

2004年3月23日 RCNP 研究会「核力と核構造」

Effective meson mass matrix, effective couplings and equation of state  
in generalized relativistic mean field theory

佐賀大学理工学部 河野 宏明

[共同研究者]

佐賀工業高校 土谷 邦人

佐賀大学大学院工学系研究科 堀之内 靖

目次

- 1、導入
- 2、一般的な相対論的平均場近似
- 3、有効結合ベクトルと有効中間子質量行列
- 4、状態方程式
- 5、中性子星の質量と半径
- 6、まとめ

## 1 導入

中性子星など特異な天体における新しい観測

====>軟らかい状態方程式の必要性

====>新しい相の必要性

しかし、観測は間接的

cf. 高エネルギー原子核衝突における QGP

結局のところ、「既成のハドロン模型で説明できない事」  
が示されないと「新しい相」の存在を証明した事にならない。

既成のハドロン模型でどの程度状態方程式が軟らかくなるか？

できるだけ一般的な相対論的平均場理論で半解析的に考えてみる。

対称核物質

K. Tsuchitani et al. Int. J. Mod. Phys. E10(2001)245

## 2 一般的な相対論的平均場近似

できるだけ一般的な相対論的平均場近似  
真空の効果を既に取り込んだ有効ラグランジアン

$$\begin{aligned} L = & \bar{\psi} \left[ \gamma^\mu \{ i\partial_\mu + \Sigma_\mu(\sigma, \omega, \rho) + \tau^a \Sigma_\mu^a(\sigma, \omega, \rho) \} - \{ m + \Sigma_s(\sigma, \omega) \} \right] \psi \\ & + \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} \\ & - U_M(\sigma, \omega, \rho) \end{aligned}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu, \quad G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \rho_\nu^a - \partial_\nu \rho_\mu^a - g_\rho \epsilon^{abc} \rho_\mu^b \rho_\nu^c$$

$\psi$ : 核子場

$\sigma$ :  $\sigma$  中間子場

$\omega$ :  $\omega$  中間子場

$\rho$ :  $\rho$  中間子場

$\Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)$ : 核子の自己エネルギー (スカラー部分)  
核子の有効質量  $m^* = m + \Sigma_s$

$\Sigma_\mu(\sigma, \omega, \rho)$ : 核子の自己エネルギー (ベクター部分)  
一様等方な核物質における平均場近似  $\Rightarrow \Sigma_0 = \Sigma_v$

$U_M(\sigma, \omega, \rho)$ : 中間子同士の相互作用によるポテンシャル

以下では中間子場について平均場近似を用いる

[核子伝播関数]

$$G_N(k) = G_F^N(k) + G_N^D(k)$$

$$G_N^F(k) = (\gamma^\mu k_\mu^* + m^*) \frac{-1}{-k^{*2} + m^{*2} - i\epsilon}$$

$$G_N^D(k) = (\gamma^\mu k_\mu^* + m^*) \frac{i\pi}{E_k^*} \delta(k^{*0} - E_k^*) \theta(k_{FN} - |\mathbf{k}|)$$

$$E_k^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^{*2}},$$

$$k^{*\mu} = (k^0 + \Sigma_v \pm \Sigma_r, \mathbf{k}) \quad (\text{陽子は+、中性子は-})$$

真空の効果は既にラグランジアンに入っているので、  
 $G_D$  だけを計算に用いる。

[バリオン密度、アイソベクター密度]

$$\rho_B = \rho_p + \rho_n \quad \rho_3 = \rho_p - \rho_n$$

$$\rho_N = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle_N = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^0 G_N^D(k)] = \frac{1}{3\pi^2} k_{FN}^3$$

$k_{FN}$  フェルミ運動量 (N=p or n)

[スカラー密度]

$$\rho_s = \rho_{sp} + \rho_{sn}$$

$$\begin{aligned} \rho_{sN}(\rho_N, m^*) &= \langle \bar{\psi} \psi \rangle_N = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_N^D(k)] \\ &= \frac{1}{2\pi^2} m^* \left\{ k_{FN} E_{FN}^* - m^{*2} \ln \left( \frac{k_{FN} + E_{FN}^*}{m^*} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$E_{FN}^* = \sqrt{k_{FN}^2 + m^{*2}}$$

[エネルギー密度]

$$\epsilon = \epsilon_p(\rho_p, m^*) + \epsilon_n(\rho_n, m^*) + U_M(\sigma, \omega, \rho) - \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho) \rho_B - \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)$$

$$\epsilon_N(\rho_N, m^*) = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ E_{FN}^* k_{FN} (3k_{FN}^2 + \frac{3}{2} m^{*2}) - \frac{3}{2} m^{*4} \log \left( \frac{E_{FN}^* + k_{FN}}{m^*} \right) \right\}$$

[核子伝播関数]

$$G_N(k) = G_F^N(k) + G_N^D(k)$$

$$G_N^F(k) = (\gamma^\mu k_\mu^* + m^*) \frac{-1}{-k^{*2} + m^{*2} - i\epsilon}$$

$$G_N^D(k) = (\gamma^\mu k_\mu^* + m^*) \frac{i\pi}{E_k^*} \delta(k^{*0} - E_k^*) \theta(k_{FN} - |\mathbf{k}|)$$

$$E_k^* = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^{*2}},$$

$$k^{*\mu} = (k^0 + \Sigma_v \pm \Sigma_r, \mathbf{k}) \quad (\text{陽子は+、中性子は-})$$

真空の効果は既にラグランジアンに入っているので、  
 $G_D$  だけを計算に用いる。

[バリオン密度、アイソベクター密度]

$$\rho_B = \rho_p + \rho_n \quad \rho_3 = \rho_p - \rho_n$$

$$\rho_N = \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle_N = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^0 G_N^D(k)] = \frac{1}{3\pi^2} k_{FN}^3$$

$k_{FN}$  フェルミ運動量 (N=p or n)

[スカラー密度]

$$\rho_s = \rho_{sp} + \rho_{sn}$$

$$\begin{aligned} \rho_{sN}(\rho_N, m^*) &= \langle \bar{\psi} \psi \rangle_N = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_N^D(k)] \\ &= \frac{1}{2\pi^2} m^* \left\{ k_{FN} E_{FN}^* - m^{*2} \ln \left( \frac{k_{FN} + E_{FN}^*}{m^*} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$E_{FN}^* = \sqrt{k_{FN}^2 + m^{*2}}$$

[エネルギー密度]

$$\epsilon = \epsilon_p(\rho_p, m^*) + \epsilon_n(\rho_n, m^*) + U_M(\sigma, \omega, \rho) - \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho) \rho_B - \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)$$

$$\epsilon_N(\rho_N, m^*) = \frac{1}{12\pi^2} \left\{ E_{FN}^* k_{FN} (3k_{FN}^2 + \frac{3}{2} m^{*2}) - \frac{3}{2} m^{*4} \log \left( \frac{E_{FN}^* + k_{FN}}{m^*} \right) \right\}$$



### 3 有効結合定数ベクター、有効中間子質量行列

有効ラグランジアンを現象論的に扱う場合は原理的には無限のパラメータを含む。

有効核子質量だけでなく、有効結合定数・有効中間子質量を定義すると見通しがよい。

例  $\sigma$  中間子場の運動方程式

$$\frac{\partial \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} = 0$$

より、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m^*(\sigma, \omega, \rho))}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_B \\ & - \frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \\ = & \frac{\partial m^*(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m^*)}{\partial m^*} - \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_B \\ & - \frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \\ = & \frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_s - \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_B \\ & - \frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \\ = & -g_{s\sigma}^* \rho_s + g_{v\sigma}^* \rho_B + g_{r\sigma}^* \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} = 0 \end{aligned}$$

ここで有効結合定数が以下のように定義されている。

$$g_{s\sigma}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma}, \quad g_{v\sigma}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma}, \quad g_{r\sigma}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma}$$

また、次の関係を使った。

$$\frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m + \Sigma_s)}{\partial \Sigma_s} = \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m^*)}{\partial m^*} = \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m + \Sigma_s)}{\partial m} = \rho_s$$



$$\begin{array}{c}
 \text{---} \\
 \textcircled{\varepsilon} = \textcircled{\varepsilon_N}^{\Sigma_s} - \textcircled{\rho_B}^{\Sigma_v} \\
 + \text{---} \times \text{---} \times + \text{---} \times \text{---} \times + \text{---} \times \text{---} \times + \dots
 \end{array}$$

図 3.2:  $\varepsilon$  のダイアグラム

$$\begin{array}{c}
 - \text{---} g_s^* \textcircled{\rho_s} + \text{---} g_v^* \textcircled{\rho_B} \\
 + \text{---} \times + \text{---} \times + \text{---} \times + \dots
 \end{array}$$

図 3.3:  $\varepsilon$  の中間子場で1階微分したダイアグラム

$$\begin{array}{c}
 \text{---} g_s^* \textcircled{\Pi} \text{---} g_s^* - \textcircled{\rho_s}^{g_s^*} + \textcircled{\rho_B}^{g_v^*} \\
 + \text{---} + \text{---} \times + \text{---} \times + \dots
 \end{array}$$

図 3.4:  $\varepsilon$  の中間子場で2階微分したダイアグラム。  $m^{*2} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \phi_1 \partial \phi_2}$



同様にして、 $\omega$  中間子の運動方程式は、

$$\frac{\partial \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega} = 0$$

より、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m^*(\sigma, \omega, \rho))}{\partial \omega} - \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega} \rho_B \\ & - \frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega} \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega} \\ & = -g_{s\omega}^* \rho_s + g_{v\omega}^* \rho_B + g_{r\omega}^* \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega} = 0 \end{aligned}$$

ただし、有効結合定数は以下のように定義されている。

$$g_{s\omega}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega}, \quad g_{v\omega}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega}, \quad g_{r\omega}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega}$$

$\rho$  中間子の運動方程式は、

$$\frac{\partial \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho} = 0$$

より、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m^*(\sigma, \omega, \rho))}{\partial \rho} - \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho} \rho_B \\ & - \frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho} \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho} \\ & = -g_{s\rho}^* \rho_s + g_{v\rho}^* \rho_B + g_{r\rho}^* \rho_3 + \frac{\partial U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho} = 0 \end{aligned}$$

ただし、有効結合定数は以下のように定義されている。

$$g_{s\rho}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho}, \quad g_{v\rho}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho}, \quad g_{r\rho}^* \equiv -\frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho}$$

さらに、

$$\frac{\partial G_N}{\partial \Sigma_s} = (G_N)^2$$

$$\frac{\partial G_N^D}{\partial \Sigma_s} = G_N^F G_N^D + G_N^D G_N^F + G_N^D G_N^D$$

$$\frac{\partial G_N^F}{\partial \Sigma_v} = G_N^F \gamma^0 G_N^F$$

$$\frac{\partial G_N^D}{\partial \Sigma_v} = G_N^F \gamma^0 G_N^D + G_N^D \gamma^0 G_N^F + G_N^D \gamma^0 G_N^D$$

の性質を使うと、次のように中間子の自己エネルギー (RPA) を導く事ができる。例えば、エネルギー密度を  $\sigma$  で2回偏微分すると、上記の関係を使い、 $\sigma$  中間子の自己エネルギーとして、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2} \\ &= -ig_{s\sigma}^{*2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_p^F(k) G_p^D(k) + G_p^D(k) G_p^F(k) + G_p^D(k) G_p^D(k)] \\ & \quad -ig_{s\sigma}^{*2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_n^F(k) G_n^D(k) + G_n^D(k) G_n^F(k) + G_n^D(k) G_n^D(k)] \\ & \quad +ig_{s\sigma\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_p^D(k) + G_n^D(k)] \\ & \quad -ig_{v\sigma\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^0 \{G_p^D(k) + G_n^D(k)\}] \\ & \quad -ig_{r\sigma\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^0 \{G_p^D(k) - G_n^D(k)\}] + \frac{\partial^2 U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2} \\ & \equiv g_{s\sigma}^{*2} \Pi - g_{s\sigma\sigma}^* \rho_s + g_{v\sigma\sigma}^* \rho_B + g_{r\sigma\sigma}^* \rho_3 + \frac{\partial^2 U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2} \end{aligned}$$

を得る。

一般に、

$$\frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \phi_2 \partial \phi_1} = g_{s\phi_1}^* g_{s\phi_2}^* \Pi - g_{s\phi_1\phi_2}^* \rho_s + g_{v\phi_1\phi_2}^* \rho_B + g_{r\phi_1\phi_2}^* \rho_3 \\ + \frac{\partial^2 U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \phi_2 \partial \phi_1}$$

が言える。ただし、 $\phi_1, \phi_2 = \sigma, \omega, \rho$  であり、 $g_{f\phi_1\phi_2}^*$  ( $f=s, v, r$ ) は、

$$g_{f\phi_1\phi_2}^* \equiv - \frac{\partial^2 \Sigma_f(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \phi_2 \partial \phi_1}$$

で定義される。

(注意) 上記の自己エネルギーでは外線の運動量は零である。

以下では、中間子場の密度微分が重要な役割を果たすので、これについて考える。

$\sigma$  中間子の運動方程式を  $\rho_B$  で微分する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho_B} \frac{\partial \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} + \frac{d\sigma}{d\rho_B} \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2} \\ & + \frac{d\omega}{d\rho_B} \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma \partial \omega} + \frac{d\rho}{d\rho_B} \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma \partial \rho} = 0 \end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned} \frac{df(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{d\rho_B} & \equiv \left( \frac{\partial}{\partial \rho_B} + \frac{\partial \sigma(\rho_B, \rho_3)}{\partial \rho_B} \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial \omega(\rho_B, \rho_3)}{\partial \rho_B} \frac{\partial}{\partial \omega} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \rho(\rho_B, \rho_3)}{\partial \rho_B} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) f(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho) \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_B} \frac{\partial \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} & = \frac{\partial}{\partial \rho_B} \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m^*(\sigma, \omega, \rho))}{\partial \sigma} \\ & - \frac{\partial}{\partial \rho_B} \left( \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_B \right) - \frac{\partial}{\partial \rho_B} \left( \frac{\partial \Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \rho_3 \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial \rho_B} \left( \frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \frac{\partial \epsilon_{p+n}(\rho_B, \rho_3, m^*)}{\partial m^*} \right) \\ & - \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \\ & = -g_{s\sigma}^* \frac{\partial \rho_s(\rho_B, \rho_3, m^*)}{\partial \rho_B} + g_{v\sigma}^* = -g_{s\sigma}^* \hat{\gamma}^{-1} + g_{v\sigma}^* \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\hat{\gamma}$  は有効  $\gamma$  因子で、

$$\hat{\gamma}^{-1} \equiv \frac{\partial \rho_s(\rho_B, \rho_3, m^*)}{\partial \rho_B} = \frac{1}{2} \left( \frac{m^*}{E_{Fp}^*} + \frac{m^*}{E_{Fn}^*} \right)$$

で与えられる。上の式を最初の式に代入して、

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{d\rho_B} \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2} + \frac{d\omega}{d\rho_B} \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma \partial \omega} \\ & + \frac{d\rho}{d\rho_B} \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma \partial \rho} = g_{s\sigma}^* \hat{\gamma}^{-1} - g_{v\sigma}^* \end{aligned}$$

他の中間子についても同様にすると、まとめて、

$$M^{*2} \frac{d}{d\rho_B} \Phi = -\hat{g}$$

を得る。ここで、有効結合ベクトル  $\hat{g}$  と  $\Phi$  は、

$$\hat{g} \equiv -\tilde{\gamma}^{-1} g_s^* + g_v^*; \quad g_s^* \equiv \begin{bmatrix} g_{s\sigma}^* \\ g_{s\omega}^* \\ g_{s\rho}^* \end{bmatrix}, \quad g_v^* \equiv \begin{bmatrix} g_{v\sigma}^* \\ g_{v\omega}^* \\ g_{v\rho}^* \end{bmatrix},$$

$$\Phi \equiv \begin{bmatrix} \sigma \\ \omega \\ \rho \end{bmatrix}$$

で定義され、

$$M^{*2} \equiv \begin{bmatrix} m_{\sigma}^{*2} & m_{\sigma\omega}^{*2} & m_{\sigma\rho}^{*2} \\ m_{\sigma\omega}^{*2} & -m_{\omega}^{*2} & m_{\omega\rho}^{*2} \\ m_{\sigma\rho}^{*2} & m_{\omega\rho}^{*2} & -m_{\rho}^{*2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma \partial \omega} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma \partial \omega} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \omega^2} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \omega \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma \partial \rho} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \omega \partial \rho} & \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \end{bmatrix}$$

は有効中間子質量行列である。この行列の行列式が零でなければ、

$$\frac{d\Phi}{d\rho_B} = -(M^{*2})^{-1} \hat{g}$$

が得られる。同様にして、

$$\frac{d\Phi}{d\rho_3} = -(M^{*2})^{-1} \tilde{g}$$

$$\tilde{g} = -\tilde{\gamma}^{-1} g_s^* + g_r^* = -\frac{1}{2} \left( \frac{m^*}{E_{Fp}^*} - \frac{m^*}{E_{Fn}^*} \right) g_s^* + g_r^*$$



#### 4 状態方程式

\* 標準密度近傍  
非圧縮率

$$K \equiv 9\rho_{B0}^2 \left. \frac{d^2(\epsilon/\rho_B)}{d\rho_B^2} \right|_{\substack{\rho_B=\rho_{B0} \\ \rho_3=0}} = 9 \left. \frac{dP}{d\rho_B} \right|_{\substack{\rho_B=\rho_{B0} \\ \rho_3=0}} = 9\rho_{B0} \left. \frac{d\mu}{d\rho_B} \right|_{\substack{\rho_B=\rho_{B0} \\ \rho_3=0}}$$

$\rho_{B0}$  は標準密度。

この模型では、化学ポテンシャルについて、

$$\mu = E_F^* - \Sigma_v = \sqrt{k_F^2 + m^{*2}} - \Sigma_v$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\rho_B} &= \frac{d\mu}{d\rho_B} = \frac{dk_F}{d\rho} \frac{k_F}{E_F^*} \\ &+ \frac{m^*}{E_F^*} \left( \frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\rho_B} + \frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\rho_B} + \frac{\partial \Sigma_s(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\rho_B} \right) \\ &- \left( \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\rho_B} + \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\rho_B} + \frac{\partial \Sigma_v(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\rho_B} \right) \\ &= \frac{k_F^2}{3\rho E_F^*} + \frac{m^*}{E_F^*} \left( -g_{s\sigma}^* \frac{d\sigma}{d\rho_B} - g_{s\omega}^* \frac{d\omega}{d\rho_B} - g_{s\rho}^* \frac{d\rho}{d\rho_B} \right) \\ &+ \left( g_{v\sigma}^* \frac{d\sigma}{d\rho_B} + g_{v\omega}^* \frac{d\omega}{d\rho_B} + g_{v\rho}^* \frac{d\rho}{d\rho_B} \right) \\ &= \frac{k_F^2}{3\rho_B E_F^*} + {}^t \hat{g} \frac{d\Phi}{d\rho_B} = \frac{k_F^2}{3\rho_B E_F^*} - {}^t \hat{g} (M^{*2})^{-1} \hat{g} \end{aligned}$$

したがって、

$$K = 9\rho_{B0} \left( \frac{k_F^2}{3\rho_B E_F^*} - {}^t \hat{g} (M^{*2})^{-1} \hat{g} \right) \Big|_{\substack{\rho_B=\rho_{B0} \\ \rho_3=0}}$$

特に中間子混合がなく、 $\Sigma_s = \Sigma_s(\sigma)$  かつ  $\Sigma_v = \Sigma_v(\omega)$  であるなら

$$-{}^t \hat{g} (M^{*2})^{-1} \hat{g} = \frac{g_{v\omega}^{*2}}{m_\omega^{*2}} - \frac{g_{s\sigma}^{*2}}{m_\sigma^{*2}} \hat{\gamma}^{-2}$$

対称エネルギー

$$\begin{aligned}
 a_4 &\equiv \frac{1}{2} \rho_{B0} \left. \frac{d^2 \epsilon}{d\rho_3} \right|_{\substack{\rho_B = \rho_{B0} \\ \rho_3 = 0}} = \frac{k_{F0}^2}{6E_{F0}} - \frac{1}{2} \rho_{B0} \frac{d\Sigma_r(\sigma, \omega, \rho)}{d\rho_3} \\
 &= \frac{k_{F0}^2}{6E_{F0}} - \frac{1}{2} \rho_{B0} \left( \frac{\partial \Sigma_r}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{d\rho_3} + \frac{\partial \Sigma_r}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\rho_3} + \frac{\partial \Sigma_r}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\rho_3} \right) \\
 &= \frac{k_{F0}^2}{6E_{F0}^*} + \frac{1}{2} \rho_{B0} {}^t \tilde{g} \frac{d\Phi}{d\rho_3} \\
 &= \frac{k_{F0}^2}{6E_{F0}^*} - \frac{1}{2} \rho_{B0} {}^t \tilde{g} (M^{*2})^{-1} \tilde{g}
 \end{aligned}$$

$k_{F0}$  と  $E_{F0}^* = \sqrt{k_{F0}^2 + m^{*2}}$  は、標準密度における値。

標準密度では、

$$-{}^t \hat{g} (M^{*2})^{-1} \hat{g} = \frac{K}{9\rho_{B0}} - \frac{k_{F0}^2}{3\rho_{B0} E_{F0}^*}$$

は小さい。

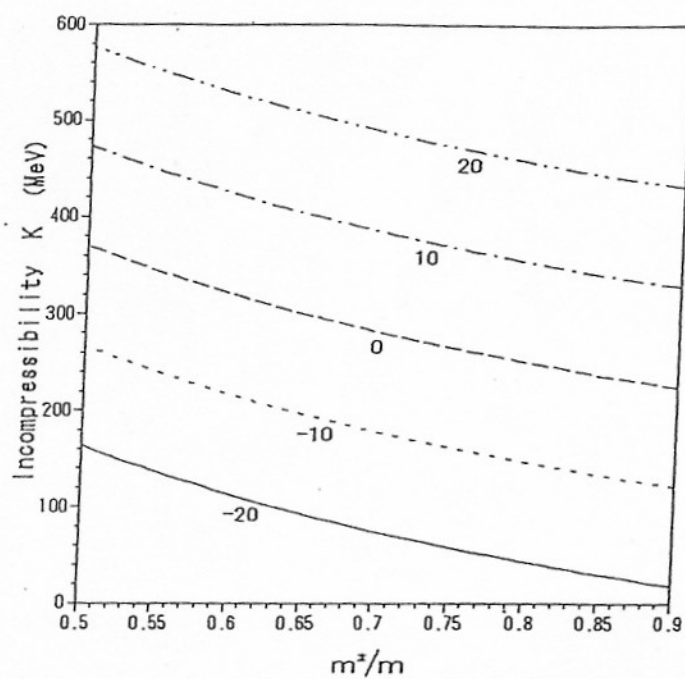


図 3.7: 非圧縮率  $K$  を縦軸にとり  $m^*/m$  を振った図 ( $-g^*(M^{*2})^{-1}g^*$  を固定)。

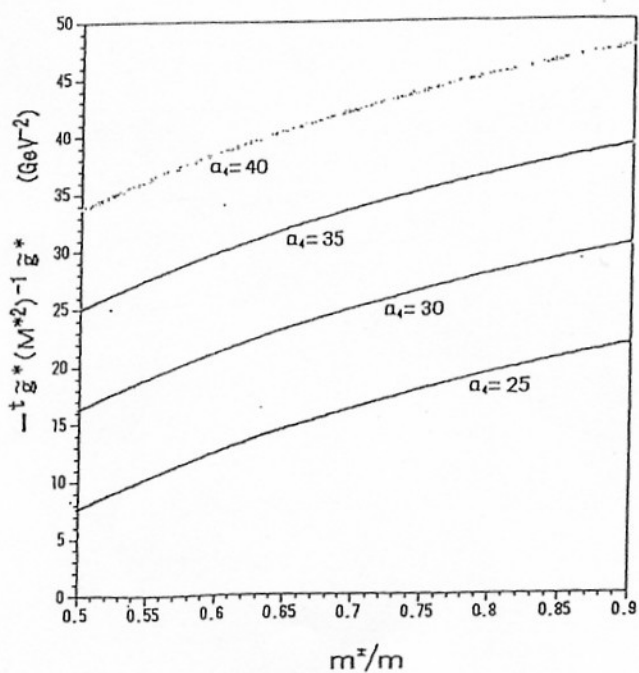


図 4.2:  $-g^*(M^{*2})^{-1}g^*$  を縦軸にとり  $m^*/m$  を振った図 (対称エネルギーを  $a_4$  を各々固定)。

\* 高密度領域

拡張された非圧縮率 (圧力のバリオン密度での微分)

$$K(\rho_B) \equiv 9 \frac{dP}{d\rho_B} = 3 \frac{k_F^2}{E_F^*} - 9\rho_B {}^t\hat{g}(M^{*2})^{-1}\hat{g} \equiv K_1 + K_2$$

対称核物質で、中間子混合がなく、 $\Sigma_s = \Sigma_s(\sigma)$  かつ  $\Sigma_v = \Sigma_v(\omega)$  であるなら、

$$-{}^t\hat{g}(M^{*2})^{-1}\hat{g} = \frac{g_{v\omega}^{*2}}{m_\omega^{*2}} - \frac{g_{s\sigma}^{*2}}{m_\sigma^{*2}}\hat{\gamma}^{-2}.$$

したがって、状態方程式を軟らかくするには、高密度で、 $m_\omega^*$  や  $g_{s\sigma}^*$  は大きく、 $m_\sigma^*$  や  $g_{v\omega}^*$  は小さくすればよい。

以下では、次のような形を仮定して、数値計算を行った。

$$\Sigma_s(\sigma) = -g_\sigma\sigma + g_{\sigma 2}\sigma^2$$

$$\Sigma_v(\omega) = -g_\omega\omega + g_{\omega 3}\omega^3$$

$$\Sigma_r(\rho) = -g_\rho\rho,$$

$$U_M(\sigma, \omega) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{1}{3}c_{\sigma 3}\sigma^3 + \frac{1}{4}c_{\sigma 4}\sigma^4 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega^2 - \frac{1}{4}c_{\omega 4}\omega^4 - \frac{1}{2}m_\rho^2\rho^2$$

### 有効結合定数

$$\mathbf{g}_s^* = \begin{bmatrix} g_{s\sigma}^* \\ g_{s\omega}^* \\ g_{s\rho}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_\sigma - 2g_{\sigma 2}\sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_v^* = \begin{bmatrix} g_{v\sigma}^* \\ g_{v\omega}^* \\ g_{v\rho}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0 \\ g_\omega - 3g_{\omega 3}\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}_r^* = \begin{bmatrix} g_{r\sigma}^* \\ g_{r\omega}^* \\ g_{r\rho}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_\rho \end{bmatrix}$$

### 有効中間子質量

$$\begin{aligned} m_\sigma^{*2} &= m_\sigma^2 + 2c_{\sigma 3}\sigma + 3c_{\sigma 4}\sigma^2 + 2g_{\sigma 2}\rho_s \\ &\quad + \frac{g_{s\sigma}^{*2}\lambda}{2\pi^2} \left\{ k_F E_F^* + 2 \frac{k_F m^{*2}}{E_F^*} - 3m^{*2} \log \left( \frac{k_F + E_F^*}{m^*} \right) \right\}. \\ m_\omega^{*2} &= m_\omega^2 + 3c_{\omega 4}\omega^2 + 6g_{\omega 3}\omega\rho_B, \\ m_\rho^{*2} &= m_\rho^2, \end{aligned}$$

パラメータセット B や D は軟らかく C は硬い事が予測される。

===> 予測どおりの結果



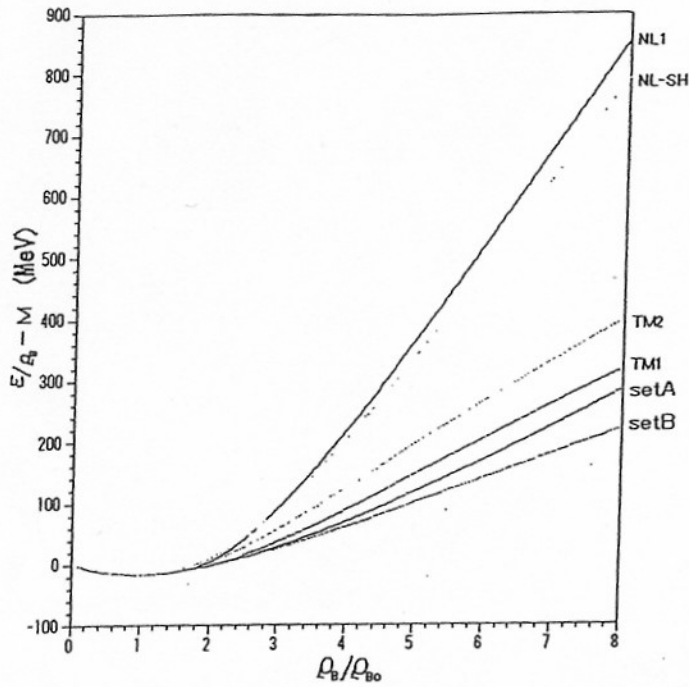


図 3.19: 1 核子当りの結合エネルギーの状態方程式 (密度依存性) についての TM1, TM2, NL1, NL-SH と setA, setB との比較。

|                           | A       | B       | C       | D       |                      |
|---------------------------|---------|---------|---------|---------|----------------------|
| $g_\sigma^2/m_\sigma^2$   | 219.098 | 217.380 | 223.429 | 207.730 | (GeV <sup>-2</sup> ) |
| $g_\omega^2/m_\omega^2$   | 112.529 | 113.379 | 112.529 | 117.696 | (GeV <sup>-2</sup> ) |
| $g_{\sigma 2}/g_\sigma^2$ | 0.0     | 0.0     | 0.27    | 0.0     | (GeV <sup>-1</sup> ) |
| $g_{\omega 3}/g_\omega^3$ | 0.0     | 0.0     | 0.0     | 0.65    | (GeV <sup>-2</sup> ) |
| $c_{\sigma 3}/g_\sigma^3$ | 1.9400  | 0.86155 | 0.31302 | -5.0507 | (MeV)                |
| $c_{\sigma 4}/g_\sigma^4$ | 2.7675  | 3.2396  | 1.1470  | 5.7818  | $\times 10^{-2}$     |
| $c_{\omega 4}/g_\omega^4$ | 0.0     | 0.004   | 0.0     | 0.0     |                      |

表 3.3: setA～setD とそのパラメータセッティングの結果

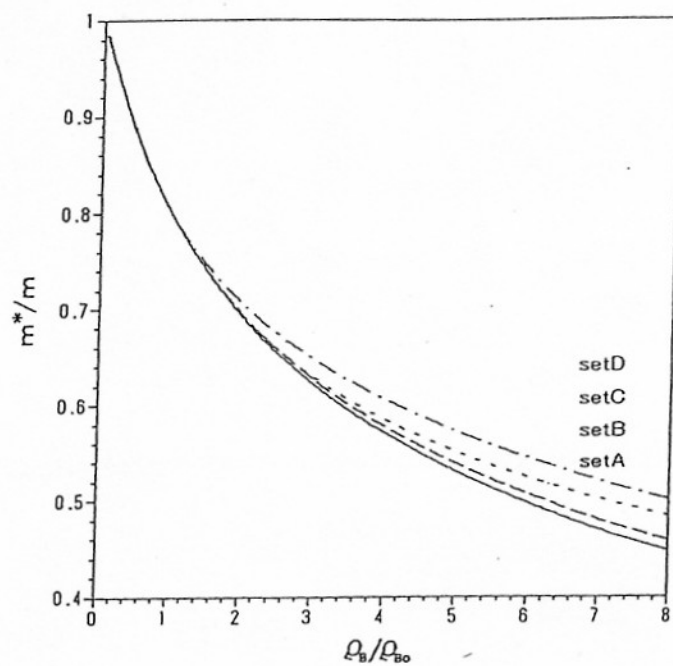


図 3.9: setA · B · C · D の核子有効質量  $m^*$  の密度依存性

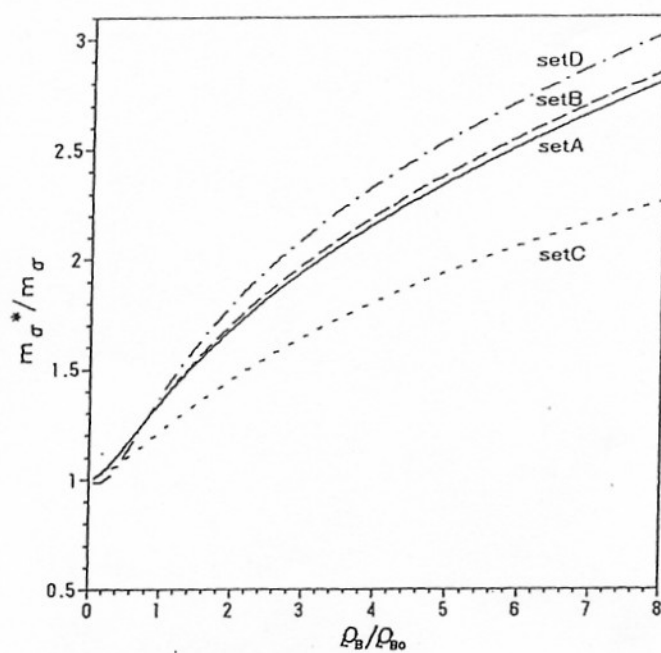


図 3.10: setA · B · C · D の  $\sigma$  中間子の有効質量  $m_\sigma^*$  の密度依存性

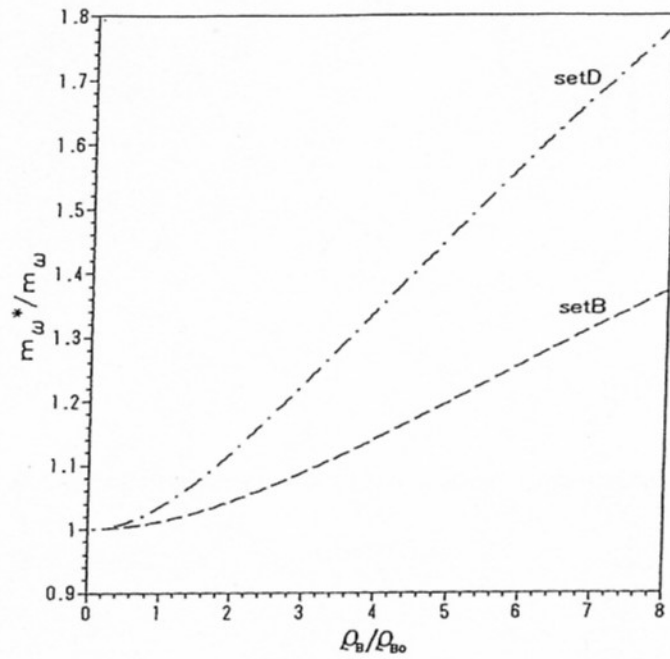


図 3.11: setB・D の  $\omega$  中間子の有効質量  $m_{\omega}^*$  の密度依存性

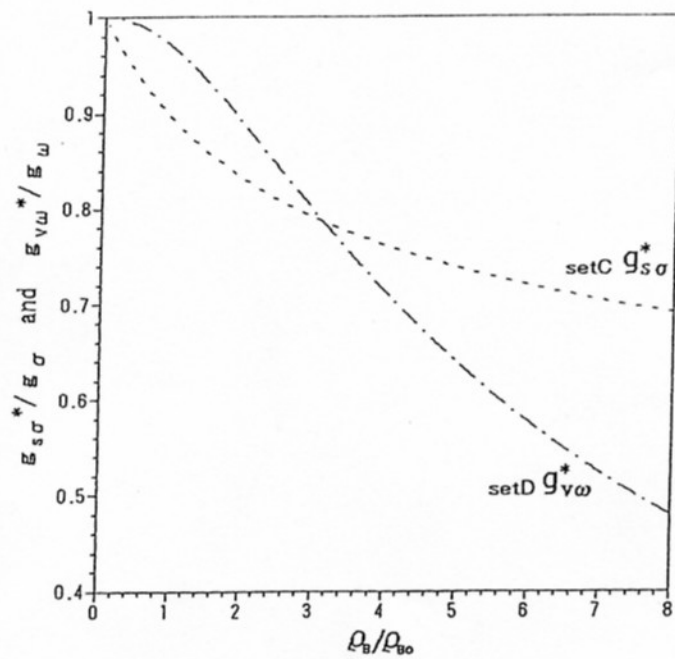


図 3.12: setC の有効結合定数  $g_{s\sigma}^*$  と setD の有効結合定数  $g_{\nu\omega}^*$  の密度依存性

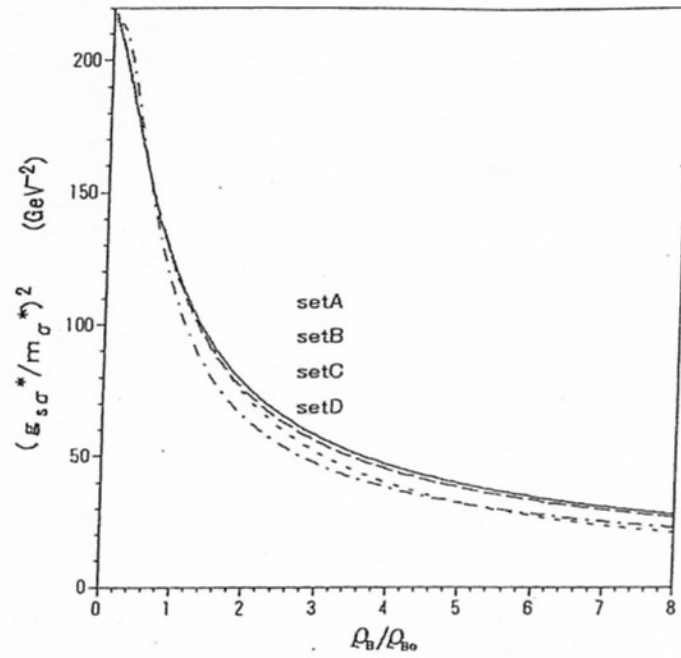


図 3.13: setA・B・C・D の  $\sigma$  中間子の有効質量と有効結合定数の比  $g_{s\sigma}^*/m_\sigma^*$  の密度依存性

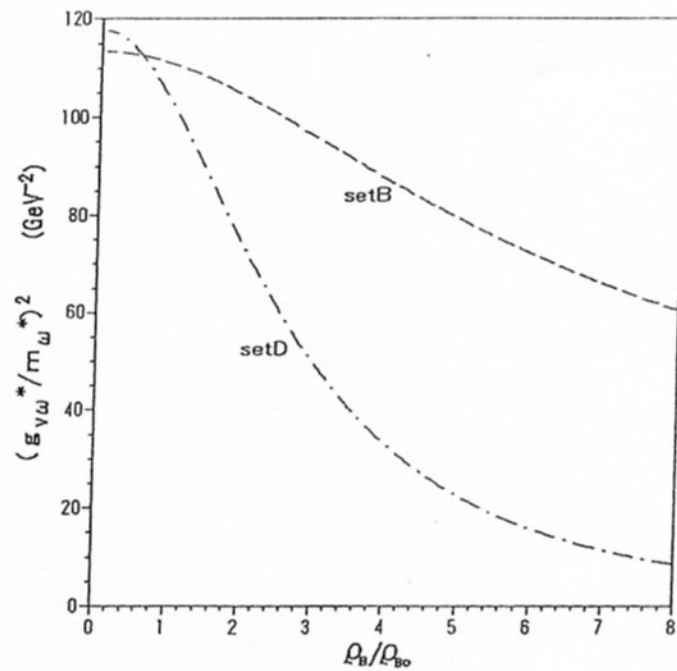


図 3.14: setB・D の  $\omega$  中間子の有効質量と有効結合定数の比  $g_{v\omega}^*/m_\omega^*$  の密度依存性

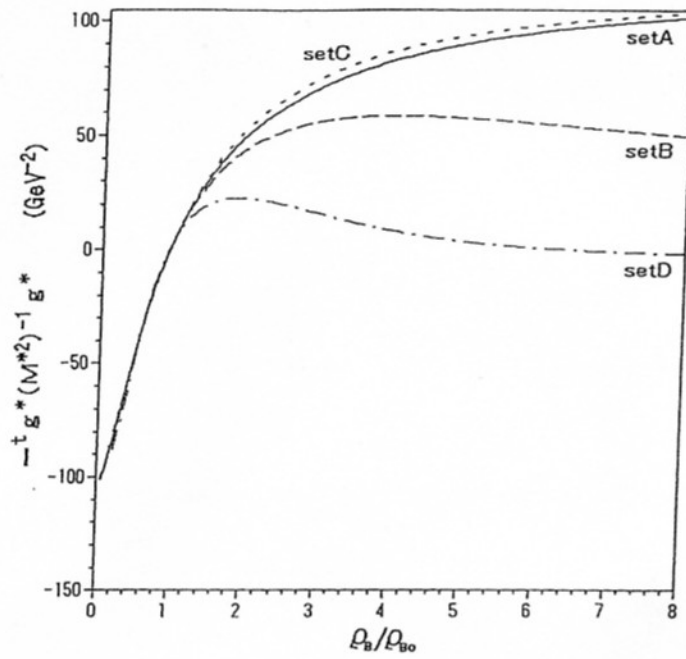


図 3.15:  $\sigma$ - $\omega$  有効引力斥力差  $-g^*(M^{*2})^{-1}g^*$  の密度依存性

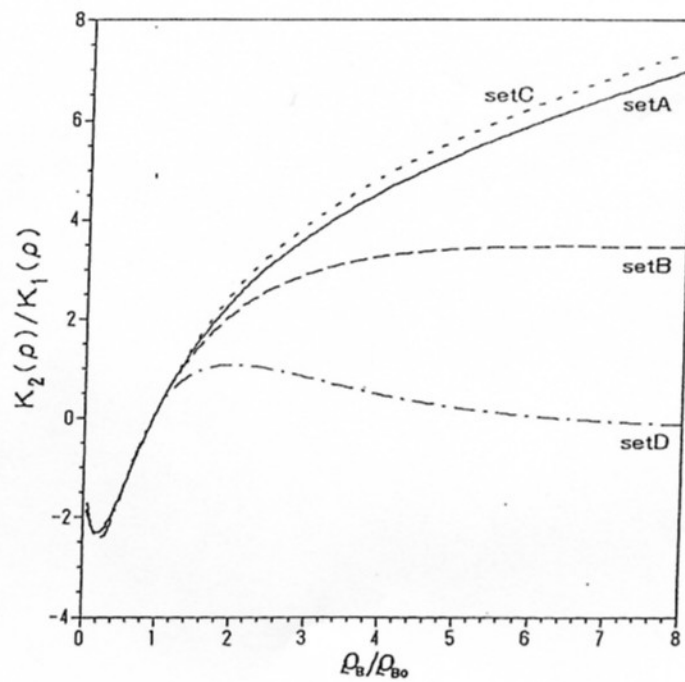


図 3.16:  $\sigma$ - $\omega$  有効引力斥力差  $-g^*(M^{*2})^{-1}g^*$  の密度依存性を見るために非圧縮率の式において1項目との比をとってどちらが支配的になるのかということで表した図



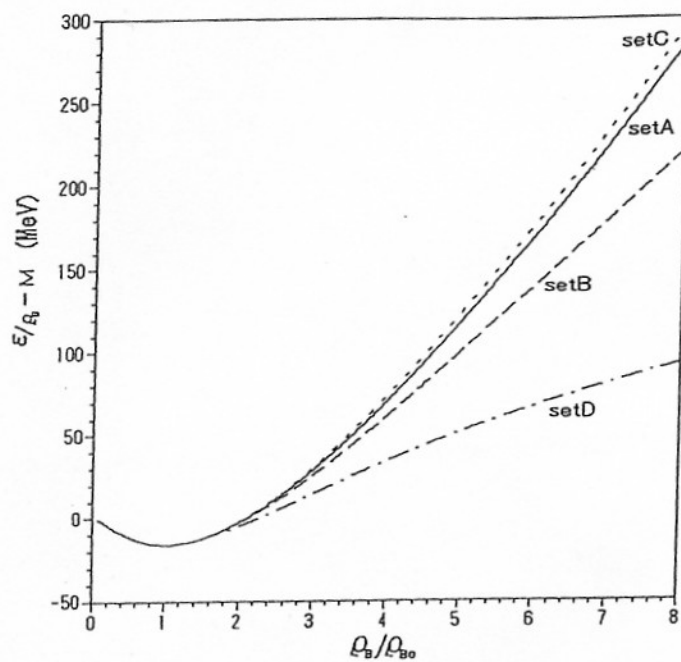


図 3.17: 1 核子当りの結合エネルギーの状態方程式 (密度依存性)

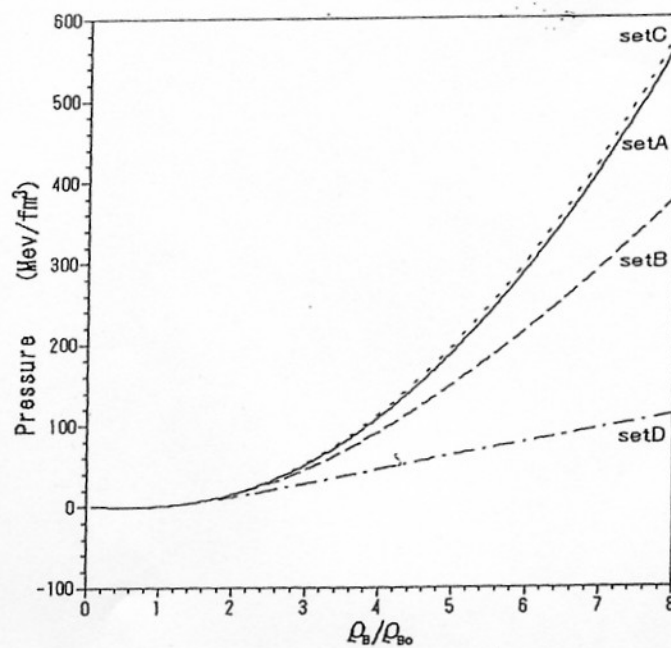


図 3.18: 圧力の状態方程式 (密度依存性)

図 4.13:  $\text{set} E \cdot F$  の  $\rho$  中間子の有効質量  $m_\rho^*$  の  $\rho_3$  依存性 ( $\rho_B = \rho_{B0}, 3\rho_{B0}, 5\rho_{B0}$  に固定)

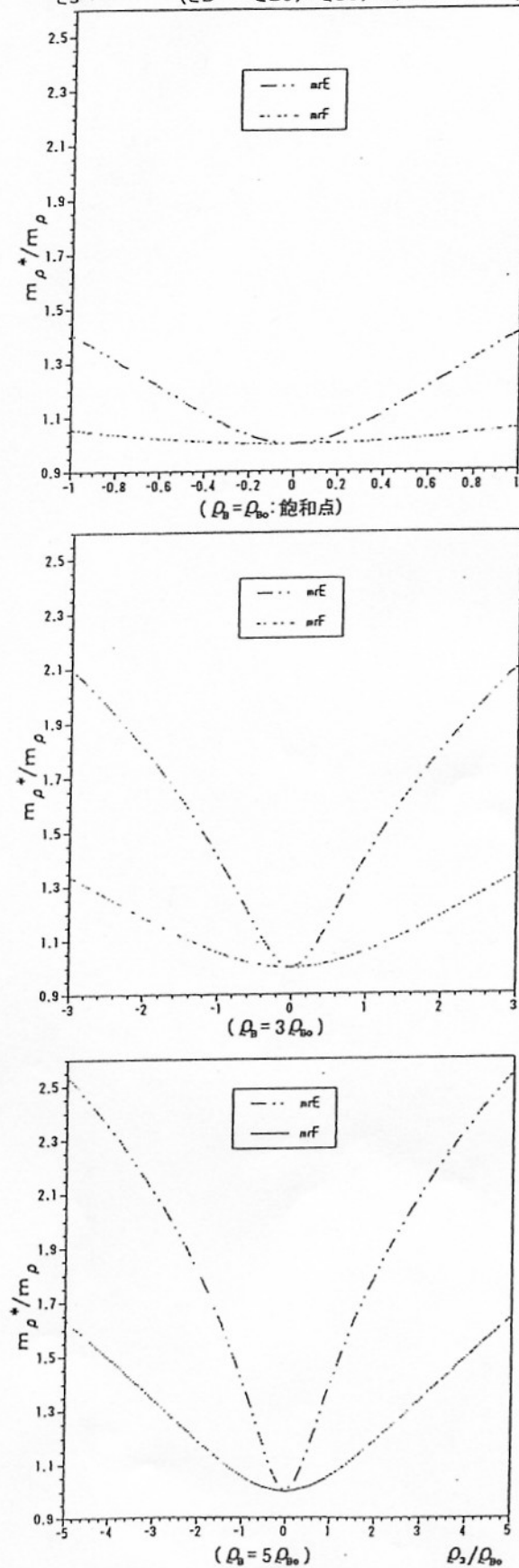
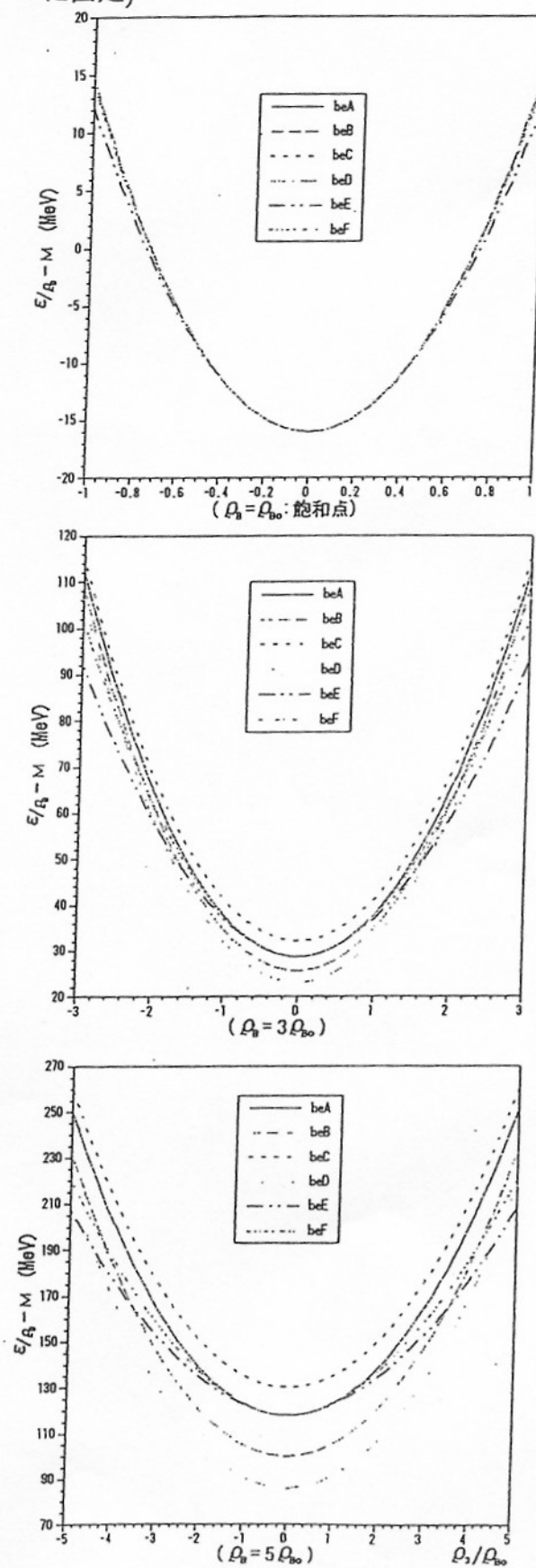


図 4.17: 1 核子当りの結合エネルギーの状態方程式 ( $\rho_3$  依存性) ( $\rho_B = \rho_{B0}, 3\rho_{B0}, 5\rho_{B0}$  に固定)



## 5 中性子星の質量と半径

それぞれの状態方程式について、TOV 方程式を解いて、中性子星の質量と半径の関係を求めた。

現状では、 $\sigma$ - $\omega$  混合のモデル L が一番半径が小さくなるように思える。

$$U_{\sigma-\omega} = -\frac{1}{2}c_{\sigma 2\omega 2}\sigma^2\omega^2$$

$$\begin{aligned} m_{\sigma}^{*2} &= m_{\sigma}^2 + 2c_{\sigma 3}\sigma + 3c_{\sigma 4}\sigma^2 + 2g_{\sigma 2}\rho_s - c_{\sigma 2\omega 2}\omega^2 \\ &\quad + \frac{g_{s\sigma}^{*2}\lambda}{2\pi^2} \left\{ k_F E_F^* + 2\frac{k_F m^{*2}}{E_F^*} - 3m^{*2} \log \left( \frac{k_F + E_F^*}{m^*} \right) \right\} \\ m_{\omega}^{*2} &= m_{\omega}^2 + 3c_{\omega 4}\omega^2 + 6g_{\omega 3}\omega\rho_B + c_{\sigma 2\omega 2}\omega^2 \end{aligned}$$

ベクター中間子の質量が小さくなると、状態方程式は硬くなる

F. Weber, Gy. Wolf, T. Maruyama, S. Chiba,  
nucl-th/0202071

$\omega$  中間子の有効質量を大きくせずに、状態方程式を柔らかくできるか？

$m_{\sigma}^*$  の減少

====> 自己相互作用ではポテンシャルが不安定になる  
のおそれ

$\sigma$ - $\omega$  混合====>  $\omega$  中間子の有効質量は大きくなる。

$g_{\nu\omega}^*$  の減少====>  $\omega$  中間子の有効質量は大きくなる。

$g_{s\sigma}^*$  の増加？====>  $\sigma$  中間子の有効質量は小さくなる

注意    ここで定義している有効中間子質量は on-shell  
ではない !!

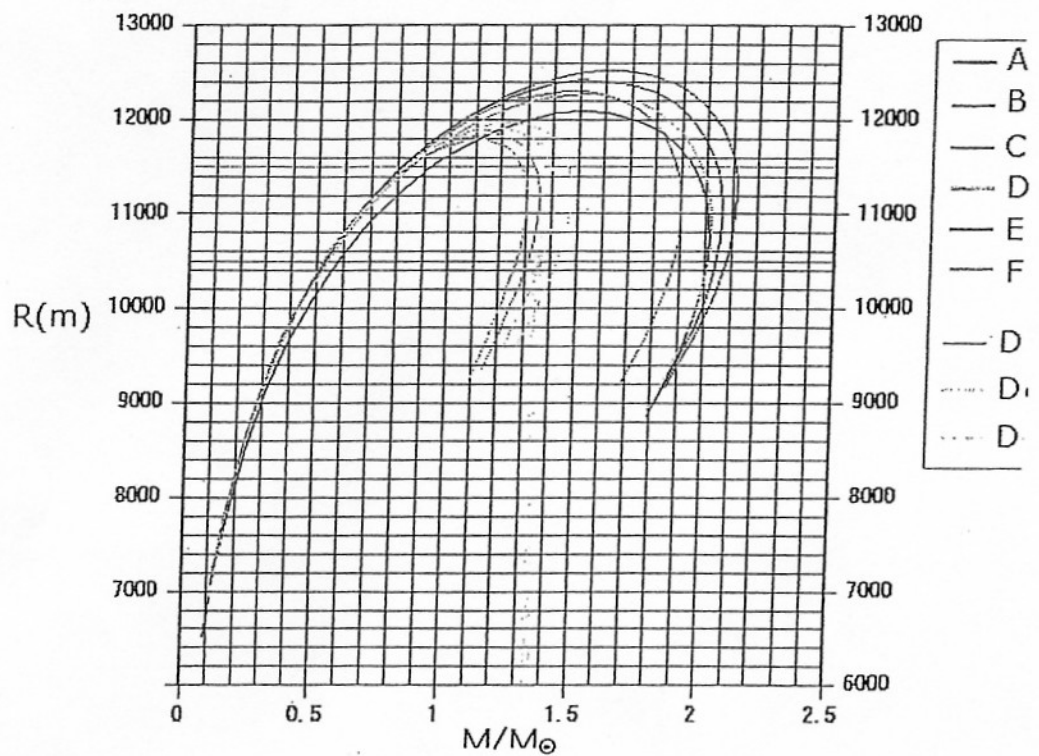


図 5.13: setA～setF の中性子星の質量  $M/M_\odot$  と半径の関係図。横軸は中性子星質量、縦軸は中性子星半径。それぞれの質量に各々の半径が対応している。setD については  $\Lambda_c$ : 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 を示した。

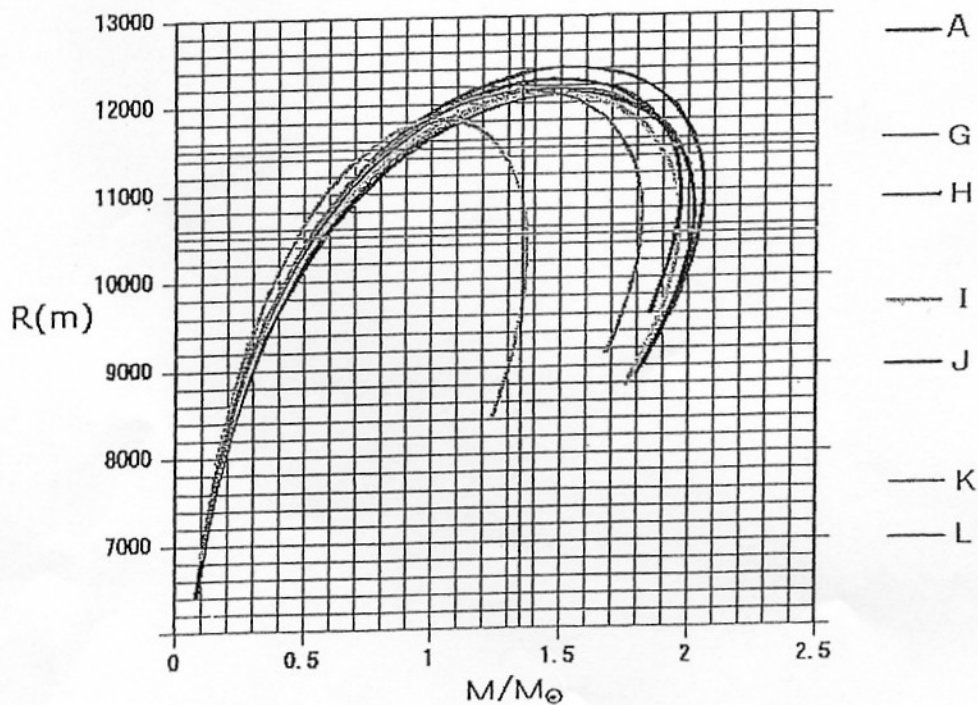
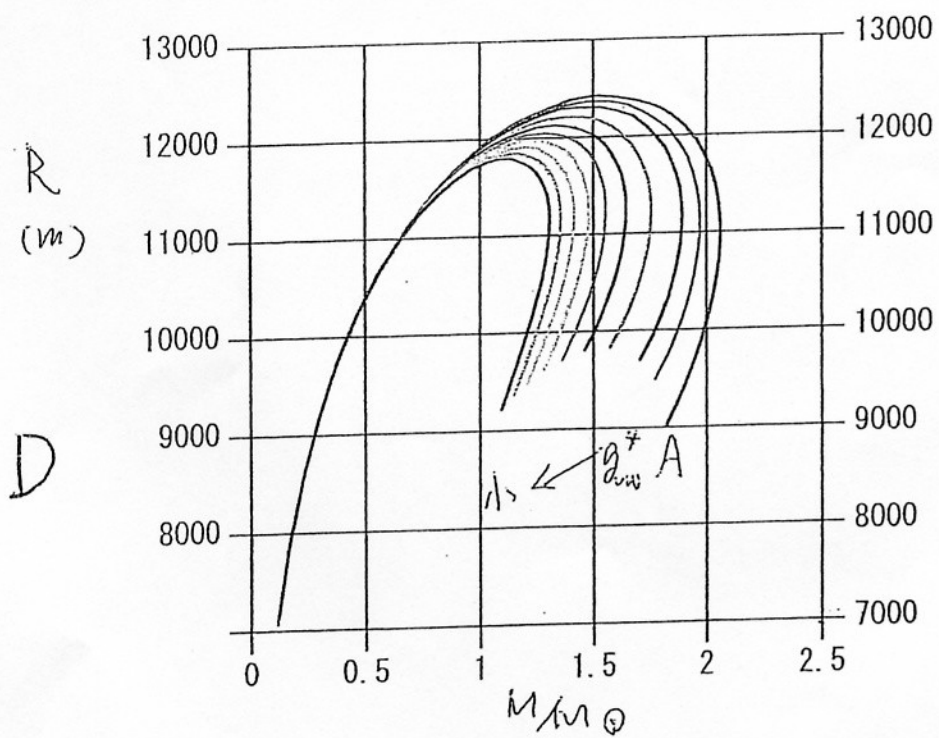
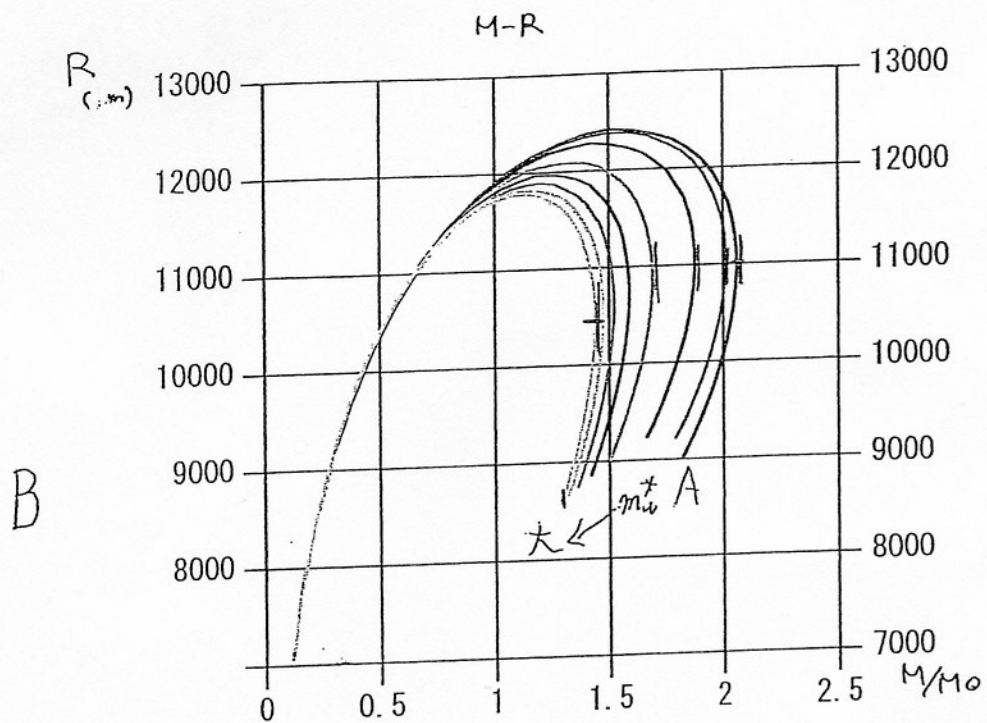


図 5.14: setA と setG～setL の中性子星の質量  $M/M_\odot$  と半径の関係図。横軸は中性子星質量、縦軸は中性子星半径。それぞれの質量に各々の半径





中間子の自己エネルギーの式で最初の2項に外線運動量を入れるように修正すると、通常のRPAの式になる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \epsilon(\rho_B, \rho_3, \sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2} = \\
& -ig_{s\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_p^F(k+p)G_p^D(k) + G_p^D(k+p)G_p^F(k) + G_p^D(k+p)G_p^D(k) \\
& -ig_{s\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_n^F(k+p)G_n^D(k) + G_n^D(k+p)G_n^F(k) + G_n^D(k+p)G_n^D(k) \\
& +ig_{s\sigma\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[G_p^D(k) + G_n^D(k)] \\
& -ig_{v\sigma\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^0 \{G_p^D(k) + G_n^D(k)\}] \\
& -ig_{r\sigma\sigma}^* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\gamma^0 \{G_p^D(k) - G_n^D(k)\}] + \frac{\partial^2 U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2} \\
& \equiv g_{s\sigma}^* \Pi - g_{s\sigma\sigma}^* \rho_s + g_{v\sigma\sigma}^* \rho_B + g_{r\sigma\sigma}^* \rho_3 + \frac{\partial^2 U_M(\sigma, \omega, \rho)}{\partial \sigma^2}
\end{aligned}$$

しかし、有効ラグランジアン立場では、最初から、上記以外の運動量依存性のある項がついている可能性がある

K. Sakamoto et al., Int. J. Mod. Phys. E9(2000)169,

to Sakamoto et al., nucl-th/0008059

QCD sum ruleの結果からそれらの内重要な項を決めた  
 $\Rightarrow$  off-shellの質量が増加しても、on-shellの質量が減少する場合もある。

## 6 まとめ

\*一般的な相対論的平均場近似のモデルで状態方程式を半解析的に分析した。

\*圧力のバリオン密度における微分においては、標準密度では、核子パート  $K_1$  が主要であるが、高密度では、中間子パート  $K_2$  が重要な役割を果たす。

\* $\omega$  中間子の有効質量を大きくせずに状態方程式を高密度で軟らかくする事は難しい。

しかし、上記の有効質量は on-shell 質量ではないので、on-shell 質量との関係が重要である。

====>一般化された RPA 計算