

0 数学・力学の基礎の復習

0.1 ベクトル

- 3次元空間の位置、力などの物理量はベクトルで表される
- **ベクトル**： x, y, z のように3つの成分を持つ量

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (1)$$

行列を扱わない場合は縦書きでも横書きでも良い

x, y, z 成分を $1, 2, 3$ と表記する場合もある ($x = r_1, y = r_2, z = r_3$)

- ゼロベクトル：すべての成分が0のベクトル

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

- **スカラー**：1成分のみの数（ベクトルの一つの成分 (x, F_x など）はスカラー）

$$m, \quad x, \quad \dots \quad (3)$$

- ベクトルとスカラーは足し引きできない → 等式の両辺で**ベクトル/スカラーは常に一致**

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \underbrace{\mathbf{0}}_{\text{ゼロベクトル}} \quad (4)$$

簡略的に $\mathbf{F} = 0$ のように表記することもあるがこの授業では必ず $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ とする

- **内積**（スカラー積、結果がスカラー）

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (5)$$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と表記することもある

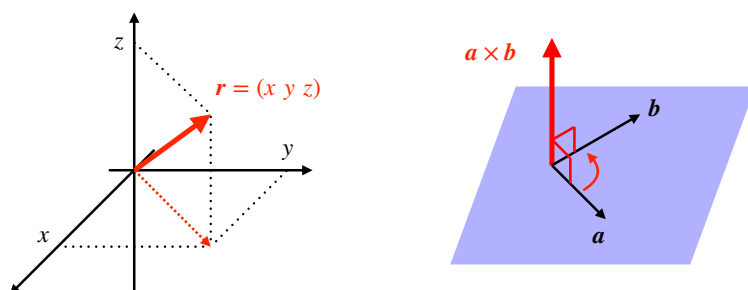


図 1: 左：位置ベクトル $\mathbf{r}$ 。右：ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の外積。

- **外積** (ベクトル積、結果がベクトル)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\underbrace{a_y b_z - a_z b_y}_{x \text{ 成分}} \underbrace{a_z b_x - a_x b_z}_{y \text{ 成分}} \underbrace{a_x b_y - a_y b_x}_{z \text{ 成分}} \right) \quad (6)$$

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ のベクトルは $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 両方と直交し、向きは $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に右ねじが進む方向 (図 1)

- ベクトルの 2 乗：内積の意味での自分との掛け算

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (7)$$

- ベクトルの大きさ (長さ、ノルム)

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (8)$$

- 内積、外積の大きさ (θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の間の角度)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \theta \quad (9)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta \quad (10)$$

– $\theta = \pi/2 = 90^\circ$ (直角) のとき ($\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は直交する、という)、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab$

– $\theta = 0 = 0^\circ$ (同じ向き) のとき、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab$, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = 0$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$

⇒ 同じベクトルの外積はゼロベクトル： $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$

- 内積、外積と足し算：

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (11)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (12)$$

0.2 数学記号

- **微分**：関数 $f(x)$ の変化量

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (13)$$

別の書き方

$$\frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{d}{dx} [f(x)], \quad df(x)/dx, \quad \dots \quad (14)$$

ただし分子の d は常に微分する関数 (今の場合 f) より左に書く

参考) 積分の dx を被積分関数より前に書いても良い

$$\int f(x) dx = \int dx f(x) \quad (15)$$

- ベクトルの微分：各成分の微分

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt} \right) \quad (16)$$

- 和記号

$$\sum_{i=1}^3 C_i = C_1 + C_2 + C_3, \quad \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \quad (17)$$

和の上限、下限が明らかなとき、あるいは特に指定が必要ないときは、省略することもある
ベクトルの添字（ $\mathbf{r}_i$ の i ）を成分と混同しないこと

- 添字のついていない因子は和の外に出せる

$$\sum_{i=1}^2 M\mathbf{r}_i = M\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2 = M(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = M \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i \quad (18)$$

- 和記号と微分：微分と和は交換する

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^2 \mathbf{r}_i = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \quad (19)$$

0.3 物理量の次元

- 物理量は全て次元を持っている
- 基本的な次元
 - 長さ L ：空間をはかる基準
 - 質量 M ：重さをはかる基準
 - 時間 T ：時間をはかる基準
- 複合的な次元：基本的な次元の組み合わせ、 LMT のべき乗で表現
例) 速度（ベクトル量の次元は成分の次元）

$$\text{速度の次元} = \frac{\text{距離の次元}}{\text{時間の次元}} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

- 次元が異なる量は足し引きできない → 等式の両辺で次元は常に一致
例) 質量は M 、加速度は LT^{-2} なので、運動方程式より

$$\text{力の次元} = \text{質量の次元} \times \text{加速度の次元} = M \times LT^{-2} = LMT^{-2}$$

- $L^0 M^0 T^0$ の量：無次元量

0.4 運動方程式

- 時間微分は dot で表す

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (20)$$

- **ニュートンの運動方程式**：位置 $\mathbf{r}$ にある質量 m の質点が、力 $\mathbf{F}$ を受けている場合

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (21)$$

3 成分あり、各成分は 1 成分の運動方程式 $m\ddot{x} = F_x$

- 速度 $\mathbf{v}$ ：位置の時間変化、次元 LT^{-1}

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \Rightarrow \quad m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \quad (22)$$

力がはたらかないとき ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$)、質点は速度を変えない ($\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$)：慣性の法則

- 加速度 $\mathbf{a}$ ：速度の時間変化、次元 LT^{-2}

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}, \quad \Rightarrow \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (23)$$

$\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ で質点に力がはたらくとき、 $\mathbf{F}$ の向きに加速度 $\mathbf{a}$ が生じる：運動の法則

- 運動量 $\mathbf{p}$ ：次元 LMT^{-1}

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} \quad (24)$$

力がはたらかないとき ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$)、運動量が保存（時間に依存しない）

- 運動エネルギー K ：次元 L^2MT^{-2}

$$K = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (25)$$

- 角運動量 $\mathbf{L}$ ：回転に対する「運動量」、次元 L^2MT^{-1}

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (26)$$

- 力のモーメント $\mathbf{N}$ ：回転に対する「力」次元 L^2MT^{-2}

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (27)$$

角運動量、力のモーメントは座標原点 ($\mathbf{r}$ の始点) に依存する

(** のまわりの角運動量、** を基準とした力のモーメント、など)

- 回転の運動方程式

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{N} \quad (28)$$

力がはたらかないとき ($\mathbf{F} = \mathbf{0}$ つまり $\mathbf{N} = \mathbf{0}$)、角運動量が保存（時間に依存しない）