1　質点系の力学

1.1　質点系

- **質点系**：複数の質点からならる物理系、質点 i の位置 $\boldsymbol{r}_i$、質量 m_i
  例）2 質点系：質点 1（$\boldsymbol{r}_1, m_1$）と質点 2（$\boldsymbol{r}_2, m_2$）

- **自由度**：系の状態を指定するために必要な変数の数

質点の数	空間次元	自由度
1	1	1（変数 x）
1	3	3（変数 x, y, z）
2	3	6（変数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$）
N	3	$3N$（変数 $x_i, y_i, z_i,\ i = 1, ..., N$）

- 外力と内力（図 2 左）
  - **外力** $\boldsymbol{F}_i$：i 番目の質点に（系外から）はたらく力
  - **内力** $\boldsymbol{F}_{ji}$：i 番目の質点に j 番目の質点（系内）からはたらく力
  - 例）太陽の重力中の地球（質点 1）と月（質点 2）
    $\boldsymbol{F}_1$：太陽 $\to$ 地球の重力、$\boldsymbol{F}_{21}$：月 $\to$ 地球の重力
    外力か内力かは系の範囲によって決まる
    地球（質点 1）、月（質点 2）、太陽（質点 3）の場合、太陽 $\to$ 地球は内力 $\boldsymbol{F}_{31}$

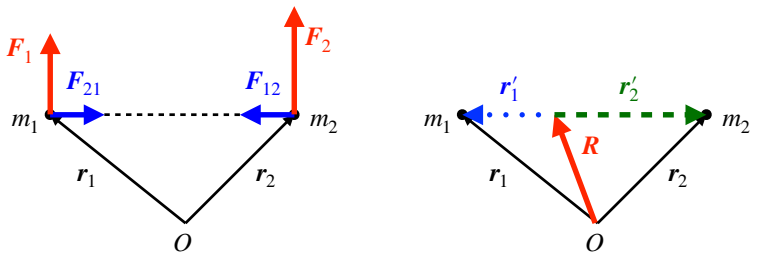

図 2:（左）2 質点系にはたらく力の例。（右）2 質点系の重心座標 $\boldsymbol{R}$ と重心系での座標 $\boldsymbol{r}'_1$、$\boldsymbol{r}'_2$。

- 各質点の運動方程式

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \boldsymbol{F}_1 \quad + \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31} + \cdots + \boldsymbol{F}_{N1} \tag{29}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{12} \quad + \boldsymbol{F}_{32} + \cdots + \boldsymbol{F}_{N2} \tag{30}$$

$$\vdots$$

$$m_N\ddot{\boldsymbol{r}}_N = \boldsymbol{F}_N + \boldsymbol{F}_{1N} + \boldsymbol{F}_{2N} + \boldsymbol{F}_{3N} + \cdots + \boldsymbol{F}_{N-1,N} \tag{31}$$

1 行あたり 3 本の式が N 行あるので合計 $3N$ 本（自由度の数）の運動方程式

- 作用反作用の法則（運動の第 3 法則）：質点対 i, j の内力の和はゼロ

$$\boldsymbol{F}_{ij} = -\boldsymbol{F}_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = \boldsymbol{0} \tag{32}$$

1.2 重心座標

- **重心座標** $\boldsymbol{R}$ と**全質量** M

$$\boldsymbol{R} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i, \quad M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{33}$$

2 質点系のとき（図 2 右）

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{34}$$

2 つの質点の位置の間の線分を $m_2 : m_1$ の比で分割した点の座標（図 2 右）
座標原点を $\boldsymbol{R}$ にとることを**重心系**と呼ぶ

- 重心速度（以下 i の和の範囲は 1 から N、重心速度は速度の和ではない）

$$\boldsymbol{V} \equiv \dot{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{M}\sum_{i} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \frac{1}{M}\sum_{i} m_i \boldsymbol{v}_i \tag{35}$$

- 重心系での座標 $\boldsymbol{r}'_i$

$$\boldsymbol{r}'_i \equiv \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R} \tag{36}$$

座標ベクトルの数は N だが条件が一つあるので独立なベクトルは $N - 1$
2 質点系のとき（図 2 右）

- 重心系での速度（各質点の速度から重心速度を引いたもの）

$$\boldsymbol{v}'_i \equiv \dot{\boldsymbol{r}}'_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V} \tag{37}$$

1.3 重心座標の運動方程式

- 式 (35) より

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \sum_{i} m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i \tag{38}$$

この右辺は式 (29) から (31) を全て足したものとなっている。i 番目の成分は

$$m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \underbrace{\boldsymbol{F}_{1i} + \cdots + \boldsymbol{F}_{i-1,i} + \boldsymbol{F}_{i+1,i} + \cdots + \boldsymbol{F}_{Ni}}_{\boldsymbol{F}_{ii}\text{のみ含まない}} = \boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \tag{39}$$

となるので、運動方程式より（補足参照）

$$\begin{aligned} M\ddot{\boldsymbol{R}} &= \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \\ &= \sum_i \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ij}) \\ &= \sum_i \boldsymbol{F}_i \quad \leftarrow \text{作用反作用の法則 (32)} \\ &\equiv \boldsymbol{F}_{\text{外}} \end{aligned} \tag{40}$$

右辺は外力の和、つまり系全体にかかる力なのでこれを全外力 $\boldsymbol{F}_{\text{外}}$ とする
重心座標 $\boldsymbol{R}$ の運動は**質量 M の質点に全外力 $\boldsymbol{F}_{\text{外}}$ がかかった運動**と同じ

1.4 全運動エネルギー、全運動量

- 系全体の運動エネルギー（全運動エネルギー）：各質点の運動エネルギーの和

$$K \equiv \sum_i K_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2 \tag{41}$$

式 (37) を用いて重心速度と重心系での速度で表すと（演習問題）

$$K = \underbrace{\frac{1}{2} M \boldsymbol{V}^2}_{\text{重心の運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{v}_i')^2}_{\text{相対運動のエネルギー}} \tag{42}$$

- 系全体の運動量（全運動量）：重心速度 (35) より

$$\boldsymbol{P} \equiv M\dot{\boldsymbol{R}} = \sum_i m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_i \boldsymbol{p}_i \tag{43}$$

重心運動量は各質点の運動量 $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$ の和

- 運動方程式 (40) より

$$\dot{\boldsymbol{P}} = M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}_{\text{外}} \tag{44}$$

全運動量の時間変化 ← 全外力
外力が全て 0 の場合、全運動量は時間変化しない：**全運動量保存** ← 並進対称性の起結

1.5 全角運動量

- 全角運動量 $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{L} \equiv \sum_i \boldsymbol{L}_i \tag{45}$$

各質点の角運動量の時間変化は力のモーメントで与えられるので

$$\dot{\boldsymbol{L}}_i = \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_i \times \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \tag{46}$$

- 全角運動量の時間変化（補足参照、作用反作用の法則 (32) を使う）

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{L}} &= \sum_i \dot{\boldsymbol{L}}_i \\ &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) \\ &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i + \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ji} \end{aligned} \tag{47}$$

- **内力が中心力**の場合
  力 $\boldsymbol{F}_{ji}$ は質点 j と i の位置座標を結ぶ方向、つまり C を定数として $\boldsymbol{F}_{ji} = C(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$
  同じ方向を向くベクトルの外積は消えるので

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{N}_i \tag{48}$$

  全角運動量の時間変化 ← 外力のモーメント $\boldsymbol{N}_i$ の和
  以下では全て式 (48) が成立する場合について考える
  外力が全て 0 で、内力が中心力の場合、全角運動量は保存 ← 回転対称性の帰結

- 重心系での座標による表現（補足参照）

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) \times (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'_i) \\ &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} \sum_i m_i + \boldsymbol{R} \times \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i + \sum_i \{m_i \boldsymbol{r}'_i\} \times \boldsymbol{V} + \sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}'_i \\ &= M\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{V} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i \\ &= \underbrace{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}}_{\text{重心の角運動量}} + \underbrace{\boldsymbol{L}'}_{\text{重心まわりの角運動量}}, \quad \boldsymbol{L}' = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i \end{aligned} \tag{49}$$

  式 (48) で原点を重心にとれば、$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ で $\boldsymbol{r}'_i = \boldsymbol{r}_i$ なので

$$\dot{\boldsymbol{L}}' = \dot{\boldsymbol{L}} = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{N}'_i \tag{50}$$

  重心まわりの全角運動量の時間変化 ← 重心まわりの外力のモーメント $\boldsymbol{N}'_i$ の和