進行波

ある場所の乱れ（変化）が別の場所に伝わっていく現象．場所間に相互作用が必要．

1　波の種類

横波　水の波，ばねの横波，地震のＳ波，．．．
縦波　音波，ばねの縦波

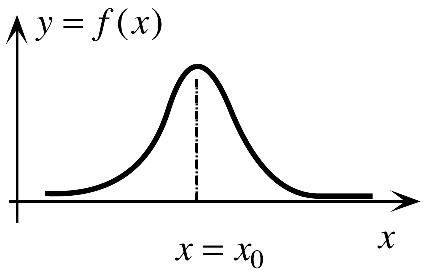
2　１次元の進行波

理想的な状況として，摩擦，抵抗などによるエネルギーの損失がないものとする
波は，形と大きさを変えずにそのまま伝わっていく（経験則）

平行移動の数学的な表現の仕方

$y=f(x)$　と　$y=f(x-a)$　の関係を思い起こせ

速さvで右（$+x$）方向に進む波の変位を表す式



$t=0$のとき　$y(t=0,x)=f(x)$

t　のとき

$$\boxed{y(t,x)=f(x-vt) \qquad (1)}$$

問１　(1) 式が進行波を表していることを説明せよ．
問２　図の山の位置が$x=x_0$であるとする．$x-vt=x_0$を微分することによって波の速さがvで与えられることを説明せよ．

３　波動方程式（１次元の場合）

条件１　変位は時間tと場所xの２変数関数（問題を難しくしている！）
条件２　弦がまっすぐだったら波は生じない，曲がっていることが本質
　　　　－＞　数学的には場所に関する２階微分$\partial^2/\partial x^2$を含む
条件３　運動方程式なので，時間に関する２階微分$\partial^2/\partial t^2$を含む

時間と空間に関する２階の偏微分方程式

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \qquad (2)}$$

進んだ問題：(2) 式で$v=c$（光速度）とおくと，ローレンツ変換に対して不変に保たれることを示せ（ローレンツが彼の変換則を見いだした方法）．

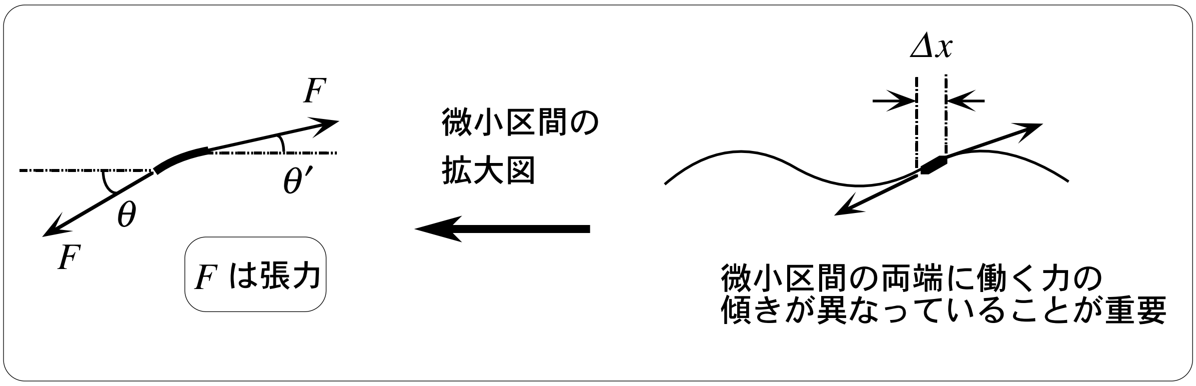
問３　(2) 式の１項と２項が同じ次元を持つことを示せ.

問４　変位 $y(t,x) = f(x - vt)$ が波動方程式 (2) を満たすことを示せ.

ヒント：合成関数の微分則を使い，第１項と２項を計算し，
それらが同じになることを示す

注意： $y(t,x) = f(x - vt)$ は２変数関数が１変数関数 $f(z)$ によって書かれること
を意味している.

波動方程式の導出



微小区間の左側に働く力

$-x$ 方向に　$-F\cos\theta \sim -F$　　　$-y$ 方向に　$-F\sin\theta \sim -F\tan\theta$

微小区間の右側に働く力

$+x$ 方向に　$+F\cos\theta' \sim +F$　　　$+y$ 方向に　$+F\sin\theta' \sim +F\tan\theta'$

合計すると

x 方向　　ゼロ　　y 方向　$F\tan\theta' - F\tan\theta = F\left(\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right)$

$$\sim F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

この y 方向の力が波の上下振動を引き起こす. この力が，微小区間に働くとして運動方程式 $F = ma$ を書くと（ρ は弦の単位長さあたりの質量＝線密度）

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = (\Delta x\rho)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

を得る. ここで，$v = \sqrt{F/\rho}$ とおけば，波動方程式 (2) を見いだす．こうして，２年生の教科書にすでに出ていた，弦を伝わる波の速さの公式を証明することができた！

問５　波動方程式の線形性（重ね合わせの原理）

二つの関数 $y = f_1(t,x)$ と $y = f_2(t,x)$ のおのおのが波動方程式を満たすとき，それらの線形結合 $y = af_1(t,x) + bf_2(t,x)$ もまた，波動方程式を満足することを示せ.

調和波

$f(z) = \sin z$，$\cos z$，$e^{\pm iz}$　の場合を特に調和波という

問６
（１）図形としては $\sin z$ と $\cos z$ は全く同じ形をしていることを説明せよ．両者の違いは何か？
（２）$e^{\pm iz}$を $\sin z$ と $\cos z$ とを用いて書き表せ（オイラーの公式）．

調和波の具体的な関数形

１　$f(z) = \sin z$ に $z = x - vt$ を代入する：

$$y(t,x) = f(x - vt) \sim A\sin(x - vt)$$

２　サイン関数の引数は次元を持ってはいけないので（なぜか？），長さの次元を持った量で割らなければならない．この際 2π をあらかじめくくりだしておく：

$$y(t,x) \quad \rightarrow \quad A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{v}{\lambda}t\right)\right]$$

３　v/λ は時間の逆数の次元をもつので $1/T$ とかきかえると，

$$\boxed{y(t,x) \quad = \quad A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \qquad (3)}$$

この式は２年生の教科書にも出ている正弦波として，よく知られているものである．

問７　(3) 式に現れる定数 A，λ，T の意味を説明せよ．
問８　t を固定したときの x の関数として，および，x を固定したときの t の関数として，変位 $y(t,x)$ のグラフを書け．

新たな物理量の導入

任意の初期位相 α を含めて，調和波の式を変形する：

$$\begin{aligned} y(t,x) &= A\sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \alpha\right] \\ &= A\sin(2\pi ft - 2\pi k'x + \alpha) \\ &= A\sin(\omega t - kx + \alpha) \end{aligned}$$

$$\boxed{y(t,x) = A\sin(\omega t - kx + \alpha) \qquad (4)}$$

ここに　　f：周波数　　ω：角周波数（あるいは単に周波数）
　　　　　k'：波数　　　k：角波数　（あるいは単に波数）

実際の波動の計算では ω, k および (4) 式がしばしば用いられる．

進行波の重ね合わせと定常波

x のプラス、およびマイナスの方向に進む波を重ね合わせてみよう：

$$
\begin{aligned}
y(t,x) &= \sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx + 2\alpha) \\
&= 2\sin\frac{\omega t - kx + \omega t + kx + 2\alpha}{2}\cos\frac{\omega t - kx - (\omega t + kx) - 2\alpha}{2} \\
&= 2\sin\omega t\,\cos(kx + \alpha)
\end{aligned}
$$

ここでは、２つの波の相対位相を α として、２番目の波にそれを取り込んだ。同じ振幅で逆方向に進む波を重ね合わせると、進まず、その場で振動するだけの波を作ることができる。このような波を定常波といい、弦をはじくとこのような波ができて音を奏でることができる。定常波の振幅は $\cos kx$ で決まり、もっとも大きなところを腹、小さなところ（ゼロ）を節という。

弦の長さを L とする。そして「弦の両端の振動の様子を決める」と、形成される定常波の波長および振動数を「かなり決める」ことができる。「弦の両端の振動の様子を決める」というのは、数学的には境界条件と呼ばれる。最も簡単な境界条件の一つは、両端を固定し、全く振動しないようにすることである。この様な端を固定端という。もう一つの例は、最も大きく振動するようにすることで、この様な端を自由端という。

固定端の例

固定端の座標を 0, L とする。「かなり決まってしまう」振動数は次のようにして求めることができる。$x = 0, L$ で振幅がゼロなのだから、

$$
\begin{aligned}
\sin\omega t\,\cos(\alpha) &= 0 \\
\sin\omega t\,\cos(kL + \alpha) &= 0
\end{aligned}
$$

が境界条件である。はじめの式から $\alpha = \pi/2$、そして２番目の式から $kL + \alpha = \pi/2 + n\pi$ が得られる。（なぜ、はじめの条件で $n\pi$ の不定性を考慮しなかったか？）したがって、

$$
k_n = +n\frac{\pi}{L}
$$

右辺の n を区別するために、左辺では n を k の添え字につけた。このように、許される端数がとびとび（離散的）の値になる。これを「量子化」とよぶ。つまり、弦の長さが有限であるために、そこに形成される定常波の波数が量子化される。同時に、振動数も量子化される。弦の音の場合には、長さが決まれば、それに応じた「量子」を単位として音の高さが量子化されること表している。この事実が、原子の場合には、大きさが決まれば、それに応じて電子波の振動数（エネルギー）が量子化されることになる。