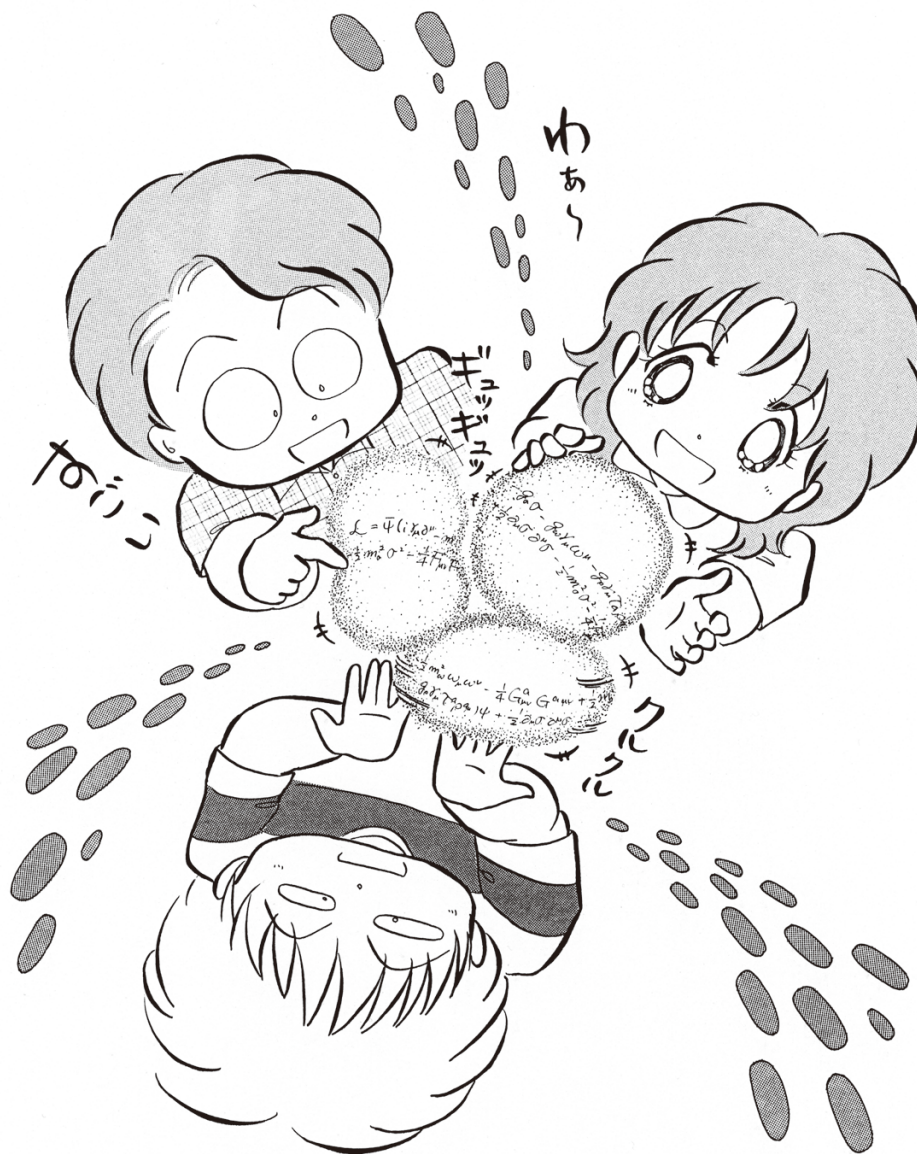
と与えられているとする。次の設問に答えよ。

(a) 波動関数として

$$\psi_i(\vec{x}) = \psi_{nljm}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} i\frac{G_{nlj}(r)}{r}Y_{ljm}(\hat{r}) \\ \frac{F_{nlj}(r)}{r}\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r}Y_{ljm}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (7-15)$$

と書いた時に、動径部分の関数である $G_{nlj}(r)$ と $F_{nlj}(r)$ が従う微分方程式を書け。

- (b) この微分方程式で形式的に $F_{nlj}(r)$ を $G_{nlj}(r)$ で解いて、それをもう一つの式に代入した時の微分方程式を書け。
- (c) この方程式と、非相対論の式であるシュレーディンガーの方程式と比較してスピン-軌道力の存在を確かめよ。さらに、類似している部分と新しい部分を述べよ。
- (d) 上記の波動関数を用いて、スカラー密度とベクトル密度を求めよ。(答えは式(7-11) および式(7-22))



ラグランジアンから原子核の形まで

第8章 カイラル対称性

原子核物理や素粒子物理ではカイラル対称性という言葉をよく耳にする。現在カイラル対称性は、「対称性の自発的な破れ」によって原子核、従って物質の大部分の質量の起源を説明する有力な手がかりと考えられている。対称性の自発的な破れは原子核物理のみならず、広く物理のいろいろな分野で使われる共通した概念でもある。そこで、この章ではカイラル対称性の基本的な考え方について議論する。そして次の章で、自発的な対称性の破れの具体的な例と応用について解説する。

核子や中間子の構造と反応を研究するハドロン物理では、カイラル対称性の重要性は量子色力学 (Quantum Chromodynamics = QCD) が知られる以前から認識されていた。現在の理解では、カイラル対称性はQCDの非摂動効果によって破れ、それが核子や中間子の性質を強く支配すると考えられている。一方で、従来の原子核物理では現象論的に核子間の相互作用を確立し、それを基盤に核子多体系を解く方法が主流であり、とりわけカイラル対称性に重きをおくことはなかった。

それに対してわれわれは、従来の原子核物理の手法と考え方を再度見直し、より現代的な視点から原子核物理を理解することを目指している。このとき、カイラル対称性の問題を避けて通れない。その主な理由はパイオンの存在に関係している。パイオンは核力の長距離部分を担い、中間子交換力としてテンソル力のかなめとなっている。一方パイオンは、カイラル対称性の自発的な破れに伴って出現する質量の軽い (厳密に対称性がよいとすると質量は正確にゼロになる) 粒子と解釈され、その相互作用はいわゆる低エネルギー定理によって決定される。この特徴はQCDの基本的な性質であると考えられているので、原子核物理をQCDから説明するには、ぜひとも考慮に入れなければならないものである。

8.1 パイオンの基本的な性質

パイオンは、湯川理論で初めて導入された中間子である。カイラル対称性はパイオンと密接に関係している。そこで、このパイオンの性質の議論から始める。

パイオンはもっとも軽いハドロンである。その基本的な性質は以下のようにまとめら

れる：

$$\begin{array}{ll}
 \text{質量} & m_\pi \sim 138 \text{ MeV} \\
 \text{スピン・パリティ、アイソスピン} & J^P = 0^-, I = 1 \\
 \text{アイソスピン成分} & (\pi^1, \pi^2, \pi^3) \sim (\pi^+, \pi^-, \pi^0) \\
 & \pi^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^1 \pm i\pi^2), \pi^0 = \pi^3
 \end{array}$$

パイオンはアイソスピン 1 (アイソベクトル) の擬スカラー粒子である。アイソスピンの 3 つ成分はデカルト表示もしくは極座標表示で表せ、極座標表示の成分 (π^\pm, π^0) は、荷電状態に対応している。

パイオンは擬スカラー粒子のため、自由空間ではクライン - ゴルドン方程式を満足する：

$$(\partial^2 + m_\pi^2)\pi^a(x) = 0. \quad (8-1)$$

あるいは、運動量空間で

$$(-q^2 + m_\pi^2)\pi^a(q) = 0. \quad (8-2)$$

相互作用がある場合には、それらをまとめてソース項(パイオンを作り出す源) $J^a(\pi, \rho, N, \Delta, \text{etc})$ で表し、

$$(\partial^2 + m_\pi^2)\pi^a(x) = J^a(\pi, \rho, N, \Delta, \text{etc}) \quad (8-3)$$

が方程式になる。パイオンは強い相互作用をする粒子に結合することができるが、ここでは典型的かつ重要なもの (π, ρ, N, Δ) をソース項の引数に示してある。

歴史的にはパイオンは湯川秀樹によって 1934 年に予言された。湯川は電磁気学における光子の交換を拡張し、質量をもった粒子が核子の間に交換されることによって強い相互作用がもたらされると考えた。核力の到達距離から、粒子の質量は

$$m_\pi \sim 1 \text{ fm}^{-1} \sim 200 \text{ MeV} \quad (8-4)$$

と予言された。1936 年に湯川は、Anderson らが撮影した霧箱の写真の飛跡がこの粒子であると考えたが、翌年に Anderson によって発表されたこの粒子は μ 中間子で、湯川の予言した粒子ではなかった。パイオンの発見はその後 1947 年に宇宙線の中から発見され、さらにその翌年 1948 年には、人工的にサイクロトロンでも作られることになった。

湯川と Anderson の研究に触発されて、理論的には 1930 年代の後半から強い相互作用に関して興味深い研究がなされ、Wenzel, Tomonaga, Oppenheimer, Schwinger 等が強結合理論を展開していた。なかでも、1942 年に発表された Pauli と Dankoff の論文は興味深

く、その約 20 年後に発表された Skyrme の核子に関する中間子の非線形理論の原形ともいえる斬新的なアイデアが盛り込まれている。Skyrme の研究はさらに 20 年後 1980 年代に Witten らによって QCD との接点が議論され非常に話題になった。またごく最近、ストリング理論によって QCD の低エネルギー領域の力学を説明する試みで、同様の非線形理論に三たび関心が寄せられようとしている。

さて、現在知られている詳しいパイオンの質量値は、電荷を持つ場合と中性の場合とで多少異なり

$$m_{\pi^{\pm}} = 139.57 \text{ MeV}, \quad m_{\pi^0} = 134.89 \text{ MeV} \quad (8-5)$$

である。荷電パイオンの方が若干重いのは、定性的には電磁エネルギーによって説明される。強い相互作用だけを問題にする場合には、荷電状態で平均して、138 MeV を使うことが多い。

138 MeV という質量は電子の 0.5 MeV という質量に比べるとかなり大きな値だが、核子の質量 (938 MeV) と比較すると軽い。現在までに知られている他のハドロンと比べても軽い。実際に、パイオンの質量をゼロとみなす近似によって、理論の構造をよりはっきりと知ることができる。これがカイラル極限で、カイラル対称性が厳密に成り立っている場合である。QCD ではクォークの質量、特に up, down クォークの質量が軽いことに関係している。

8.2 カイラリティー

カイラルとは左右を区別する「手」というギリシア語から来ている。その言葉通り、カイラル対称性は、系の右向き・左向きを特徴づける概念である。日常生活では、右左を区別することはたやすいが、原子核や素粒子物理学でそれを法則に組み込み、数式で表現していくことは結構難しい。いろいろな物理法則の概念の中でもわかりにくいものの一つになっている。できるだけ基本的なところから議論を進めていくことにする。

まず、左右を区別するにはどうしたら良いだろうか。右や左は、鏡に映すことによってお互いに入れ替わる。より一般には空間反転 (パリティ変換) に対して入れ替わる。この事情を 1 次元 (座標を x で表す) の関数の場合に表現することは比較的簡単にできる。空間反転に対して $x \rightarrow -x$ と変換するので、ある関数 $f(x)$ によって、 $f(x) \equiv \psi_R(x)$ を「右」と決めたら、 $f(-x) \equiv \psi_L(x)$ が「左」に他ならない。ところで、パリティという概念がこの空間反転と密接に関係している。パリティが「正」とは空間反転に対して符号

を変えない関数、パリティが「負」とは空間反転に対してマイナスの符号を伴う関数と定義される。これは1次元の関数の場合には、偶関数・奇関数の定義に他ならない。従って、正パリティの(偶)関数と負パリティの(奇)関数は

$$\begin{aligned}\psi_+(x) &= f(x) + f(-x) = \psi_R(x) + \psi_L(x), \\ \psi_-(x) &= f(x) - f(-x) = \psi_R(x) - \psi_L(x)\end{aligned}\quad (8-6)$$

となることは明らかであろう。

さて、核子の問題の場合に同様のことを考えてみよう。核子の状態は通常パリティの固有状態で分類することができる。固有のパリティは正と定義されるが、軌道運動をすることでいろいろなパリティの状態になることができる¹。そこで、この正負のパリティ状態を使って、逆に右と左の状態を構成することができる。パリティが正か負に決まった状態を ψ とすると、 $\gamma_5\psi$ は逆のパリティを持つことがわかる。これを用いて

$$\begin{aligned}\psi_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2}\psi = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \\ -1 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \end{pmatrix} \chi \\ \psi_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2}\psi = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \\ 1 + \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \end{pmatrix} \chi\end{aligned}\quad (8-7)$$

(N は規格化定数、 χ は2成分スピノル)が空間反転に際してお互いに移り変わるようになっていることがわかる。こうして得られた $\psi_{L,R}$ は γ_5 の固有状態で

$$\gamma_5\psi_{L,R} = \mp\psi_{L,R}\quad (8-8)$$

を満足する。またこの構成法では、 $\psi_{L,R}$ がお互いに直交するようになっている。 γ_5 をカイラリティの演算子といい、従って $\psi_{L,R}$ はカイラリティの固有状態である。このような基底もしくは表示のことをカイラル表示、あるいはワイル(Weyl)表示ともいう。

さて、(8-7)式で質量がゼロの場合を考えてみよう。すると、

$$\psi_R = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ 1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \chi, \quad \psi_L = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} 1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix} \chi\quad (8-9)$$

となる。ここで $\hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|$ である。このことから、 $\psi_{L,R}$ は $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ の ∓ 1 の固有状態であることがわかる。ここで $\vec{\Sigma}$ はパウリのスピン行列 $\vec{\sigma}$ を対角要素に2つ並べた 4×4 の行列で

¹角運動量の偶奇性とパリティの正負が対応する。

ある:

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (8-10)$$

$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ はヘリシティーとよばれる量で、運動量方向に量子化されたスピンである。質量がゼロの場合、カイラリティーの固有状態 $\psi_{L,R}$ はヘリシティーの固有状態に一致する。

一方、有限質量 $M \neq 0$ の場合には、カイラリティーの固有状態 $\psi_{L,R}$ とヘリシティーの固有状態は異なる。式 (8-7) から明らかなように、 $\psi_{L,R}$ は有限の M の場合、 $\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}$ の固有状態にはない。逆にヘリシティーの固有状態は、カイラリティーの固有状態になっていない。ヘリシティーの固有状態は、ディラックスピノル

$$\psi = N \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + M} \end{pmatrix} \chi \quad (8-11)$$

で2成分スピノル χ を $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ の固有状態に選んだものである:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi = \pm \chi. \quad (8-12)$$

これらは γ_5 の固有状態にはない。

再び質量がゼロの場合を考えてみよう。このとき粒子は光速で運動するので、観測者はその粒子の速度を超えることはできない。従って、ヘリシティーあるいはカイラリティーはローレンツ不変な量子数になる。カイラリティーは座標系の取り方に依らない不変な概念になる。すなわち、右巻き・左巻きの状態は完全に分離する。あるいは、それらは独立な粒子として扱うことができる。そしてそのそれぞれに異なる対称変換が存在するとき、その系にはカイラル対称性があるという。量子色力学の「裸」のラグランジアンでは、軽い u, d クォークはほとんど質量をもたない。そこで、これらを右と左の成分に分離して u_L, d_L と u_R, d_R を考えることができる。そして、 u_L と u_R (もしくは d_L と d_R) に対してそれぞれ独立な位相変換を考えることができる。系がこれらの変換に対して不変であるとき、系にはカイラル対称性があるという。

ところが現実の世界では、粒子は質量をもち、右巻きと左巻きの状態が混ざり合う。このような状況を、カイラル対称性が破れているという。QCD ではもともとクォークの質量は(ほぼ)ゼロであるにもかかわらず、それらの複合系であるハドロンは有限の質量を獲得している。これは相互作用の結果であるが、この状況をカイラル対称性が自発的に破れた、あるいは、カイラル対称性が力学的に破れたなどと表現する。

以下の節で、これらの内容を具体的に見ていくことにする。そのためにまず、対称性を保つような場の変換（対称変換）の一般的な性質をいくつか説明する。対称変換に対応して、保存するカレントが存在することが証明できる（ネーターの定理）。その後、カイラル対称性に関係したカイラル変換を導入する。上の説明のように、カイラル対称性は ψ_L と ψ_R それぞれに独立な位相変換として定義されるが、この本では ψ と $\gamma_5\psi$ を用いた導入を試みる。 (ψ_L, ψ_R) と $(\psi, \gamma_5\psi)$ は異なる基底で表現されたフェルミオンの成分であり、本来どちらで議論しても等価であるが、核子のように質量が有限な場合には、 ψ や $\gamma_5\psi$ のような質量の固有状態を用いた方法がしばしば採用される。一方、 ψ_L と ψ_R は質量の固有状態ではなく、カイラル変換の固有状態にある（カイラル変換のもとで、お互いに混ざり合わないという意味）。同様の事情は弱い相互作用の理論にもみられ、弱い相互作用の基底と質量の基底が異なっている。このために、ニュートリノ混合が引き起こされるのである。

8.3 対称性と保存カレント

この章では対称性の考え方と手法をいろいろな局面で扱う。そこでこの節では、その基本的な考え方のうち最も重要なネーターの定理について簡単に説明する。この定理は、系に連続なパラメータによって変換則を表すことのできる対称性があると（連続変換）、それに伴って保存するカレントが存在することを保証してくれる。系に対称性があるということは、場の変数にある変換を行なったときに、ラグランジアンあるいはハミルトニアンが不変に保たれるということである。

場の変数として n 成分のベクトル場を考え、それに作用する線形変換を導入する。すなわち、場 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$ に対して、行列によって移り変わる線形変換

$$\phi \rightarrow U(\alpha)\phi = \exp(i\alpha t)\phi \quad (8-13)$$

を考える。ここで $U(\alpha)$ は $n \times n$ の行列で、 M 個の生成子 t_i ($i = 1, \dots, M$) とそのおののに対応する連続な実数パラメータ α_i ($i = 1, \dots, M$) によって表すことができる。生成子 t_i は $n \times n$ の行列で、 αt は M 項の和を簡便に書いたものである：

$$\alpha t = \sum_{i=1}^M \alpha_i t_i. \quad (8-14)$$

いくつか簡単な例を見てみよう。

(1) 位相変換 $U(1)$: ϕ は 1 成分の複素数場。 $M = 1$ 。

$$t = 1, \quad U(\alpha) = \exp(i\alpha). \quad (8-15)$$

この変換で不変なラグランジアンの場合は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi^* . \quad (8-16)$$

(2) xy 平面の 2 成分ベクトルの回転 : ϕ は 2 成分の実数場。これは例 (1) に等価な別の表現。

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad U(\alpha) = \exp(i\alpha t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} . \quad (8-17)$$

この変換で不変なラグランジアンの場合は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_1)^2 - m^2 \phi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_2)^2 - m^2 \phi_2^2 \right) . \quad (8-18)$$

(3) 2 成分スピノル場 $SU(2)$: ϕ は 2 成分の複素数場。 $M = 3$.

$$\vec{t} = \vec{\tau}, \quad U(\alpha) = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}) = \cos \alpha + i\vec{\tau} \cdot \hat{\alpha} \sin \alpha . \quad (8-19)$$

ここに、 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は実数のパラメータ、 $\vec{\tau}$ はパウリ行列である。この変換で不変なラグランジアンの場合は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi^\dagger \phi)^2 - m^2 \phi^\dagger \phi^2 \right) . \quad (8-20)$$

さて、系に対称性がある場合には、ラグランジアンは変換 (8-13) のもとで不変、すなわち、変換された場で書かれたラグランジアンはもとの場で書かれたものと一致する : $\mathcal{L}(\phi', \partial\phi') = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$, $\phi' = U(\alpha)\phi$. この条件の元で、ラグランジアンの変分を計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi', \partial\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \\ &\sim \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} i\alpha t \phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \partial_\mu\phi . \end{aligned} \quad (8-21)$$

ここで、運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \quad (8-22)$$

を使うと、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \partial_\mu\phi \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} i\alpha t \phi + \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} i\alpha t \partial_\mu\phi \\ &= \sum_i \alpha_i \partial_\mu \left(i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} t^i \phi \right) . \end{aligned} \quad (8-23)$$

パラメータ α_i は任意なので、この式から保存するカレントが M 個得られる：

$$\partial^\mu J_\mu^a = 0, \quad J_\mu^a = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} t^a \phi, \quad (a = 1, \dots, M). \quad (8-24)$$

マイナスの符号は電荷の符号の定義と関係している。

ここで電荷（カレントの第0成分の空間積分）が、場の演算子である ϕ の変換を生成することを確認してみよう。場の演算子 ϕ はユニタリ変換のもとで (8-13) の様に変換するが、その変換はユニタリ演算子 g を用いて

$$\phi \rightarrow g \phi g^\dagger \quad (8-25)$$

のように書ける。ここで g は電荷 Q^i を用いて

$$g = \exp(i\alpha_i Q^i) \quad (8-26)$$

のように表さる。この意味において電荷が変換を生成するという。式 (8-25) は、無限小変換 ($\alpha \rightarrow 0$) の場合には

$$\phi \rightarrow i\alpha_i [Q^i, \phi] \quad (8-27)$$

と書ける。

電荷を次のように定義する：

$$\begin{aligned} Q^a &\equiv \int d^3x J_0^a \\ &= - \int d^3x i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} t^a \phi \\ &= -i \int d^3x \pi(x) t^a \phi(x), \end{aligned} \quad (8-28)$$

ここで、 $\phi(x)$ に対する共役な運動量を

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}. \quad (8-29)$$

によって定義した。すると、交換関係

$$[\phi^a(x_0, \vec{x}), \pi^b(y_0 = x_0, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})\delta^{ab}. \quad (8-30)$$

を使って

$$\begin{aligned} &i[Q^a, \phi(x)] \\ &= \left[\int d^3y \pi(y) t^a \phi(y), \phi(x) \right] \\ &= -it^a \phi(x) \end{aligned} \quad (8-31)$$

となり、確かに電荷が変換を生成することがわかる。

8.4 カイラル変換

7-2節で説明したように、 ψ (同様に $\gamma_5\psi$) は質量の固有状態である。まず ψ を質量 m のフェルミオンとして、その自由場のラグランジアンを考える：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi, \quad (8-32)$$

ψ は Dirac スピノルである。また簡略記号 $\partial = \partial_\mu\gamma^\mu$ を導入した。

最初に位相変換を考える。すなわち、

$$\psi \rightarrow e^{iv}\psi. \quad (8-33)$$

ここで1つの実パラメータを v と書いた。この変換のもと、自由場のラグランジアン
の運動項、質量項ともに不変に保たれる。これはラグランジアンが、 ψ とその Dirac 共役
 $\bar{\psi} = \psi\gamma_0$ の組み合わせで書かれてあることから自明であろう。以下では、この変換をベク
トル変換と呼ぶ。ベクトル変換のもとでの不変性 (ベクトル対称性があるという) にとも
なって、ベクトルカレント

$$V_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (8-34)$$

が保存するネーターカレントとである。

次に、位相に γ_5 を掛けた軸性ベクトル変換 (しばしば γ_5 変換、軸性変換などと呼ばれ
る) を考える：

$$\psi \rightarrow e^{ia\gamma_5}\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{ia\gamma_5} \quad (8-35)$$

ここでは、変換のパラメータを a と書いて、上の v と区別してある。2つめの式の位相の
符号に注意して欲しい。ベクトル変換の場合と同様に、ラグランジアン項の変換性を調べ
てみると：

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\partial\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{ia\gamma_5}\partial e^{ia\gamma_5}\psi = \bar{\psi}\partial\psi \\ \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}e^{ia\gamma_5}e^{ia\gamma_5}\psi \neq \bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (8-36)$$

すなわち、軸性変換に対して運動項 $\bar{\psi}\partial\psi$ は不変であるが質量項 $\bar{\psi}\psi$ は不変ではない。

もしフェルミオンの質量がゼロならば、系は軸性ベクトル変換に対しても不変に保たれ
る。これに対応して、保存する軸性ベクトルカレントが存在する：

$$A_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad \partial^\mu A_\mu = 0. \quad (8-37)$$

質量がゼロでない場合にも同様に軸性カレントを定義しておく、運動方程式を使って、保存則の代わりに次の関係を示すことができる：

$$\partial^\mu A_\mu = m\bar{\psi}\psi. \quad (8-38)$$

さて、以上のよに導入されたベクトル、および軸性ベクトル変換が $\psi_{L,R}$ のそれぞれに独立に作用する変換であることをみてみよう。簡単のために、無限小変換 $g_V \sim (1+iv)$, $g_A \sim (1+i\gamma_5 a)$ が $\psi_{L,R}$ に作用する場合を考える。結果は

$$\begin{aligned} \text{ベクトル変換} \quad & \psi_R \rightarrow g_V \psi_R \sim (1+iv)\psi_R \\ & \psi_L \rightarrow g_V \psi_L \sim (1+iv)\psi_L \\ \text{軸性ベクトル変換} \quad & \psi_R \rightarrow g_A \psi_R \sim (1+ia\gamma_5)\psi_R = (1+ia)\psi_R \\ & \psi_L \rightarrow g_A \psi_L \sim (1+ia\gamma_5)\psi_L = (1-ia)\psi_L \end{aligned}$$

ここで、下の2つの式（軸性変換）では $\gamma_5 \psi_{R,L} = \pm \psi_{R,L}$ を使った。さて、1番目と3番目の式を、また、2番目と4番目の式を足して2で割る：

$$\begin{aligned} \psi_R &\rightarrow \frac{1}{2}(g_V + g_A)\psi_R = (1+i(v+a)/2)\psi_R \equiv g_R \psi_R \\ \psi_L &\rightarrow \frac{1}{2}(g_V - g_A)\psi_L = (1+i(v-a)/2)\psi_L \equiv g_L \psi_L \end{aligned} \quad (8-39)$$

これらの関係式から右変換として $v = a = r/2$ 、左変換として $v = -a = l/2$ のようにパラメータを選ぶと、右変換のもとでは右巻き成分のみが、左変換のもとでは左巻き成分のみが変換することがわかる。すなわち、 $\psi_{L,R}$ とはここで定義された $g_{L,R}$ によって独立な「位相変換」を受ける。変換 $g_{L,R}$ は $g_{V,A}$ と変換パラメータの選び方が異なるだけで、お互いに等価である。右巻き・左巻き成分それぞれに独立な変換が定義できることが確かめられた。

位相変換は $U(1)$ 変換なので、群の言葉でカイラル群は

$$U(1)_L \times U(1)_R \quad (8-40)$$

のように直積の形で書ける。他に強い相互作用で考えられるカイラル群としては

$$SU(2)_L \times SU(2)_R, \quad SU(3)_L \times SU(3)_R \quad (8-41)$$

などがあるが、この本では扱わない。

要約

1. 最も軽いハドロンとしてパイオンの性質を概観した。
2. 空間反転のもとでお互いに移り変わる状態として、右巻き、左巻きの状態を定義し、カイラリティーの概念を導入した。ディラックスピノルの場合、これらは γ_5 行列を用いて表現することができる。
3. ラグランジアンを不変に保つ対称変換の場合、保存（ネーター）カレントが存在することを示した。
4. ベクトル変換と軸性ベクトル変換によってカイラル変換を導入した。これらは、右巻き・左巻きの成分に独立に作用する変換と等価であることを示した。
5. 質量がゼロの場合カイラル対称性は良い対称性であるが、有限質量の場合カイラル対称性は破れることを示した。

問題

1. 次の演算子

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}. \quad (8-42)$$

は射影演算子としての性質を満足することを示せ：

$$P_L + P_R = 1, \quad P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0. \quad (8-43)$$

2. パリティ変換のもとで $\psi(x)$ は $\gamma_0 \psi(t, -\vec{x}) \equiv \psi'$ のように変換される。この性質を使って、 ψ が定まったパリティの状態にあるとして、 $\gamma_5 \psi$ は ψ と逆のパリティを持つこと、また、 $\psi_{L,R}$ はパリティ変換でお互いに移り変わることを示せ。
3. 実スカラー 2 成分の場合 $\phi = (\pi_1, \phi_2)$ と複素場 φ との間には

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \quad (8-44)$$

の関係がある。

(a) それぞれのラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{real}} &= \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_1)^2 - m^2 \phi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi_2)^2 - m^2 \phi_2^2 \right) \\ \mathcal{L}_{\text{complex}} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - \frac{1}{2} m^2 \varphi \varphi^*\end{aligned}\quad (8-45)$$

が等価であることを示せ。

(b) 実スカラー2成分場 ϕ をベクトルと見なすと、上のラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{real}}$ は回転変換

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}\quad (8-46)$$

のもとで不変であることを示せ。ここで α は時空間に依存しない回転角である。このとき、ネーターの定理を用いてカレント

$$J_\mu = \phi_2 \partial_\mu \phi_1 - \phi_1 \partial_\mu \phi_2\quad (8-47)$$

を導け。

(c) 複素場 φ に対して位相変換 $\varphi \rightarrow \exp(i\alpha)\varphi$ を行う。前問と同様にラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{complex}}$ の不変性を示し、対応するカレントを求めよ。最後に、実数場に対するカレントと複素場に対するカレントが等しいことを示せ。

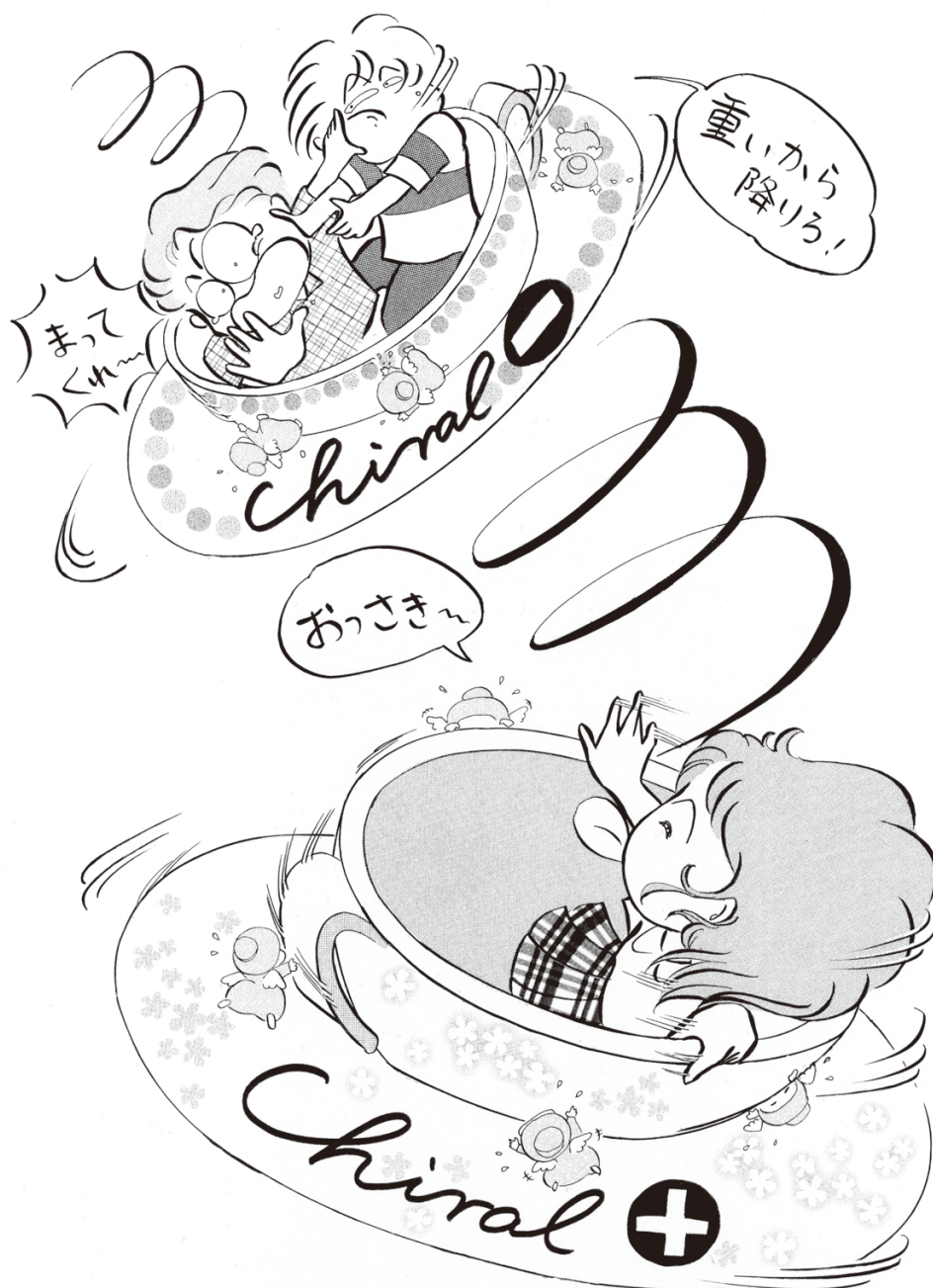
4. 質量 m のフェルミオンのラグランジアン

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi.\quad (8-48)$$

をカイラル表示 $\psi_{L,R}$ を用いて表せ。微分項は ψ_L, ψ_R それぞれの項の和に分離できるのに対して、質量項はそれらの積の形で書かれ、和の形に分離できないことを示せ。またベクトルおよび軸性カレントを $\psi_{R,L}$ で表し、

$$\begin{aligned}V_\mu &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi = \bar{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L \\ A_\mu &= \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi = \bar{\psi}_R\gamma_\mu\psi_R - \bar{\psi}_L\gamma_\mu\psi_L\end{aligned}\quad (8-49)$$

を示せ。



原子核の中は遊園地？

第9章 線形シグマ模型

前章の準備をした上で、物理を議論することのできる模型の議論に移ろう。6章で、原子核の記述に Walecka の $\sigma\omega$ 模型がしばしば用いられることを述べた。現象論としては一定の成功をおさめた模型であったが、その基礎付けははまだ十分に理解されていない。この節ではより基本的な理解に近づくために、模型にカイラル対称性を要請する。QCDの大局的 (global) な対称性であるカイラル対称性は、ハドロンの理論でも成り立っていない。この章では、カイラル対称性を満足する核子と中間子のラグランジアンを導入し、その性質を調べることにする。

9.1 核子と中間子のラグランジアン

パイオンには3種の電荷状態が存在し、従ってアイソスピンが1のアイソベクトル粒子である。アイソスピンの自由度を扱うと複雑になるので、以下では、パイオンの電荷はゼロであるとしてアイソスピンを無視する。それでも、カイラル対称性の本質を理解することはできる。群論の言葉で言うと、 $SU(2) \times SU(2)$ のカイラル群を扱う代わりに、 $U(1) \times U(1)$ のカイラル群を扱うことになる。

核子と中間子のラグランジアンを構成するにあたって、以下のような条件を考える。

- ラグランジアンはエルミート共役、ローレンツ不変等の基本的な性質を満足する他、カイラル変換のもとで不変である。
- 構成要素として、核子の他にまずパイオンを導入する。カイラル不変の要請から必要に応じて他の中間子を追加する。

パイオンは擬スカラーなので ($J^P = 0^-$)、核子との結合項は γ_5 を含む

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = ig\bar{\psi}\gamma_5\pi\psi = ig(\psi_L^\dagger\psi_R - \psi_R^\dagger\psi_L)\pi. \quad (9-1)$$

結合項に虚数単位 i を入れたのは、 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ が虚数だからである。(9-1) をみればわかるように、 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ は $2\psi_L^\dagger\psi_R$ という複素数の虚数部分になっている。

この相互作用項のカイラル変換性を考えてみる。

$$i\bar{\psi}\gamma_5\pi\psi = i(\psi_L^\dagger\psi_R - \psi_R^\dagger\psi_L)\pi \quad (9-2)$$

なので、この項自体はカイラル変換

$$\psi_L \rightarrow e^{il}\psi_L, \quad \psi_R \rightarrow e^{ir}\psi_R \quad (9-3)$$

のもとで不変に保たれない。もう少し詳しく見ると、ベクトル変換 ($l = r$) に対しては不変だが、軸性ベクトル変換 ($-l = r = a/2$) に対しては不変でなく、位相の分だけ変換される

$$i(\psi_L^\dagger\psi_R e^{ia} - \psi_R^\dagger\psi_L e^{-ia})\pi. \quad (9-4)$$

この式から、軸性変換は複素数 $\psi_L^\dagger\psi_R$ の偏角を a だけ増やす変換に他ならないことがわかる。

さてパイオンのクォークによる構造を考えてみることにする。このことで、相互作用項 (9-1) の意味とカイラル変換、特に γ_5 変換の意味を別の観点からみることができる。中間子はクォークと反クォークの対で表すことができる。パイオンは擬スカラー粒子なので、

$$\pi \sim i\bar{q}\gamma_5 q \quad (9-5)$$

という構造をしているだろう。これは、相互作用項 (9-1) の核子の部分 $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ と場の変数が異なるだけで、その構造は全く同じである。すなわち、 πNN 相互作用項は、ある複素数 $z_N = 2\psi_L^\dagger\psi_R$ と別の複素数 $z_q = 2\psi_L^\dagger\psi_R$ の虚部同士を掛け合わせたものになっている。

ここまでの事実から、以下のことが推察される。もし、2つの複素数の実数部分を掛け合わせたものを加えれば、全体としてカイラル (特に軸性ベクトル変換 = 複素平面の回転) 変換のもとで不変になるのではないか。すなわち、

$$\text{Im}[z_N]\text{Im}[z_q] + \text{Re}[z_N]\text{Re}[z_q] \quad (9-6)$$

という量を構成すれば、カイラル不変なラグランジアンを作ることができるだろう。 $\text{Re}[z_N]$ は簡単にできて

$$\text{Re}[z_N] = \psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L = \bar{\psi}\psi. \quad (9-7)$$

一方、 $\text{Re}[z_q]$ の方も同様にすればいいが、このことによって、あらたなスカラー中間子を導入する必要が出てくる

$$q_L^\dagger q_R + q_R^\dagger q_L = \bar{q}q \rightarrow \sigma. \quad (9-8)$$

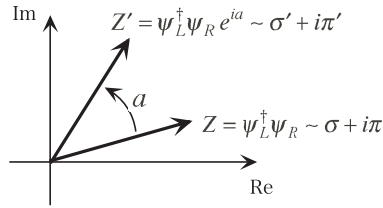


図 9.1: カイラル変数 $\psi_L^\dagger \psi_R$ の複素数表現とカイラル (γ_5) 変換

こうして、カイラル不変な相互作用項として

$$\mathcal{L}_{int} = g(\bar{\psi}\sigma\psi + i\bar{\psi}\gamma_5\pi\psi) = g\bar{\psi}(\sigma + i\gamma_5\pi)\psi. \tag{9-9}$$

相互作用の結合定数が、 πNN と σNN で同じであることに注意して欲しい。カイラル対称性を課したことによって一般には異なる結合定数が同じにならなければならない。理論のパラメータを減らすことができるのは対称性の原理を使うことの大きな効能である。

ここで、カイラル変換についてまとめておこう。

- ベクトル変換：

核子は $\psi \rightarrow e^{iv}\psi, \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-iv}$ と変換する一方、中間子 σ, π は不変に保たれる。

- 軸性ベクトル変換：

核子は

$$\psi \rightarrow e^{ia}\psi, \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{ia} \tag{9-10}$$

のように、中間子は

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \tag{9-11}$$

の様に変換する (図 9.1 参照)。

この節の最後に、中間子の他の項についてみておく。やはり、カイラル対称性を課すことによって、 σ と π はラグランジアンに $\sigma^2 + \pi^2$ の形で入れれば良い。すなわち、関数 $V(x)$ の引数に $\sigma^2 + \pi^2$ を入れたもので、微分を含まなければポテンシャル項、微分を含むものは運動項である。 $\sigma^2 + \pi^2$ の多項式で表した時に、微分を含まない1次 (=場の2次) の項は質量項と解釈される。より高次の項は、中間子相互作用を表している。

以上のことから、カイラル対称性のもとで不変なラグランジアンとして

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - g(\sigma + i\gamma_5\pi))\psi + \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2\right) \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2\end{aligned}\quad (9-12)$$

と書くことができる。このラグランジアンの意味は次の章で詳しく調べることにする。

9.2 湯川型相互作用

これまでラグランジアンを使った形式的な議論をしてきたので、以下、実際の相互作用に関する計算法を示すことにする。湯川型の中間子 - 核子結合の相互作用を用いて、2核子間にどのような相互作用（ポテンシャル）が導かれるか具体的に計算する。以下、3つの湯川型の相互作用を考える

$$\mathcal{L}_{\sigma NN} = -g_\sigma \bar{\psi}\psi\sigma, \quad (9-13)$$

$$\mathcal{L}_{\omega NN} = -g_\omega \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\omega_\mu, \quad (9-14)$$

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{PS} = -g_{PS} i\bar{\psi}\gamma_5\psi\pi. \quad (9-15)$$

前に見たように、最後の式で虚数単位 i を導入したのは $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ が純虚数の量だからである。最後のパイオンと核子の相互作用はカイラル理論では擬スカラー型 (Pseudo-scalar = PS) とよばれ、ラグランジアンの添字 (PS) はそれを示している。文献では、しばしば以下の擬ベクトル型 (Pseudo-vector = PV¹) を用いることがある

$$\mathcal{L}_{\pi NN}^{PV} = -g_{PV} \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi\partial^\mu\pi. \quad (9-16)$$

9.2.1 行列要素

これらの相互作用の意味をみるために、非相対論的な近似を行い、行列要素を計算してみよう。まずそれぞれの場を次のように自由場で展開する：

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(u(\vec{p}, \lambda) b_{\vec{p}, \lambda} e^{-ipx} + v(-\vec{p}, \lambda) d_{\vec{p}, \lambda}^\dagger e^{+ipx} \right), \quad (9-17)$$

$$\sigma(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{+ipx} \right), \quad (9-18)$$

$$\omega_\mu(x) = \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \left(a_p \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{-ipx} + a_p^\dagger \epsilon_\mu^{(\lambda)\dagger} e^{+ipx} \right). \quad (9-19)$$

¹この本で使ってきたように「軸性ベクトル型」とよんでもいいが、習慣としてこの場合には「擬ベクトル型」とよび、PVを使うことが多い。

ここで、核子の場 $\psi(x)$ に対して、 $u(p, s)$ は運動量 p , スピンの z 成分が s の粒子に対する Dirac スピノル、 $v(p, s)$ は運動量 p , スピンの z 成分が s の反粒子に対する Dirac スピノル、 $A_{p,s}, B_{p,s}$ はそれぞれに対応する状態の消滅演算子である。中間子場に対しては σ 中間子とパイオンは同じように展開され、それらは中性粒子なので、生成消滅演算子としては 1 種類の a_p を用いればよい。 ω 中間子はベクトル粒子のため、波動関数を表すためにさらに 3 種類の偏極ベクトル $\epsilon_\mu^{(\lambda)}$, $\lambda = 1, 2, 3$ を用いた。

規格化について若干説明をする。まず、核子の波動関数としては次のものを採用する：

$$u(\vec{p}, s) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \end{pmatrix} \chi_s \quad E = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2} \quad (9-20)$$

ここで χ_s ($s = \pm 1/2$) は 2 成分の Pauli スピノルである。これは $u^\dagger u = 1$ のように規格化されていて、単位体積あたり 1 個の粒子が存在するようになっている。中間子場の展開には因子 $1/\sqrt{2\omega_p}$ ($\omega_p = \sqrt{m_\sigma^2 + p^2}$) が現れているが、これも中間子が単位体積あたり 1 個存在することを保証している。

さて、非相対論的な近似ではいろいろな行列要素を $v = p/M$ で展開し、その最低次の項だけ採用する。この近似のもとで、まず相互作用 (9-13)-(9-16) の行列要素を計算してみよう。図 9.2 の左に示したように、各状態の運動量を指定する。すると、

$$\langle p' | \mathcal{L}_{\sigma NN} | pq \rangle \rightarrow g_\sigma \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \exp(-ipx - iqx + ip'x) \chi_{s'}^\dagger 1 \chi_s. \quad (9-21)$$

すなわち、スカラー粒子である σ 中間子は、核子と $\chi_{s'}^\dagger 1 \chi_s$ という因子を通して結合する。スカラーという性質から予想できるように、始状態と終状態の核子のスピンをかえることなく遷移する。

次に ω 中間子との結合を見てみる。時間、および空間成分の構造の違いに注意する必要がある。空間成分の計算が若干面倒だが実行すると、次の結果を得る：

$$\begin{aligned} \langle p' | \mathcal{L}_{\omega NN} | pq \rangle &= -g_\omega (\bar{u} \gamma_0 u \omega^0 - \bar{u} \vec{\gamma} \cdot \vec{\omega} u) \exp(-ipx - iqx + ip'x) \\ &\rightarrow -g_\omega \left[\chi_{s'}^\dagger \chi_s \omega^0 - \frac{1}{2M} \chi_{s'}^\dagger ((\vec{p} + \vec{p}') \cdot \vec{\omega} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \times \vec{\omega}) \chi_s \right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \exp(-ipx - iqx + ip'x). \end{aligned} \quad (9-22)$$

すなわち、時間成分はスカラー粒子の場合と同じく $\chi_{s'}^\dagger 1 \chi_s$ という因子を通して結合する。注意すべきは、スカラーの場合因子 1 の出所はスカラー密度 $\bar{u}u$ であったのに対して、ベクトルの場合は、ベクトルの時間成分からくる密度 $\bar{u} \gamma_0 u = u^\dagger u$ から来ているという点

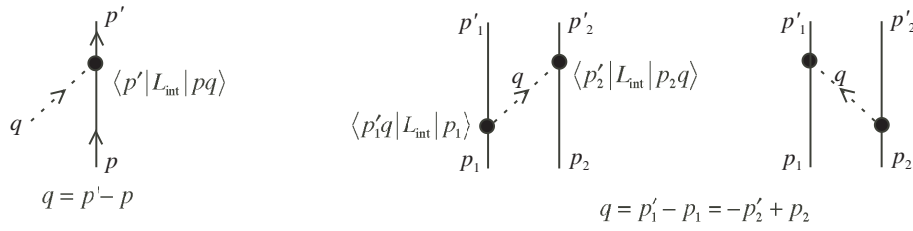


図 9.2: 湯川型相互作用の行列要素

である。非相対論の場合にはこれら異なる密度は区別がつかなくなる。一方空間成分は複雑に見えるがこれは $v = p/M$ の高次項で、例えば、 $\vec{q} \times \vec{\sigma}$ の項は磁気的な相互作用を表している。

最後にパイオンとの相互作用を見てみよう。擬スカラー結合の場合に同様に非相対論的な近似のもとで、

$$\langle p' | \mathcal{L}_{PS} | pq \rangle \rightarrow g_{PS} \chi_{s'}^\dagger \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{q}}{2M} \chi_s \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \exp(-ipx - iqx + ip'x). \quad (9-23)$$

因子 $\vec{\sigma} \cdot \vec{q}$ は、非相対論の場合に構成される擬スカラー量であり、パイオンが擬スカラー粒子であることの帰結である。 \vec{q} はパイオンの波動関数 $\exp(-iqx) = \exp(-iq_0t + i\vec{q} \cdot \vec{x})$ を(空間)微分したものである。あるいは部分積分すれば、核子の遷移密度 $\sim \chi_{s'}^\dagger \chi_s \exp(-ipx + ip'x)$ に作用する微分と考えても良い。相互作用の頂点に微分ができることから、パイオンの相互作用は以下でみるように複雑な構造をしている。しかし、パイオンがカイラル対称性の自発的な破れから生じている限りこれはさげられない事実で、この複雑な相互作用のため原子核の多彩な性質が実現しているのである。軸性結合型の場合にも、非相対論的な近似を行うと同じ結果を得る。

9.2.2 ポテンシャル

前説で得られた各相互作用を用いて、2核子間のポテンシャルを計算することができる。ここでは、量子力学の2次の摂動論に基づいた導出を紹介する。最近の多くの場の理論の教科書では、相対論的に共変なファインマン則を使って計算されるが、同じ結果を与える。

2次の摂動によると、図9.2に示したように、2つの中間子交換に対応する項を計算することになる。初めに σ 中間子交換の場合を考える。2次の摂動の公式を運動量空間で適用し、エネルギーの補正をポテンシャルエネルギーとにおいて、

$$V_\sigma(\vec{q}) = - \sum_n \frac{\langle 0 | V^\dagger | n \rangle \langle n | V | 0 \rangle}{E_n - E_0}$$

$$= -2 \times \frac{1}{\omega_q} \left(\frac{g_\sigma}{\sqrt{2\omega_q}} \right)^2 = -\frac{g_\sigma^2}{\vec{q}^2 + m_\sigma^2} \quad (9-24)$$

を得る。この式を導出するにあたり、核子の質量は十分重い近似を使った。フーリエ変換して座標表示に移ると

$$V_\sigma(\vec{x}) = -\frac{g_\sigma^2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (9-25)$$

という湯川関数を得る。ここで注意すべきは、このポテンシャルは結合定数の符号に関わらず、常に負、すなわち引力を与えるポテンシャルになっているという点である。これは、2次の摂動が必ず負のエネルギー補正を与えることの帰結である。

同様の作業を前説で与えた中間子のすべてに対して行うことができる。 ω 中間子の場合を考えてみよう。この場合、偏極ベクトルの分だけ上の結果と異なる。すなわち、

$$V_\omega(\vec{q}) = -\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\nu^{(\lambda)} \frac{g_\omega^2}{\vec{q}^2 + m_\omega^2} \quad (9-26)$$

この式では ω 中間子の成分を一般に μ, ν とおいたが、時間成分の交換の場合には $\mu = \nu = 0$ とすればよい。ところが、偏極ベクトルの和については以下の公式が成り立っている

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)\dagger} \epsilon_\nu^{(\lambda)} = -g_{\mu\nu} \quad (9-27)$$

従って、時間成分をとると ($\mu = \nu = 0$)

$$V_\omega(\vec{q}) = +\frac{g_\omega^2}{\vec{q}^2 + m_\omega^2} \quad (9-28)$$

となり、このポテンシャルは正、従って斥力となる。この結果も結合定数の符号にはよらないことに注意しよう。結局中間子交換力の場合、パイオン、 σ 中間子、 ω 中間子の空間成分などの粒子が交換される場合には引力がもたらされるのに対して、 ω 中間子（一般にはベクトル粒子）の時間成分が交換される場合には斥力になることがわかる。5章でみたように、ワレチカ模型では σ 中間子交換による強い引力と、 ω 中間子交換による強い斥力がほとんど打ち消し合って、ほどよい引力をもたらしている。それが原子核を束縛する重要な力の一部を担っている。

要約

1. $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ と $\bar{\psi}\psi$ を複素数 $2\bar{\psi}_L^\dagger\psi_R$ の虚部と実部とみなし、カイラル (γ_5) 変換が複素数の偏角を変化させる変換と等価であることをみた。

2. 複素数の実部と虚部の和としてカイラル不変なラグランジアンを構成した。その際、パイオンの他に σ 中間子を導入した。
3. 中間子交換力の例として、パイオン交換の他、 σ 中間子、 ω 中間子交換力を求めた。

問題

1. ガンマ行列で構成される5つの双1次形式 $\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_5\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ の複素共役を計算せよ。テンソル行列 $\sigma_{\mu\nu}$ は(4-57)で定義されている。また、これらの量を右巻き、左巻きの成分 ψ_R, ψ_L を使って書き表せ。
2. 運動量が \vec{p} の状態にある核子と荷電中間子の波動関数を次のように書く：

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \end{pmatrix} e^{-ipx} \chi_s, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-ipx} \quad (9-29)$$

ここで、核子に対しては $p = (E, \vec{p}), E = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$ 、中間子に対しては $p = (\omega, \vec{p}), \omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ 、 M, m は核子およびスカラー中間子の質量である。このとき、カレントの第ゼロ成分として定義される「密度」は、単位体積あたり1個の粒子が存在するように規格化されていることを示せ。

3. πN 結合には擬スカラー型 (PS)、擬(軸性)ベクトル型 (PV) の2種類を考えることができる：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{PS}} &= ig_{\text{PS}} \bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi, \\ \mathcal{L}_{\text{PV}} &= g_{\text{PV}} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi \partial^\mu \phi \end{aligned} \quad (9-30)$$

核子に対して前問のスピンルを用い2つの行列要素 $\langle N(p_2) | \mathcal{L}_{\text{PS, PV}} | N(p_1) \pi(q) \rangle$, $q = p_2 - p_1$ を計算せよ。核子の質量が十分重く比相対論的極限の近似が良い場合に、両者が等しくなるための条件として、 g_{PS} と g_{PV} の間の関係を導け。

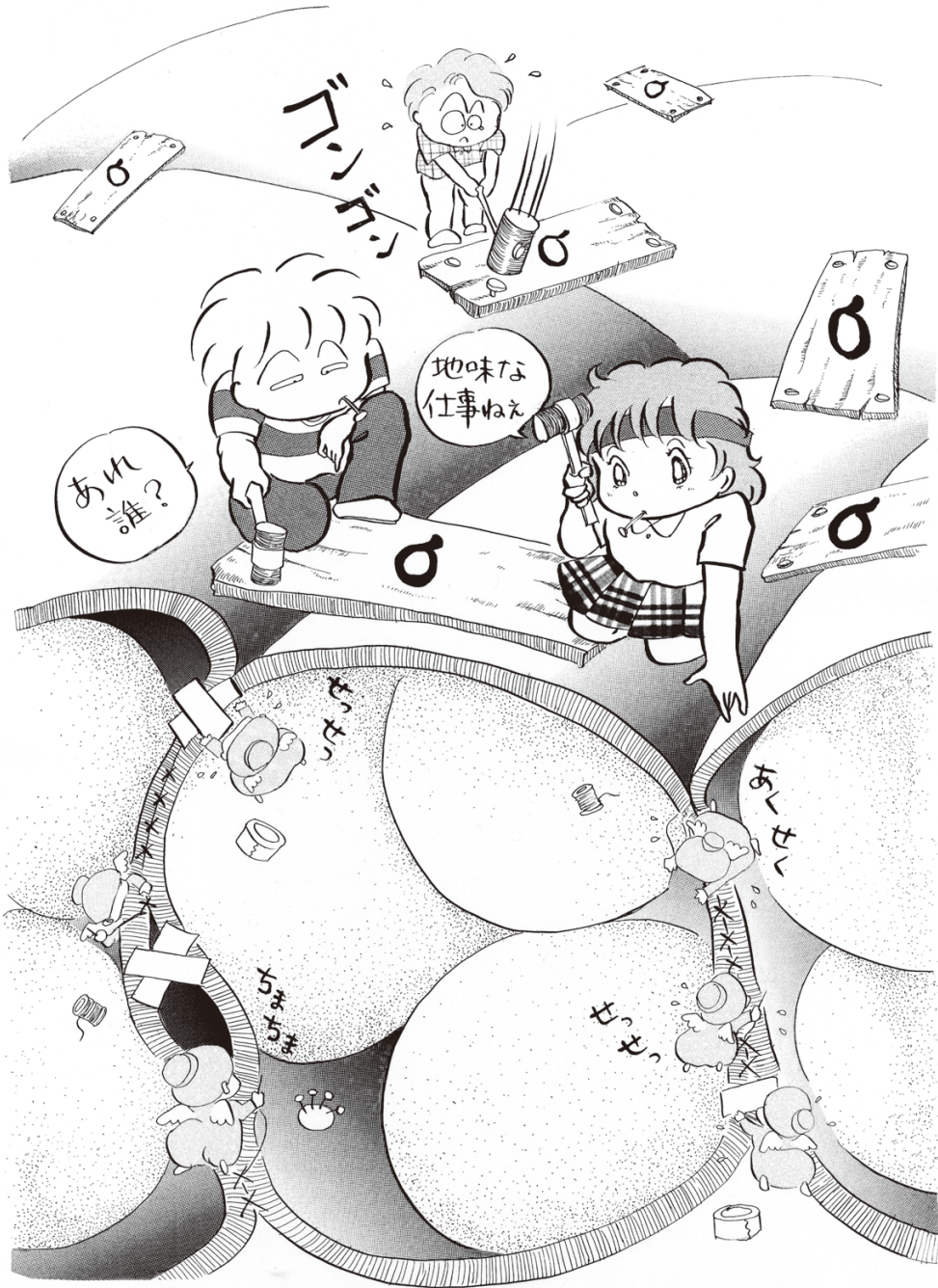
4. σ 中間子交換のポテンシャルを導出にあたり図9.2を考える(例えば左の図)。

(a) ファインマン則に従えば、この振幅は中間子のプロパゲータ

$$\frac{1}{q^2 - m^2} = \frac{1}{\omega^2 - \vec{q}^2 - m^2}, \quad \omega = E'_1 - E_1, \quad \vec{q} = \vec{p}'_1 - \vec{p}'_2 \quad (9-31)$$

と書ける。核子が十分重ければ ω^2 は $\vec{q}^2 + m^2$ に比べ無視でき、振幅は (9-24) になることを示せ。

- (b) 量子力学の2次の摂動によれば、エネルギー分母として中間状態のエネルギー $E'_1 + E_2 - \omega_q$ と初期状態のエネルギー $E_1 + E_2$ の差が表れる。核子が十分重ければ、この差は ω_q となり、再び式 (9-24) が得られることを示せ。



地味な仕事こそ大事

第10章 南部-Goldstoneの定理と質量生成機構

前章で線形 σ 模型を構成した。この模型のラグランジアンはカイラル変換のもとで不変に保たれる、カイラル不変なラグランジアンである。カイラル対称性が成り立つ場合核子の質量は0であり、 σ 中間子とパイオンは有限な同じ質量を持つ。しかし現実には、核子の質量は有限の値を持ち、パイオンは非常に軽く近似的に質量ゼロと考えても良い。さらに、 σ 中間子は 600 MeV 程度の重い質量を持つと考えられている。従って、我々の世界ではカイラル対称性は破れていると考えられている。

対称性をもったラグランジアンから出発して、その対称性を破るとはどのような意味なのであろうか。物理現象を記述するためにはラグランジアン（演算子）と物理状態が必要になる。ラグランジアン自体は対称性を保持しながらも、状態がその対称性を破るような場合が生じる。このことは真空（基底状態）が対称性を破ることによって、系統的に説明される。この状況を、対称性が「自発的に破れる」と言う。対称性が「自発的に破れる」ためには、相互作用を必要とする。そのため、「力学的な対称性の破れ」とも称される。自らの相互作用によって自発的に対称性を破る、という表現がしっくりくるかもしれない。これらの事情は、線形 σ 模型のラグランジアンを用いることによって理解することができる。そしてどのように核子が質量を獲得し、パイオンが質量が0の粒子として存在するのかを議論する。

10.1 線形 σ 模型のラグランジアン

前章 (9-12) でみたように、線形 σ 模型ラグランジアンとして次のものを得た：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma = & \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - g(\sigma + i\gamma_5\pi)) \psi + \frac{1}{2} \left((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2 \right) \\ & - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2. \end{aligned} \quad (10-1)$$

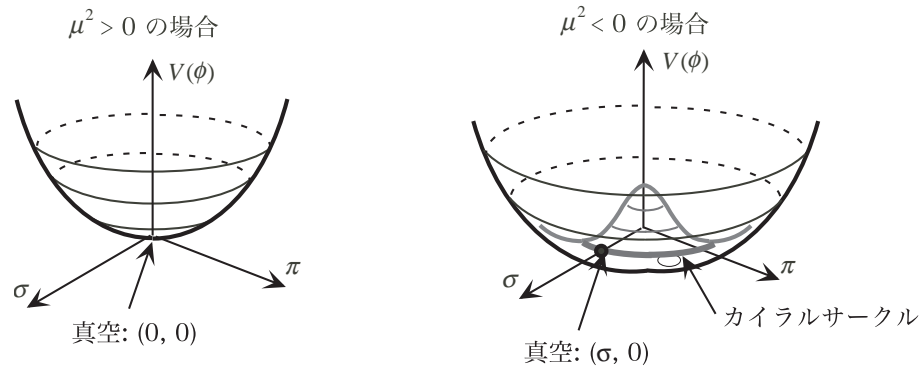


図 10.1: 線形 σ 模型のポテンシャル。 $\mu^2 > 0$ の場合は最小点が原点に唯一に決まるが、 $\mu^2 < 0$ の場合は、最小点はカイラルサークル上に無限に縮退している。

ポテンシャル

$$V(\sigma, \pi) = \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (10-2)$$

では、ボソン場の 4 次の項までとった。ラグランジアン (10-1) のすべての項の次元 (単位) が、質量で 4 を超えないことに注意したい。これは量子補正を計算する場合に必要な繰り込み条件から要請されるが、この話題はこの本の範囲を超えるので議論しない。ラグランジアン (10-1) には μ^2, λ, g の 3 つのパラメータが含まれる。このラグランジアンで以下の点に注目する：

- 核子には質量項がない。質量項はカイラル対称性を破るからである。
- パイオンと σ 中間子は同じ係数 $\mu^2/2$ の質量項を持っている。
- パラメータ λ は理論の安定性から正でなければならない。
- 質量パラメータ μ^2 は正にも負にもなり得る。その符号に応じて真空の構造が変わり、カイラル対称性の性質が変わる。特に、2 番目の項目、パイオンと σ 中間子の質量の性質が代わる。 μ^2 が正または負の場合のポテンシャルの形を図 10.1 に示す。

さていよいよ対称性と真空の関係、また、それらと粒子 (中間子) の性質、特に質量との関係についてみてみよう。そのために、まず、系の真空についてみてみる。真空とは、エネルギーを最小にする配位¹のことである。最小エネルギーの配位を古典論の範囲で決定しよう。

¹ここで状態という表現を使わなかった。以下では、場の古典論としてエネルギー最小の場 (= 配位) を求めるからである。

ハミルトニアン（密度）を書いてみると

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\sigma = & \int d^3x \left[\bar{\psi} (-i\alpha \cdot \nabla + g(\sigma + i\gamma_5\pi)) \psi \right. \\ & + \frac{1}{2}(\Pi_\sigma^2 + (\nabla\sigma)^2) + \frac{1}{2}(\Pi_\pi^2 + (\nabla\pi)^2) \\ & \left. + \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \right]. \end{aligned} \quad (10-3)$$

ここで Π_σ, Π_π は、 σ, π に共役な運動量である。この式を見て、真空としては各項が最も小さくなるような配位をさがせばよい。核子の部分に関しては、核子が存在しない場合がエネルギー的に最も得をするので無視することにする。次にボソンの運動項であるが、 $\Pi_{\sigma,\pi}^2$ の項は、場の振動の運動エネルギー、 $(\vec{\nabla}\sigma)^2, (\vec{\nabla}\pi)^2$ の項は場の変形に伴って生じる張力（ポテンシャル）エネルギーと考えられ、従って、時間依存のない（静的）、かつ空間的に一様な場の配位をとることによって、それらの項をゼロ（最小値）にすることができる。そこで真空としては静的かつ一様な場で、最後の場のポテンシャル項を最小にする配位を考えればよい。静的一様ということ、場からは時空点 x の依存性がなくなり、ポテンシャルは単に 1 変数 $\phi \equiv \sqrt{\sigma^2 + \pi^2}$ で表された関数

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^2)^2 \quad (10-4)$$

となり、この最小値は容易に探すことができる。

さらにこの真空の周りで場の変数を展開することによって、その場に対応する中間子の質量を求めることができる。場の真空における値を ϕ_0 とおいて、場の演算子を $\phi = \phi_0 + \varphi$ と書く。ここで、 ϕ_0 は定数で φ が演算子である。多くの場合 $\phi_0 = 0$ であるが、対称性が自発的に破れる場合には $\phi_0 \neq 0$ となり得る。このように、対称性の性質によって値が変わる量を秩序変数（オーダーパラメータ）という。

ラグランジアンをこの変数 φ で展開し 2 次の項までとるとその係数が質量項となる。ラグランジアンはすでに場の 2 次の量なので、今の場合質量を求めるにはポテンシャルの展開を行えば十分である：

$$V(\phi) = V(\phi_0 + \varphi) = V(\phi_0) + V'(\phi_0)\varphi + \frac{1}{2}V''(\phi_0)\varphi^2 + \dots \quad (10-5)$$

最小点の条件から、 $V'(\phi_0) = 0$ と $V''(\phi_0) \leq 0$ が保証されている。すなわち、こうして得られる質量は必ず正（もしくはゼロ）である。ところが、もともとのポテンシャル中の ϕ^2 の係数 $\mu^2/2$ は必ずしも正である必要はなく、実際に $\mu^2/2 < 0$ の場合に、ポテンシャルの最小点が $\phi_0 \neq 0$ となる。これが、自発的な対称性を引き起こす原因になる。 $\mu^2/2$ の値は、

よりミクロな理論によってきまるが、その相互作用が重要な役割を果たしている。この事情は、次の章で調べることにする。相互作用が対称性の破れを引き起こすことから、力学的な相互作用の破れともいわれる。以下において、 μ^2 が正または負の場合によって系の性質がどのようにになっているか見ていく。

$\mu^2 > 0$ の場合

ポテンシャルの最小点は原点 $(\sigma, \pi) = (0, 0)$ であり、そこが真空である。 σ と π を原点の周りで展開して 2 次の項の係数を $m^2/2$ とすることで質量が求められる。この場合は自明で、 σ, π ともに同じ質量 μ^2 を持つ。このように、真空が原点にあり、2 つの中間子の質量が同じ (縮退している) 場合を、系は Wigner 相にあるという。このとき明らかに、真空 $(\sigma, \pi) = (0, 0)$ は変換 (9-11) に対して不変である。また、ラグランジアンもこの変換のもとで不変に保たれる。すなわち系のカイラル対称性が保持されている。繰り返しになるが、この際核子の質量はゼロである。

$\mu^2 < 0$ の場合

ポテンシャルの最小点は $\phi^2 = \sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$ (定数) を満足する円周上 (カイラルサークル) の任意の点にとることができる (図 10.1)。 f_π はパイオンの崩壊定数と呼ばれる定数である。そこで、カイラルサークル上の任意の 1 点を選び、それを真空と定義してみる。実はこの時点で、本来等価な点のうちの 1 点を選ぶことにより、対称性を「自発的に」破ることになる。

古典場の有限値は ($\phi^2 = f_\pi^2$)、量子論では場の真空期待値と解釈される。場の演算子に有限な期待値を与える状態はコヒーレント状態によって実現できる。場の理論の場合は複雑なので、自由度が 1 の量子力学の場合についてコヒーレント状態について少し見てみることにする。コヒーレント状態を $|c\rangle$ で表せば、量子力学では消滅演算子 a に有限な期待値を与える

$$\langle c|a|c\rangle = N \quad (10-6)$$

(N は定数)。このような $|c\rangle$ は

$$|c\rangle = \exp(a^\dagger)|0\rangle \quad (10-7)$$

によって与えられる。このことから、有限な真空期待値を与える状態はボソンが 0, 1, 2, ... 個存在する状態の重ね合わせになっていることがわかる。

さて、真空中で凝縮する場としては擬スカラーの π があってはならないことがわかる。なぜなら、真空のパリティは正でなければならないのに対して、 n 個の π が存在する状態の重ね合わせのうち、奇数個の π が存在する状態は負のパリティを持つからである。この問題を回避するためには、初めに真空に選んだ点と原点を結ぶ方向を σ 軸と再定義する。そのためには、カイラル変換 (9-11) をおこなってやればよい。ラグランジアンがカイラル対称性を持つ場合、このような操作が可能になり、真空ではスカラー場 σ が凝縮する。すなわち、真空は $(\sigma, \pi) = (\sqrt{-\mu^2/\lambda}, 0) \equiv (f_\pi, 0)$ である。

場の期待値がゼロでない値を持つ真空の上に成り立っている世界を、南部 - ゴールドストーン (Goldstone) 相という。この真空の周りで微小振動を考えると、動径方向、すなわち 方向にはポテンシャル壁を登っていくので、有限質量の σ 中間子が励起されることになる。一方、それに直交するカイラルサークルの接線方向への揺らぎは、平らな面上の移動となりエネルギーを必要としない。すなわち質量ゼロの粒子、パイオンの励起となる。この事情はかなり一般的に示すことができ、南部-ゴールドストーンの定理とよばれ、また、質量がゼロの粒子を南部-ゴールドストーン粒子とよばれる。パイオンは他のハドロンと比べその質量はかなり軽く、非常に良い近似で南部-ゴールドストーン粒子とみなすことができる。

このことを計算によって確かめるためには、 $\sigma \rightarrow f_\pi + \sigma$ として新しい変数 σ と π に関するラグランジアンを書いてやればよい。結果は

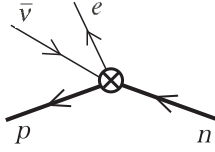
$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\partial - gf_\pi - g(\sigma + i\gamma_5\pi)) \\ & - \frac{1}{4}\mu^2 + f_\pi^2 - \lambda f_\pi^2 \sigma^2 - \lambda f_\pi \sigma(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \quad (10-8)$$

$\mu^2 > 0$ の場合にみられた、 σ と π のあいだの対称性はもはやなくなっている。また、真空 $(\sigma, \pi) = (f_\pi, 0)$ も変換 (9-11) のもとで変わってしまう。このような状況をカイラル対称性が自発的に破れたという。

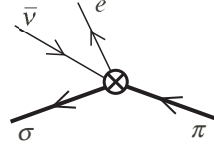
10.2 カレント

弱い相互作用によって電荷を持ったパイオンは寿命は約 2.6×10^{-8} 秒で崩壊する²。これが自発的対称性の破れと結びついていることは興味深いので、ここで紹介する。そのためまず、線形 σ 模型のカレントを考えよう。カイラル変換 (9-10) と (9-11) をラグランジ

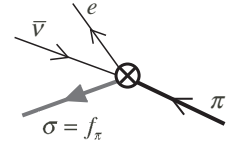
²中性のパイオンは電磁気相互作用によって 8.4×10^{-17} で崩壊する

フェルミオンカレント $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ 

対称性のあるなしにかかわらず、
中性子が陽子に変わる

メソンカレント $-\sigma\partial_\mu\pi + \pi\partial_\mu\sigma$ 

対称性がある場合
パイ中間子が σ 中間子に変わる



対称性が破れた場合
パイ中間子は崩壊する

図 10.2: 対称性に依存した軸性カレントの構造

アンに適用し、ネーターの定理からカレントを求めると、次の結果を得る：

$$\begin{aligned} V_\mu &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \\ A_\mu &= \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi - \sigma\partial_\mu\pi + \pi\partial_\mu\sigma. \end{aligned} \quad (10-9)$$

これらは、弱い相互作用のハドロンカレントと呼ばれる部分に対応する。例えば、(10-9) は中性子のベータ崩壊を記述するフェルミ型相互作用に次のように現れる：

$$\mathcal{L}_{WI} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{p}\gamma_\mu(1 - g_A\gamma_5)n\bar{e}(1 - \gamma_5)\gamma^\mu\nu. \quad (10-10)$$

ここで、 n, p は中性子、陽子を表すスピノルである。 $G = (1.026 \pm 0.001) \times 10^{-5} m_p^{-2}$ はフェルミ定数、また、 g_A は現象論的に導入されたパラメータで、軸性ベクトル結合定数と呼ばれる。実験的に知られている値 $g_A \sim 1.25$ を理論的に導くことは、カイラル対称性の自発的破れの性質と関係して面白い問題である。

さて、カレントの構造を自発的対称性の破れが起こる場合と、起こらない場合とで比較してみる。ベクトルカレントはいずれの場合も差はなく $n \rightarrow p$ の過程で、レプトンカレントが核子に直接結合している。ところが軸性カレントの場合、対称性の破れによって特に中間子カレントに違いが見られる。対称性が自発的に破れていない場合には、軸性カレントは図 10.2 に示したように $n \rightarrow p, \sigma \rightarrow \pi$ などの遷移を表し、初めの状態は終状態では別の状態に変わっていく。重要なことは、入ってきた粒子が出て行っているということである。状態（量子数）が変わるのは、弱相互作用の性質である。ところが対称性が自発的に破れると、軸性カレント (10-9) の第 2 項が表すように（図 10.2 参照）、パイオンからかわったはずの σ 中間子が真空に（凝縮する σ 中間子に）吸われて消滅してしまう。これはパイオンの崩壊のように見える。崩壊の強さは遷移行列要素によって定義され、

$$\langle 0 | A_\mu(x) | \pi(p) \rangle = \langle 0 | -\sigma(x)\partial_\mu\pi(x) | \pi(p) \rangle \sim ip_\mu f_\pi e^{ipx} \quad (10-11)$$

から、確かに f_π は崩壊の強さを表している。実験データから $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ となることが知られている。

こうして得られた f_π と πN 散乱の実験から知られている πN 結合の強さ $g \sim 10$ を結びつけると、核子の質量 $M_N = gf_\pi \sim 900 \text{ MeV}$ がほぼ再現できる。これは、カイラル対称性が強い相互作用の世界でほぼ成り立っていることを示す証拠の一つである。この線形 σ 模型によると、核子の質量は σ 中間子の真空期待値 f_π が有限値をとることによって説明される。すなわち、カイラル対称性の自発的破れによって生成される。強い相互作用の基礎理論は量子色力学であるが、カイラル対称性の自発的破れと質量の生成を説明するには至っていない。今後の課題である。

要約

1. 線形 σ 模型のポテンシャルの構造によって (μ^2 の正負)、カイラル対称性の自発的破れが引き起こされる機構をみた。
2. カイラル対称性が満足されている場合には、真空の配位は唯一に決定される。パイオンと σ 中間子の質量は縮退し有限な値をとり、核子の質量はゼロである。
3. カイラル対称性の自発的な破れは、真空の配位がカイラルサークル上に無限に縮退することにより引き起こされる。真空点を適当に選ぶことにより、質量はゼロのパイオンが出現する。一方、核子は有限の質量を獲得する。
4. 軸性ベクトルカレントの行列要素をみることで、パイオンの崩壊が自発的な対称性の破れと結びついていることをみた。

問題

1. 場の理論において、ハミルトニアン密度 \mathcal{H} はラグランジアン密度 \mathcal{L} から

$$\mathcal{H} = \Pi_\phi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad (10-12)$$

によって求めることができる。ここで、場の変数 ϕ に共役な運動量 Π_ϕ は $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi}$ である。これを線形 σ 模型のラグランジアン \mathcal{L}_σ に適用し、ハミルトニアンを求めよ。

2. コヒーレント状態に関する問題である。

(a) 通常量子力学の状態は、個数の定まった状態 $|n\rangle = (1/\sqrt{n!})(a^\dagger)^n|0\rangle$ を考えることが多い。ここで a^\dagger は生成演算子である。個数の定まった状態有限個からは、消滅演算子 a の固有状態を作ることができないことを示せ。

(b) そこで、コヒーレント状態を

$$|c\rangle = \exp(a^\dagger)|0\rangle \quad (10-13)$$

によって定義する。 $[a, f(a^\dagger)] = f'(a^\dagger)$ ($f'(z)$ は関数 $f(z)$ の z に関する微分) を用いて $a|c\rangle = |c\rangle$ となることを示せ。すなわち、コヒーレント状態は消滅演算子 a の固有状態である。

(c) 規格化因子 $\langle c|c\rangle$ を求めよ。

3. 線形シグマ模型において、 $\mu^2 < 0$ の場合には、非自明なポテンシャルの最小点 $(f_\pi, 0)$ を基準 (真空) にして、そこから量子場を再定義する

$$(\sigma(x), \pi(x)) \rightarrow (f_\pi + \sigma(x), \pi(x)) \quad (10-14)$$

新しく定義された変数を用いてラグランジアン \mathcal{L}_σ (10-1) を計算し、元の変数で書かれたラグランジアンとの違いを考察せよ。

4. 線形シグマ模型の軸性カレントを考える。

(a) 核子に対しては $A_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ となることを前章で見た。今の場合この他に、中間子 σ, π からの寄与が加わる。軸性ベクトル変換

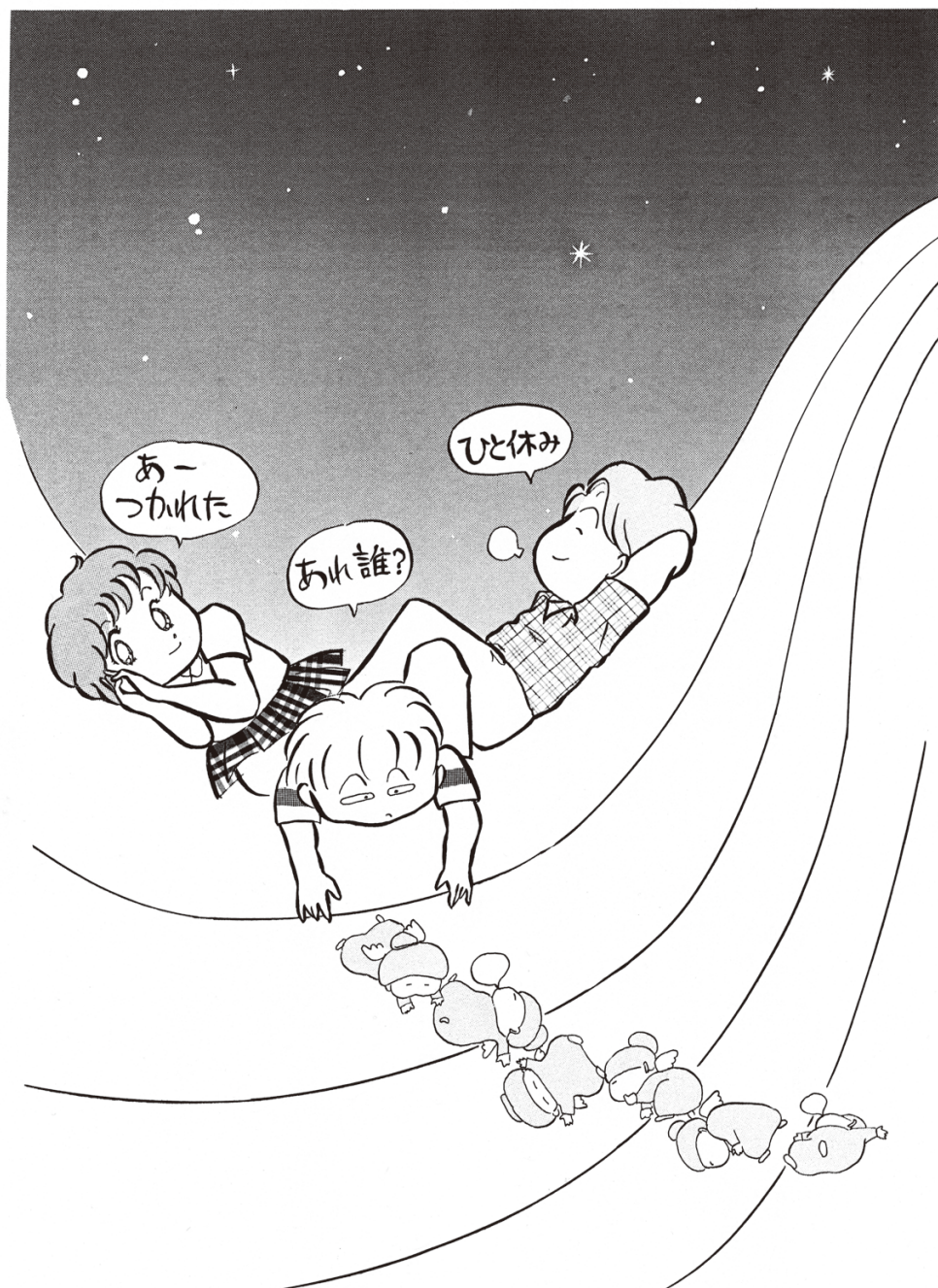
$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix} \quad (10-15)$$

に対してネーターの定理を適用し、中間子によるカレントが $-\sigma\partial_\mu\pi + \pi\partial_\mu\sigma$ と書けることを示せ。

(b) この軸性ベクトルカレントと σ 中間子の真空期待値 $\langle 0|\sigma|0\rangle = f_\pi$ を使って、軸性カレントがパイオンを消滅させる行列要素として

$$\langle 0|A_\mu(x)|\pi(p)\rangle \sim ip_\mu f_\pi e^{ipx} \quad (10-16)$$

となることを証明せよ。



ポテンシャルのゆりかご

第11章 南部-ヨナラシニオ (Nambu-Jona-Lasinio) 模型

前章ではカイラル対称性の自発的な破れを引き起こす現象論的な模型として、線形 σ 模型を考察した。そしてパラメータ μ^2 の符号によって、対称性の現れ方に違いが生じることをみた。 $\mu^2 > 0$ の場合はカイラル対称性が成り立ち Wigner 相にあるといった。一方 $\mu^2 < 0$ の場合にはカイラル対称性は自発的に破れ、南部-Goldstone 相にあるといった。従って μ^2 の符号が正や負になる機構が問題になる。この章では、実際にこの μ^2 の符号を左右する力学的な模型を考察する。これが南部-Jona-Lasinio (NJL) 模型である。

前節まではフェルミオンは核子としてきたが、この章ではクォークに置き換える。南部と Jona-Lasinio による原論文でもフェルミオンは核子とされていたが、現在ではクォークとすることで、南部-Jona-Lasinio 模型は QCD の良い有効理論であると考えられている。

この模型は、強い相互作用における超伝導模型と比喻される。この観点からは、線形 σ 模型は Ginzburg-Landau 理論に対応し、南部-Jona-Lasinio 模型は BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) 理論に対応する。BCS 理論では対をなす電子の間に働く引力によって Cooper 対が構成される。そこでの引力の起原は原子で形成される格子を媒体とするフォノン交換による。Cooper 対はボソンとして振る舞いそれが凝縮しその結果、フェルミオンのエネルギースペクトラムにはギャップを生じる。このとき、電子数の保存則が自発的に破れる。

一方強い相互作用の場合には、クォーク反クォークの間に働く引力によってクォーク・反クォーク対が構成される。この引力の起源ははっきりわかっていないが、例えば、インスタントンなどの QCD の非摂動効果によると考えられている。クォーク・反クォーク対はボソンとして振る舞いそれが凝縮しその結果、フェルミオンに質量を生じる。このとき、カイラル対称性が自発的に破れる。

以上の様子を以下具体的に見ていくことにする。

11.1 平均場近似と質量生成

NJL 模型の本質的な点は、フェルミオン (クォーク) のあいだにカイラル対称性を満足する引力が働いている、という点である。こうすることで、系はカイラル対称性を満足しながらも、相互作用の結果対称性が自発的に (力学的に) 破れる機構を導入することができる。問題の本質をみるためにはできるだけ簡単な模型を設定をする。そのため、クォーク間相互作用は座標 (x) 空間でデルタ関数型の近接相互作用であるとする。こうして、次のラグランジアンを設定することができる

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}i\partial\psi + \frac{g}{2} \left((\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \right). \quad (11-1)$$

ここで g は質量の逆 2 乗の次元をもつ結合定数である。 $g > 0$ としてこの相互作用は引力である。注意すべきは、このラグランジアンには質量項がないという点である。出発点として質量ゼロのフェルミオン理論になっているのである。QCD との対応では、質量の小さい u, d クォークに対してこの近似は非常に良く成り立っている。

対称性の破れを特徴づける量を、秩序パラメータ (order parameter) といい、ここでは $\bar{\psi}\psi$ の真空期待値である。この量はスカラーなので、線形 σ 模型の σ 中間子の真空期待値に対応する。線形 σ 模型との対応では $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ はパイオンになるので、こちらが真空期待値をもつことはない。

容易にわかるように、 $\bar{\psi}\psi$ が真空期待値を持てば、クォークは質量項を獲得するであろう。より正確には、(11-1) の相互作用のラグランジアンに対して平均場近似を適用し次の置き換えをする：

$$\frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \rightarrow g\langle\bar{\psi}\psi\rangle\bar{\psi}\psi. \quad (11-2)$$

この式は

$$m = -g\langle\bar{\psi}\psi\rangle \quad (11-3)$$

を示唆している。 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ は $\bar{\psi}\psi$ の真空期待値である。場 ψ をいつものように粒子と反粒子の完全系 (平面波) を用いて展開すると、真空期待値には反粒子の生成消滅演算子の項が寄与する。すなわち、反粒子の仮想的な生成過程が対称性の自発的な破れを引き起こすのである。この期待値は反粒子のすべての運動量状態について和をとるので発散する：これをさけるために、カットオフ Λ を導入して有限な値に正則化する。すなわち、

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -2 \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (11-4)$$

この式を理解するために以下の点に注意しよう。まず、因子 $m/\sqrt{p^2 + m^2}$ は $u_p^\dagger u_p = 1$ の様に規格化されたスピノルに対するスカラー期待値 $\bar{u}_p u_p$ である。次に、積分 $d^3p/(2\pi)^3$ は状態数を数えている。その際異なるスピンの2つの状態を数えることで因子2が必要になる。この積分は負のエネルギー状態について和がとられている。 Λ を大きくとればその状態数が増え、すなわち、より多くの(反)クォークが寄与する。最後にスピノル、すなわち展開の基底としては有限質量 m をもったフェルミオンを採用している。これは、自己無撞着 (self consistent) な平均場解を求める際の方法である。摂動展開の観点からは、以下のように解釈できる。図 11.1 に示したように、質量がゼロのフェルミオンを細い線で、質量を獲得したフェルミオンを太い線で表すとする。質量 m は太いフェルミオン線の1ループグラフで表現することができる。これは摂動では、質量ゼロのフェルミオンが無数に相互作用をしているように表現される。結局自己無撞着な平均場に対する方程式は

$$m = 2g \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}} \tag{11-5}$$

によって与えられる。この方程式を通常ギャップ方程式とよぶ。

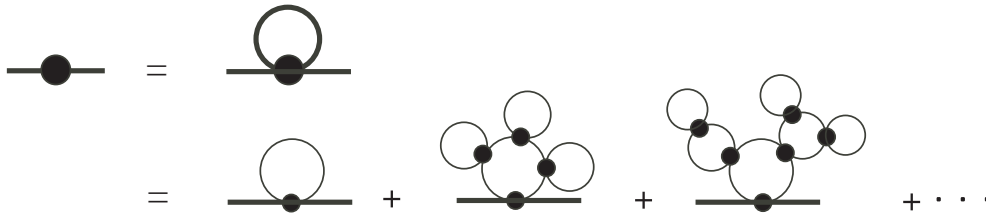


図 11.1: フェルミオンの質量生成を表すファインマン図。大きな黒丸は質量 m 、小さな黒丸は相互作用 g を表す。その結果質量ゼロのフェルミオン (細い線) から有限質量のフェルミオンが生成される (太い線)。

この方程式の解としてはまず、自明な $m = 0$ がある。ところが、ある条件の下で $m \neq 0$ の解が存在し得る。これが対称性の自発的な破れと関係している。この解を探すために、まず (11-5) の右辺の積分を計算してみよう。その結果得られた式の両辺を m で割り算して、次の式を得る：

$$1 = \frac{g}{2\pi^2} \left(\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + m^2} - m^2 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{m} \right). \tag{11-6}$$

この右辺を質量 m の関数としてプロットしたのが図 11.2 の上のグラフである。着目すべき点は、結合定数、もしくはカットオフパラメータ Λ がある程度大きい場合に、この積分量は1より大きくなり解が存在するという点である。図では、結合定数 g の小さな値から大きな値に対して典型的な振る舞いを示している。同様の振る舞いは、カットオフ Λ を変

えることによってもみられる。このように、引力の強さがある程度以上強い場合に、あるいはカットオフ Λ がある程度より大きく、より多くの反クォークが関与するときに対称性が自発的に破れる。その結果得られた有限の質量をクォークの構成質量とよぶ。また、このようにして質量を獲得したクォークを、構成クォークとよび QCD のラグランジアンにあらわれる質量がほとんどゼロのカレントクォーク (もしくは裸のクォーク) と区別している。

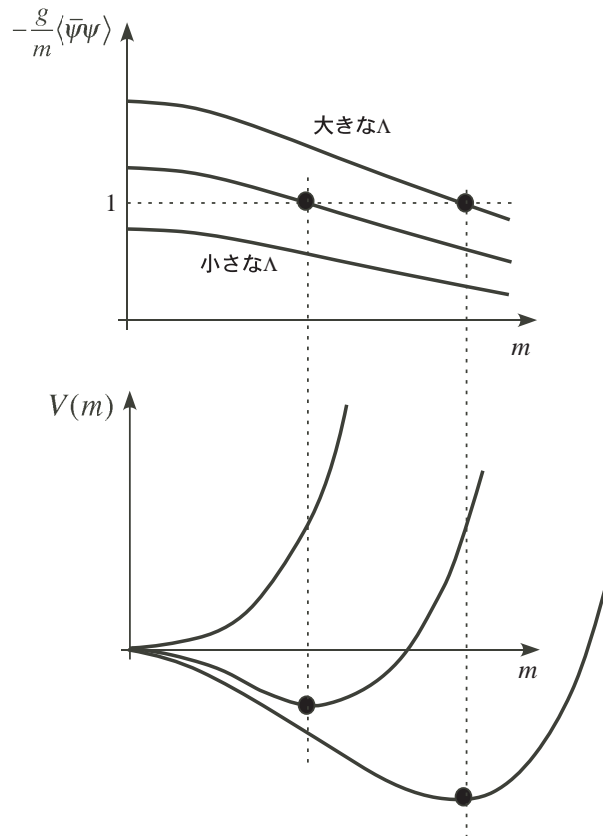


図 11.2: ギャップ方程式とポテンシャルの関係。ギャップ方程式の解 $-(g/m)\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ が 1 となる点は、ポテンシャルの最小点になっている。

構成質量 m がゼロでないということは、すなわち式 (11-3) からクォーク・反クォーク対の真空期待値 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ もゼロでないことを意味している。この量は、前節で見たように中間子では σ 中間子に対応している。線形 σ 模型では σ 中間子の真空期待値が対称性の破れの大きさを示す秩序パラメータとなっていたのに対応して、南部-Jona-Lasinio 模型では $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ がその役割をしている。さらに、この量をカイラリティーの固有状態で書き直してみると $\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L$ となり、この量が真空期待値をとるということは左右のカイラル成分

が混ざり合うことを示している。すなわち、そのおのものが保存するというカイラル対称性を破っている。これは真空とそのもとに出現する粒子群の対称性の破れに反映される。

以下ではギャップ方程式の意味をいくつかの例を通して試みる。まず、この式は系の（ポテンシャル）エネルギーの最小値を与える条件になっている。エネルギー（密度）は次のように計算される。まず、ハミルトニアンを次のように変形する

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -i\bar{\psi}\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 \\ &= \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 - m\bar{\psi}\psi\end{aligned}\quad (11-7)$$

次に、平均場近似のもとで $\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle\bar{\psi}\psi\rangle = -g/m$ の置き換えをする：

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \langle\bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + m)\psi\rangle + \frac{m^2}{2} \\ &= -2\int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2} + \frac{m^2}{2g} \equiv V(m)\end{aligned}\quad (11-8)$$

この量を m の関数としてのポテンシャルと定義する。この式を m で微分することによって、実際にギャップ方程式 (11-5) を確かめることができる。この $V(m)$ が図 11.2 の下図に示されている。

11.2 南部-Goldstone の定理

系のあるチャンネルに引力が十分働くと、そのチャンネルの秩序パラメータが有限な真空期待値をとることができて対称性が自発的に破れる。このとき、質量がゼロの粒子が出現する。これが南部-Goldstone の定理である。このことを南部-Jona-Lasinio 模型で見よう。

対称性が破れているので、クォークは有限の質量 m を獲得している。そこで、相互作用 $(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$ によって束縛されるクォーク・反クォーク対の質量がゼロになり得るかどうかが調べてみることにする。このためにいくつかの異なる方法が考えられるが、ここでは、原子核の多体問題の解法で良く知られた方法を採用することにする。そのために、ラグランジアン (11-1) から導かれるクォーク反クォーク対の「シュレーディンガー方程式」を考えてみる。

まず、ハミルトニアンを自由な部分と相互作用の部分に分ける。自由な部分は、運動量が \vec{p} で相対論的に運動するクォーク（もしくは反クォーク）の運動エネルギーとする

$$H_0 = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\quad (11-9)$$

次に相互作用ポテンシャルをラグランジアン (11-1) から求める。そのために、クォーク反クォーク対が運動量 \vec{p}_1, \vec{p}_2 , $\vec{p} \equiv \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ から \vec{p}'_1, \vec{p}'_2 , $\vec{p}' \equiv \vec{p}'_2 - \vec{p}'_1$ に遷移する際の行列要素を計算すると、

$$\langle q(p'_1)\bar{q}(p'_2)|g(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2|q(p_1)\bar{q}(p_2)\rangle = 4g \quad (11-10)$$

のようになることがわかる。

この計算は以下のようにして行う。まず、 $(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$ の間に真空をはさんで

$$\begin{aligned} & \langle q(p'_1)\bar{q}(p'_2)|g(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2|q(p_1)\bar{q}(p_2)\rangle \\ &= 2g\langle q(p'_1)\bar{q}(p'_2)|\bar{\psi}i\gamma_5\psi|0\rangle\langle 0|\bar{\psi}i\gamma_5\psi|q(p_1)\bar{q}(p_2)\rangle \end{aligned} \quad (11-11)$$

とする。ここで因子 2 は 2 乗 $(\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2$ のそれぞれをどちらの行列要素に持って行くかで現れる。次にパイオンの状態を

$$|q(p_1)\bar{q}(p_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{p_1,\uparrow}^\dagger d_{p_2,\downarrow}^\dagger - b_{p_1,\downarrow}^\dagger d_{p_2,\uparrow}^\dagger)|0\rangle \quad (11-12)$$

のように書く。 b^\dagger, d^\dagger はそれぞれ、添え字で示された運動量とスピンを持つクォークと反クォークの生成演算子である。この状態はスピンゼロで 1 に規格化されている。次に、(9-17) のように ψ を展開した形を考える

$$\psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(u(\vec{p}, s) b_{\vec{p},s} e^{-ipx} + v(-\vec{p}, -s) d_{\vec{p},s}^\dagger e^{+ipx} \right), \quad (11-13)$$

$$(11-14)$$

ここでは、ヘリシティの代わりにスピン量子数 s を用いた。注意すべき点は反粒子の項に対して、反粒子の運動量とスピンは、負エネルギーの解の運動量スピン共に、符号が反転している点である。従って、反粒子の場合スピンの符号はヘリシティと逆になる。これらの詳しい解説は、場の理論の教科書に譲ることにするが、荷電対称性の関係を正しく扱う必要がある。すなわち、

$$C\bar{v}_{-\vec{p},-s}^T = u_{+\vec{p},+s}, \quad C = i\gamma_2\gamma_0 \quad (11-15)$$

などである。以上の点に注意して行列要素を計算すると (比相対論的な極限をとって)

$$\langle 0|\bar{\psi}i\gamma_5\psi|q(p_1)\bar{q}(p_2)\rangle = i\sqrt{2} \quad (11-16)$$

を得る。ここで $\sqrt{2}$ は波動関数の規格化を反映している。以上によって式 (11-10) を示すことができた。

さて、この相互作用は1点で起こることを反映して、その強さは運動量空間では運動量の値によらず一定値 $4g$ になっている。座標空間では確かに次のデルタ関数型のポテンシャルになっている

$$V(\vec{x}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} (-4g) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -4g\delta(\vec{x}). \quad (11-17)$$

従ってクォーク反クォーク対の重心系で、シュレーディンガー方程式を次のように書くことができる

$$\left(2\sqrt{-\vec{\nabla}^2 + m^2} - 4g\delta(\vec{x}) \right) \Psi(\vec{x}) = E\Psi(\vec{x}). \quad (11-18)$$

これは、デルタ関数型のポテンシャルを含むシュレーディンガー方程式であるが、3次元の場合にはこの方程式は定義でされないことが知られている。デルタ関数型の引力が強すぎて、粒子が不安定になってしてしまうからである。意味のある方程式にするためには、点状の相互作用を有限距離の相互作用にかえる必要がある。ここでは、それを運動量空間で行うことにする。こうすることによって、解を解析的に求めることができる。

そこで、まず (11-18) にフーリエ変換を行って運動量空間で書くことにする：

$$2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\Psi(\vec{p}) - 4g \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \Psi(\vec{q}) = E\Psi(\vec{p}). \quad (11-19)$$

この式は運動量表示の積分を含んでいるが、それを離散化し行列表示で書くことにしよう。そのために次の置き換えをする。

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{1}{V} \sum_n \quad (11-20)$$

ここで V は系の体積である。そして、和の上限として適当な大きな値 N (カットオフ) を導入する。ごく大雑把に言って、この最も大きな運動量の値の逆が相互作用の到達距離になっていると解釈できる。

離散化された運動量空間で波動関数を次のように成分表示で書く

$$\Psi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11-21)$$

ここで展開係数は規格化条件 $(1/V) \sum_n |a_n|^2 \sim \int d^3p / (2\pi)^3 |\Psi(\vec{p})|^2 = 1$ を満足するものとする。離散運動量のきざみを Δ と書いてシュレーディンガー方程式を書くと次のように

なる：

$$\begin{pmatrix} 2m & & & \\ & 2\sqrt{m^2 + \Delta^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} - 4g \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (11-22)$$

この式を n 番目の係数について書くと

$$2\sqrt{m^2 + (n\Delta)^2}a_n - \frac{4g}{V} \sum_n^N a_n = E a_n \quad (11-23)$$

以上の式は、デルタ関数ポテンシャルのシュレーディンガー方程式を（離散的な）運動量空間で表したものになっている。

さて、(11-23) は次のようにして解くことができる。まず、 $K = (1/V) \sum a_n$ を導入して、形式上 a_n を次のように表す：

$$a_n = \frac{4gK}{2\sqrt{(n\Delta)^2 + m^2} - E} \quad (11-24)$$

ところが、 a_n を ($1/V$ をかけて) 足し合わせたものは K であることを使うと、

$$K = \frac{4gK}{V} \sum_n \frac{1}{2\sqrt{(n\Delta)^2 + m^2} - E} \quad (11-25)$$

両辺を K で割って

$$1 = \frac{4g}{V} \sum_n \frac{1}{2\sqrt{(n\Delta)^2 + m^2} - E} \quad (11-26)$$

を得る。これが、この方法の主要な結果である。再び和を積分に置き換え、 $E \rightarrow 0$ とおいてみると、この式はギャップ方程式 (11-5) に他ならない。これはパイオンが質量ゼロの粒子であること、すなわち南部-Goldstone の定理のひとつの表現になっている。

これらの意味をもうすこしみてみよう。そのために、図 11.3 に式 (11.3) の右辺を $f(E)$ と書いて、 E の関数としてプロットした。 $f(E) = 1$ が解である。この図で連続状態は離散化されていることに注意してほしい。 $f(E)$ はしきい値 $2m$ より大きな E の領域で連続無数の発散する極を持つが、この図では離散化された状態が $\sqrt{m^2 + (n\Delta)^2} < E < \sqrt{m^2 + ((n+1)\Delta)^2}$ の間に存在している。一方、 $E < 2m$ の領域では $f(E) = 1$ の解が束縛状態として 1 つ存在することがわかる。問題で考察するように、この束縛状態の係数 a_n は、特定の n の値に特に強く依存することはない。すなわち束縛状態はいろいろな n の状態がまんべんなく混ざっていると言える。その意味でこの束縛状態は集団状態と言われ

る。この集団の程度は $E = 0$ の場合に強くみられることがわかる。一方、 $E > 0$ の状態に関して係数 a_n を見てみると、 m 番目の状態に対する係数 $a_n^{(m)}$ に対して、 $m \sim n$ の近傍で特に大きくなっている。特に一つの状態が強く混ざっているので、このような状態を 1 粒子的という。

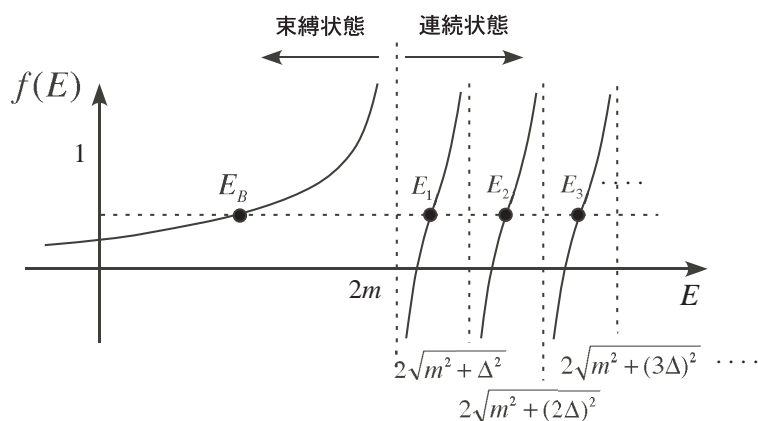


図 11.3: パイオンのシュレーディンガー方程式に対応する関数 $f(E)$

要約

1. 線形 σ 模型の μ^2 の正負をコントロールする微視的な模型として、南部-Jona-Lasinio 模型を導入した
2. クォーク・反クォーク間に働く引力が十分強い場合に、スカラー凝縮 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ がゼロでない期待値をとるような基底状態が実現された。これはカイラル対称性が自発的に破れた相に対応している。
3. 超伝導の BCS 理論と類似のギャップ方程式を、平均場近似のもとで導きその解を運動量空間で求めた。
4. ギャップ方程式の解は、有効ポテンシャルの最小値に対応していることを見た。
5. ギャップ方程式は、一方で質量がゼロのパイオンチャンネルにおけるクォーク・反クォーク対のシュレーディンガー方程式に他ならず、その質量ゼロの解が集団運動的であることをみた。

問題

1. フェルミオンの波動関数 (スピノル) として

$$u(p, s) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \end{pmatrix} \chi_s, \quad v(p, s) = \sqrt{\frac{E+M}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M+E} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_s$$

を考える。これらは、場の演算子 $\psi(t, \vec{x})$ を次のように展開する：

$$\psi(t, \vec{x}) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \left(u(\vec{p}, s) e^{-ipx} b_{\vec{p},s} + v(\vec{p}, s) e^{+ipx} d_{\vec{p},-s}^\dagger \right) \quad (11-27)$$

(a) $\bar{u}u, \bar{v}v$ を計算せよ。これによって、真空期待値が

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -2 \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

のように与えられることを示せ (11-4)。

(b) この積分を実行せよ。答えは (11-6)。

2. ギャップ方程式

$$1 = 2g \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}}$$

を具体的に解くことを考える。カットオフを $\Lambda = 600 \text{ MeV}$ として、 $m = 300 \text{ MeV}$ (構成クォークの質量) を得るためには、結合定数 g の値をどうとすべきか。 g は [質量] $^{-2}$ の次元をもつことに注意して、 MeV^{-2} もしくは、 fm^2 の次元で数値を求めよ。

3. あるポテンシャルのもとで運動する量子力学的な粒子に束縛状態が存在するかどうかを、変分原理の方法によって考えてみる。

(a) 3次元空間で規格化された波動関数を $\varphi(\vec{x})$ と書く：すなわち、 $\int \varphi^*(\vec{x})\varphi(\vec{x}) = 1$ 。スケールパラメータ a ($\vec{x} \rightarrow a\vec{x}$) を導入しクーロン場のもとでの全エネルギー

$$E(a) = \int d^3x \left(-\frac{1}{2m} \varphi^*(a\vec{x}) \vec{\nabla}^2 \varphi(a\vec{x}) - \varphi^*(a\vec{x}) \frac{1}{r} \varphi(a\vec{x}) \right) \quad (11-28)$$

を a の関数として表せ。 $E(a)$ には a の関数として最小値が存在することを示せ。

(b) 前問と同様のことを、デルタ関数型の引力ポテンシャル $V(\vec{x}) = -g\delta(\vec{x})$ (g は適当な正定数) に対して行い、この場合、安定な解が存在しないことを示せ。

4. パイオンをクォークと反クォークで構成することを考える。束縛状態はクォーク・反クォークの異なる運動量固有状態の重ね合わせで表現することができる。この際、クォークと反クォークは全スピンをゼロに組む必要がある。このことから、パイオン重心系で

$$|\pi\rangle = \sum_{\vec{p}} f(\vec{p}) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b_{\vec{p},\uparrow}^\dagger d_{-\vec{p},\downarrow}^\dagger - b_{\vec{p},\downarrow}^\dagger d_{-\vec{p},\uparrow}^\dagger \right) |0\rangle \quad (11-29)$$

のように書くことができるであろう。ここで、和は離散的としてその重みを $f(\vec{p})$ とした。 b^\dagger, d^\dagger は添え字に示された運動量とスピンを運ぶクォークまたは反クォークの生成演算子で、交換関係として $\{b_n^\dagger, b_{n'}\} = \{d_n^\dagger, d_{n'}\} = \delta_{nn'}$ を満たす。

- (a) 式 (11-29) でパイオンを展開する基底

$$|q(\vec{p})\bar{q}(-\vec{p})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b_{\vec{p},\uparrow}^\dagger d_{-\vec{p},\downarrow}^\dagger - b_{\vec{p},\downarrow}^\dagger d_{-\vec{p},\uparrow}^\dagger \right) |0\rangle \quad (11-30)$$

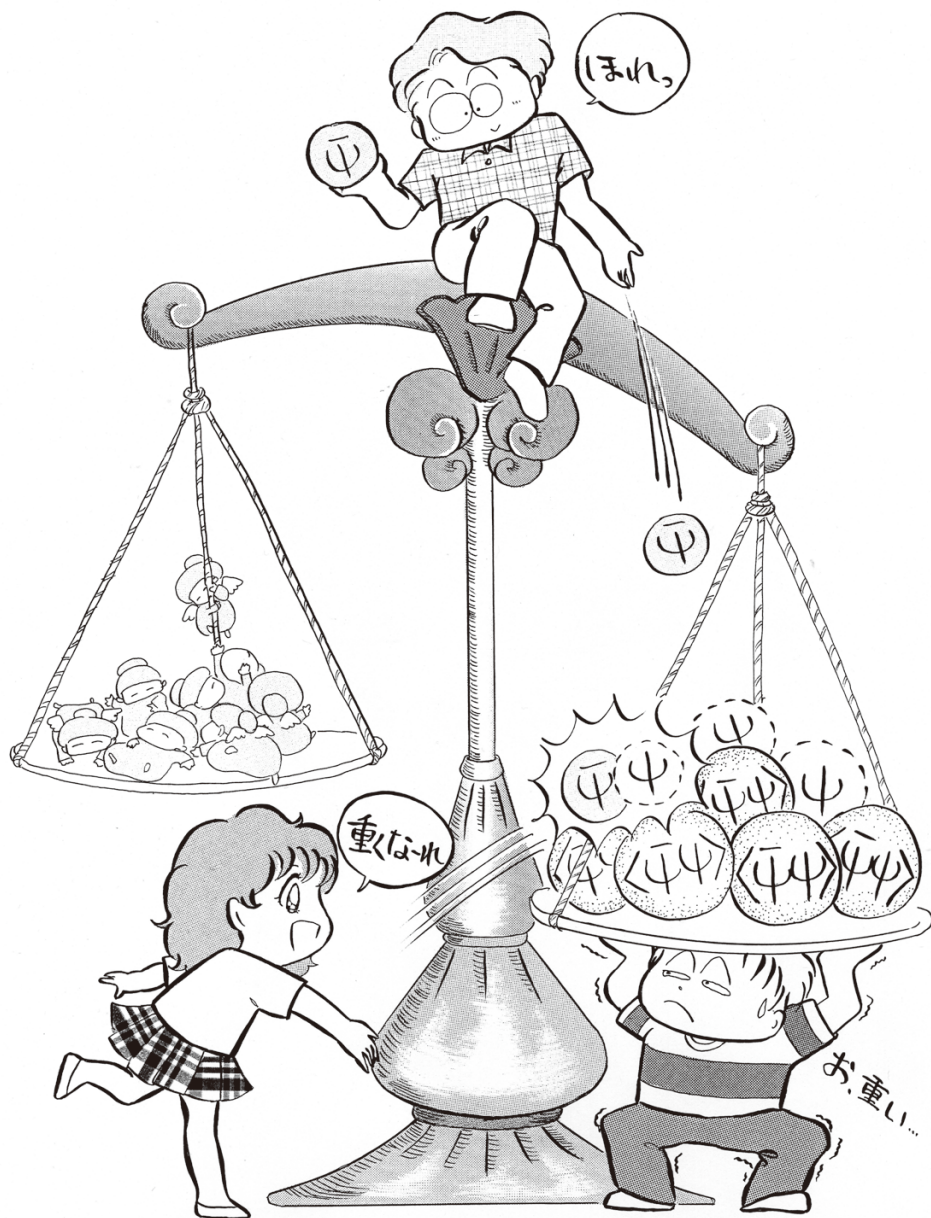
は正しく規格化されていること $\langle q(\vec{p})\bar{q}(-\vec{p})|q(\vec{p})\bar{q}(-\vec{p})\rangle = 1$ を示せ。また、 $\sum_{\vec{p}} |f(\vec{p})|^2 = 1$ のとき、 $\langle \pi|\pi\rangle = 1$ を示せ。

- (b) $\psi(x)$ を (11-14) のように展開し、

$$\langle 0|\bar{\psi}i\gamma_5\psi|q(\vec{p})\bar{q}(-\vec{p})\rangle = \sqrt{2}i\bar{v}_{\vec{p},\uparrow}\gamma_5u_{\vec{p},\uparrow} \quad (11-31)$$

を示せ。スピノル v の運動量とスピンの向きに注意せよ。

- (c) 非相対論的な極限の場合に、上の行列要素が $\sqrt{2}i$ となることを示せ。



対称性の破れは均衡の破れ

第12章 原子核におけるカイラル対称性

原子核物理では通常、二核子散乱の実験データを再現するように決めた核子間相互作用を使って原子核の多体系を記述する。核子数が少ない時には、系の性質をできるだけ正確に表現できるように、パラメータを多く含む多体系の波動関数を用意して全系のエネルギーができるだけ小さくなるように変分計算を行う。そのようにして得られた計算結果は実験と非常に良く合っている。この様子が図 12.1 に示されている。

一方で核子数の大きな原子核では、現象論的にラグランジアンを与えて相対論的平均場モデルで計算する。約 10 個くらいのパラメータを用意すると、束縛エネルギーや原子核の大きさをうまく表現することが可能である。しかし、この計算は最初からパラメータを導入して原子核の束縛エネルギーを計算しているので、現象論的なモデルであると言える。その意味では、もっと微視的なところから原子核を記述することは非常に大事な仕事である。その意味では、上記の少数多体系の計算結果は非常に興味深い(図 12.1)。この計算では質量数が 8 までの原子核について、核子間相互作用を使ってそれらの性質を非常に良く再現できることが示された¹。その際に少し足りない束縛エネルギーを得るために 3 体核力が導入されている。それに付け加えて、この計算で示された重要な結果として、パイオンの相互作用の行列要素を計算すると全引力の 70 ~ 80 % の大きさを持っていることが示された。これはパイオンが原子核の構造を作るのに、中心的な役割を果たしていることを意味している。

12.1 原子核の線形 σ 模型での記述

前の 4 章を使って、カイラル対称性の基本的な概念を導入した。その際にカイラル対称性を持つラグランジアンとして線形 σ 模型を導入した。パイオンはカイラル対称性の自発的破れから生じる南部-Goldstone 粒子であると考えたと線形 σ 模型を使って原子核を記述する試みは非常に自然である。

¹最近では質量数がさらに大きな原子核についても、同様の研究が進められている。

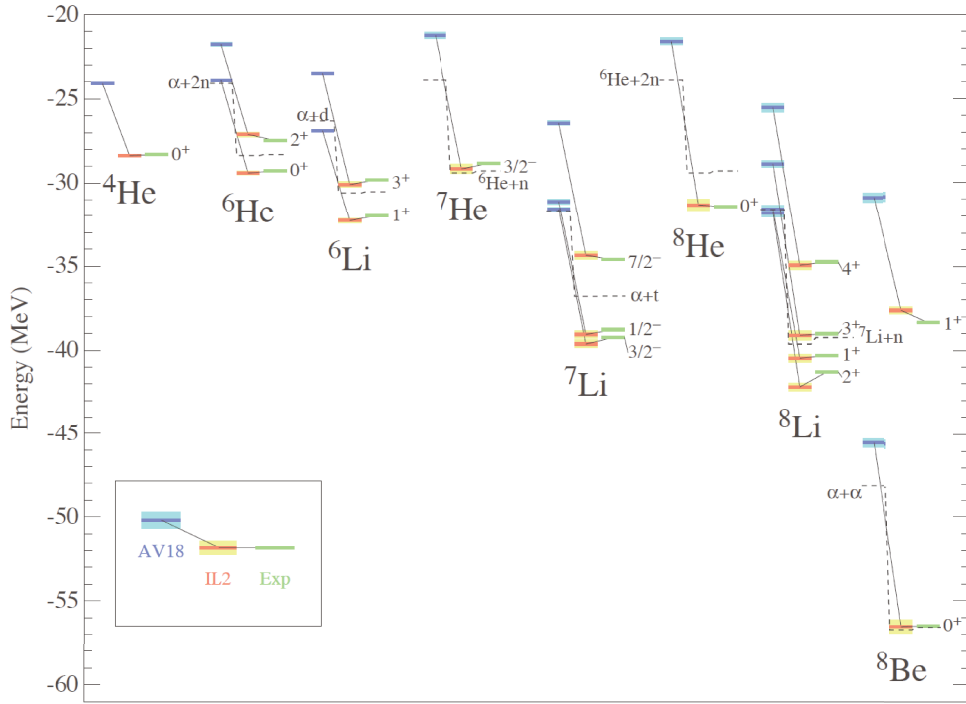


図 12.1: 核子数が 8 までの原子核の変分計算結果。一番左が 2 体力だけで計算した結果。中央が三体力まで考慮した計算結果で右端がそれぞれの原子核の実験によるスペクトルである。

線形 σ 模型のラグランジアンは次のように書ける。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma &= \bar{\psi} (i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi)) \psi + \frac{1}{2} \left((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2 \right) \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \end{aligned} \quad (12-1)$$

このラグランジアンには μ^2, λ, g の 3 つのパラメータが含まれる。さらにカイラル対称性を持っている。この対称性が自発的に破れて質量がゼロのパイオンが出現することなどから、ハドロンの性質を知ることによってそれぞれのパラメータを決定することができる。その上でこれまでと同じ方法で原子核を平均場近似で記述することを考える。これまで使っていた σ - ω 模型との比較をすると ω 中間子の導入をする必要がある。それと、パイオンは質量を持っているので、そのための補正を行うと次のラグランジアンが得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma &= \bar{\psi} (i\partial - g(\sigma + i\gamma_5\pi) - g_\omega\omega_\mu\gamma^\mu) \psi + \frac{1}{2} \left((\partial_\mu\sigma)^2 + (\partial_\mu\pi)^2 \right) \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 + \epsilon\sigma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g_\omega\omega_\mu\omega^\mu (\sigma^2 + \pi^2) \end{aligned} \quad (12-2)$$

このラグランジアンはほとんどすべてのパラメータがハドロンのレベルで決定できる。原

子核を扱うということであえて、二つのパラメータを自由に変えることにする。それは σ 中間子の質量と ω 中間子と核子の結合定数である。

このラグランジアンがどのような意味を持つのかを知る意味で、まずは核物質の計算を行う。そのためには次の平均場を仮定する： $\langle\sigma\rangle = \sigma = \text{const.}$, $\langle\omega_\mu\rangle = \omega\delta_{\mu 0}$, $\pi = 0$ その上で平均場で変分をとることにより核物質の性質を求める。この際に飽和性が満足されるようにパラメータの値を決定する。その結果を図 12.2 に示した。この図からわかるよう

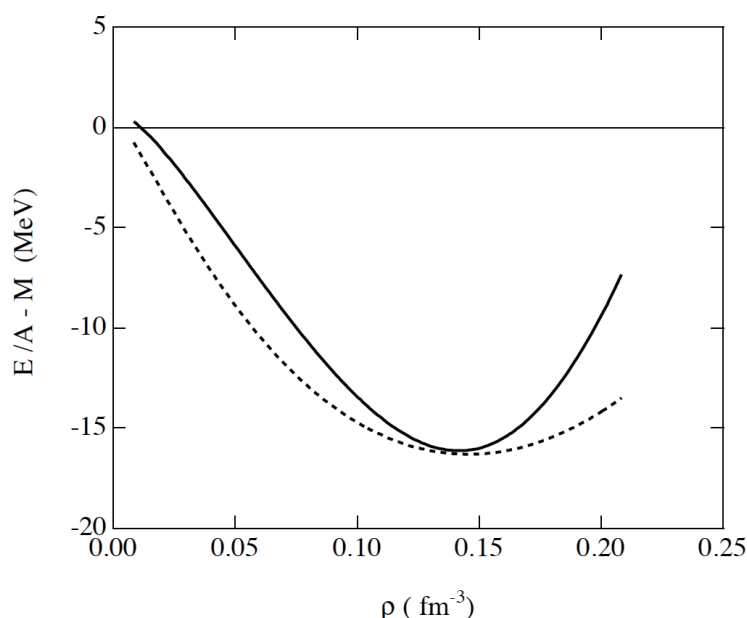


図 12.2: 線形 σ 模型による核物質の計算結果

に線形 σ 模型を使って核物質の性質を再現することが可能である。ただし、現象論的に決めたパラメータを使った核物質の性質と比べると、非圧縮率が大きく出過ぎるという問題がある。

さらに、現象論的に得た核物質の性質と比べるためにスカラーポテンシャルとベクターポテンシャルをそれぞれにプロットする。この際に比較のためにこれまでの現象論的なポテンシャルとの比較を行う。興味深いのは、それぞれに密度と共に増加する傾向は共通だがその値は現象論的な場合の約半分くらいである。この結果の意味するところは線形 σ 模型で計算した場合にはスピン軌道力が実験から必要な半分くらいしか出せないということの意味している。

これらの核物質の性質を得た上で、原子核を作りたい。この際に原子核の記述をする時にパイオンの平均場を有限にしたい。この試みは非常に興味深い。すなわち、もし核

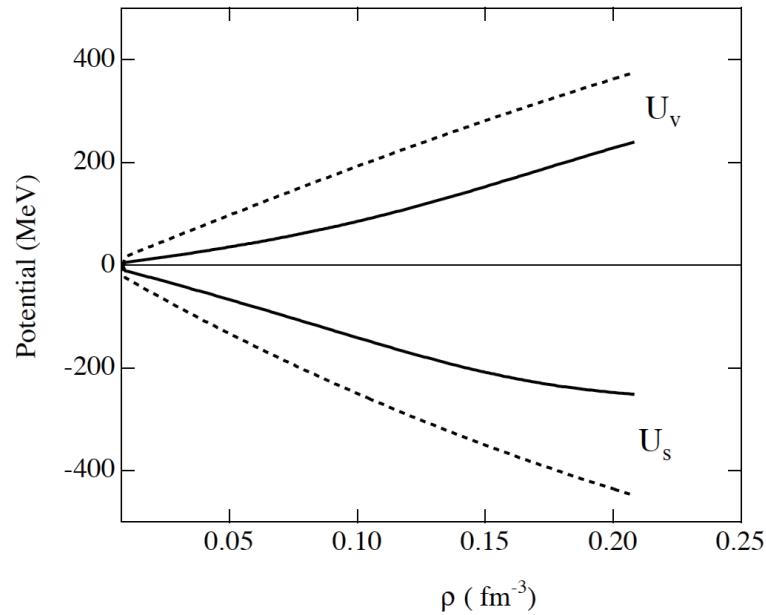


図 12.3: 核物質におけるスカラーポテンシャルとベクターポテンシャル

子がパリティが保存する量子状態にあるとするとパイオンの平均場は完全にゼロになる。しかし、もしパイオンの平均場が有限ならば核子のパリティが破れるという結果になる。もちろん、もし核子のパリティが破れるとパイオンの平均場は有限になることができる。

この計算をさらに続けていくことはできるが、この本の内容をむやみに複雑にする恐れがある。そこで、一応はこのような計算をした場合の流れだけを紹介することにする。この場合の数値計算は非常に難しいものになる。即ち、パリティを破った核子の波動関数を使う必要があるということは、それで作った原子核の波動関数はパリティを破ったものになる。原子核物理ではこの場合には、その破れたパリティを射影するというを行う。これは非常に複雑だが、現在の計算機的能力を使うと十分に数値計算が可能である。

要約

1. 原子核を記述するモデルとしてカイラル対称性を持ったラグランジアンを採用する。
2. 軽い原子核を記述する方法が完成した。
3. パイオンが重要な役割をしていることが分かった。

4. 現在はパイオンを陽に取り扱うことができる平均場理論を構築しつつある。



核子に隠されたお宝ついに発見

第13章 原子核と量子色力学

創立間もない大阪帝国大学の理学部で、湯川は原子核に働く力を研究していた。重力以外に電磁気力しか知られていない時期に、原子核の大きさ程度の距離でしか働かない力を媒介する粒子（ボソン）は、陽子と電子の中間の重さを持つ必要があった。その後、宇宙線の中に見つかった中間子はパイオンと名づけられた。このパイオンは有限の質量を持つこと以外に、擬スカラーの性質を持ち、核子とはスピン相互作用する。原子核を結びつける粒子は、核子のスピンをフリップさせながら核力を作っていく。このパイオンと核子の相互作用は、アイソスピンが1で擬スカラーの粒子を含む核子の理論によって、湯川理論が出てすぐに定式化された。しかし、このパイオンがもたらす力を直接扱って原子核を作る試みは、近年まであまり行われなかった。最近までは原子核物理はパイオンを直接扱うことなく発展してきた。即ち、原子核の構造は殻模型的であり、殻内の核子に働く相互作用を原子核の低い励起状態のスペクトルを再現する有効相互作用を導入することにより記述し、加速器実験とあいまって原子核の構造に対する理解が深まっていった。この章ではパイオンが量子色力学とどのように関係するのかを記述したい。

13.1 カイラル対称性の申し子であるパイオン

量子色力学ではクォークの質量は核子（陽子・中性子）の質量に比べて無視できるほどに小さい。従って、カイラル対称性が近似的に成り立っている。さらに、パイオンの質量も陽子の質量と比べると圧倒的に小さい。この近似的に成り立っているカイラル対称性がグルオンの非摂動的な働きにより自発的に破れるとクォークが大きな質量を持ち、その一方で、パイオンはほぼゼロに近い質量を持つことになる（南部-ゴールドストーンボソン）。この事実と、最初から少しカイラル対称性が破れていることによって、実験で観測されているパイオンの質量を説明できる。核子が大きな質量を持っているのは、内部構造を形成するクォークが大きな質量を獲得したことによると考えられている。

13.2 パイオンの原子核における働き

パイオンは原子核内で重要な役割を果たしている。陽子と中性子からなる重水素が束縛するのはパイオンの交換力による。最近では核子数が 10 くらいまでの原子核に対して近似のない第一原理の計算が行われ、3 体力までを含むハミルトニアンにより、原子核の基底状態と低い励起状態はほぼ完全に再現されることが示された。そこでは、パイオンは全体のほぼ 80 % の引力を与えることがわかった。パイオンの交換力は非相対論的には近似的にテンソル力で表現される。最近はこのテンソル力の働きの重要性が各所で指摘されている。 ${}^4\text{He}$ の構造は単純な殻模型的な構造ではなくテンソル力が重要な役割を果たしている。その証拠が ${}^4\text{He}$ と中性子の散乱の位相差に現れている。つまりスピン軌道力に対応する効果を生み出すことが示されている。最近では ${}^{11}\text{Li}$ のハロー構造もテンソル力が重要な働きをしており、中性子二つが角運動量 0 (s 波) の状態にある成分が基底状態に 50 % も占めていることが話題になっている。

原子核のように核子やパイオンの運動エネルギーが 10MeV 位の低エネルギースケールではクォークは核子の中に閉じ込められており、個々には原子核の構造に影響を与えない。むしろ、核子とパイオンを扱うラグランジアンで核子の多体系である原子核を表現することが適当である。最近になって、核子とパイオンの相互作用を与えるカイラル対称性をもったゲルマン・レビーのラグランジアンを使って原子核を作る試みがなされるようになった。質量が 40 ~ 60 位の中性子数と陽子数が等しい原子核の計算を行うと、原子核を作ることができることがわかった。さらには、パイオンは必要なスピン軌道力の半分くらいは出すことが可能であることがわかった。その意味では原子核のマジック数を説明するのにパイオンは重要な役目を果たしている可能性も高い。

核子をハリネズミ構造で表現する試みは 1942 年のパウリの研究がある。その後、スキルムやウィッテンなどが研究をし、最近の 5 つのクォークの新粒子の予言にも重要な武器となった。パイオンが原子核内でも重要な役割を果たしているのなら、原子核でもハリネズミ構造が存在している可能性が大いにある。

湯川理論は 1935 年に原子核を構成する理論として提唱されている。しかし、その性質がアイソベクトルで擬スカラー粒子であることによりその取り扱いが難しく、直接原子核を構成する議論は最近までなかった。ハドロン物理におけるパイオンの重要性や原子核物理でのテンソル力 (パイオン交換力) の研究からやっと多くの研究者が原子核でのパイオンの役割を直接扱う研究が始まった。まさしく、湯川理論が湯川生誕 100 年の今戻ってきた様相を呈している。

13.3 原子核の物理

原子核は核子の集合体である。核子に働く力は湯川によって導入されたパイオンが主要な役割を果たしている。そのパイオンは擬スカラー粒子であり、核子とはスピン相互作用する。その取り扱いは非常に難しくこれまではその正確な扱いはされてはこなかった。

原子核物理はメイヤーとヤンセンの殻模型から始まったと言ってよい。そこでは原子核のマジック数を再現するために非常に強いスピン軌道力を現象論的に導入することにより、原子核の基本的な性質が出るようにした。殻模型は最初から現象論であったために実験結果を使って、ハミルトニアンを決定することにより、原子核の細部にわたって記述できるモデルを作ることが可能であった。

この本では強いスピン軌道力を与えるモデルとして相対論的平均場モデルを使った。一般的には非常に強く引力を与えるスカラー交換力と非常に強く強い斥力を与えるベクトル交換力を導入することにより、50MeV位の引力と、強いスピン軌道力を与えるモデルを作ることになった。しかしこの場合でもパラメータを導入することによって原子核の基底状態の性質を再現している。その意味では現象論的な記述と言える。

一方で、強い相互作用は量子色力学がその基礎を与える。核子の内部構造を与えるクォークは核子に比べて非常に軽く、近似的にカイラル対称性は成り立っている。その自発的破れにより、クォークが大きな質量を持ち、それに応じて核子が大きな質量を持つ。それと同時にパイオンが軽い中間子としてカイラル対称性の破れを特徴づける中間子として出現する。

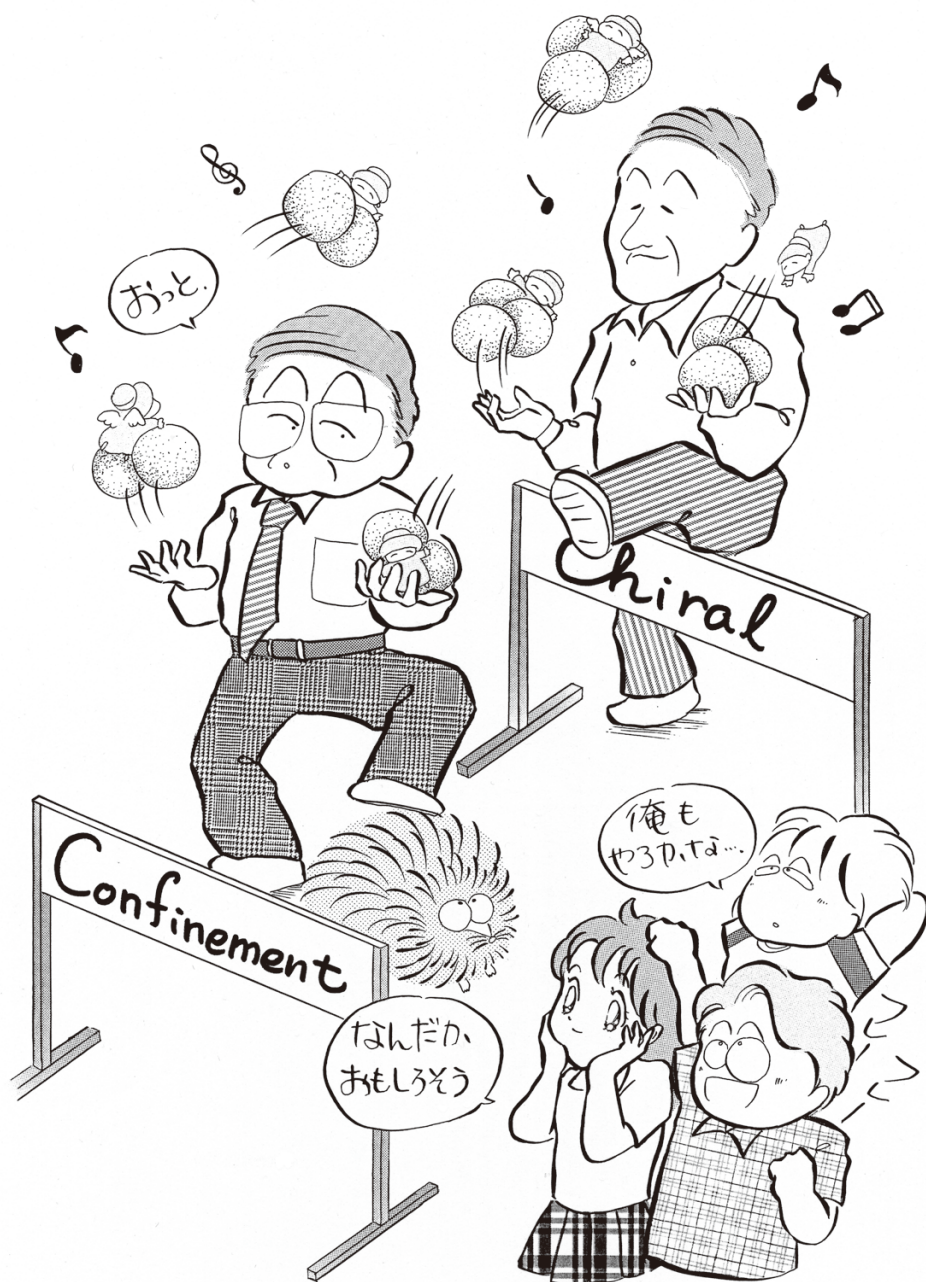
この本ではさらに、この対称性の紹介を行った。カイラル対称性が成り立つ核子と中間子のラグランジアンを導入した。このカイラル対称性が自発的に破れた場合のパイオンの出現についても詳細に記述した。最後の試みとして、このカイラル対称性を持つラグランジアンを使って、原子核を作る試みについて議論した。

この本で紹介した内容は非常に新しい最近の研究の紹介である。通常の原子核の教科書には議論されていないことを多く書いた。さらに問題も多く用意した。この本で、最前線の研究がどのように進んでいるかの一端が勉強できれば嬉しく思う。

要約

1. 原子核を構成する核子はクォークからできている。

2. クォークを記述する力学は量子色力学である。
3. 量子色力学ではカイラル対称性が近似的に成り立っている。
4. カイラル対称性が自発的に破れることによりクォークが質量を獲得する。
5. クォークからできている核子もクォークが質量を得ることにより、大きな質量を得る。
6. カイラル対称性の破れに伴って軽いパイオンが出現する。
7. パイオンは原子核を構成するのに重要な役割を担っている。



楽しい原子核探求の旅