

10 多自由度の振動

10.1 N 自由度の振動

- 1次元の運動（図 23）：ばね $N + 1$ 個（ばね定数 k ）、質点 N 個（質量 m ）
- つり合いの位置からの質点 j の変位を u_j ($j = 1, 2, \dots, N$)、右向きが正
- 質点 1 への力：ばね 1 から $-ku_1$ 、ばね 2 から $k(u_2 - u_1)$
- 質点 j ($j = 2, 3, \dots, N - 1$) への力：ばね j から $-k(u_j - u_{j-1})$ 、ばね $j + 1$ から $k(u_{j+1} - u_j)$
- 質点 N への力：ばね N から $-k(u_N - u_{N-1})$ 、ばね $N + 1$ から $-ku_N$

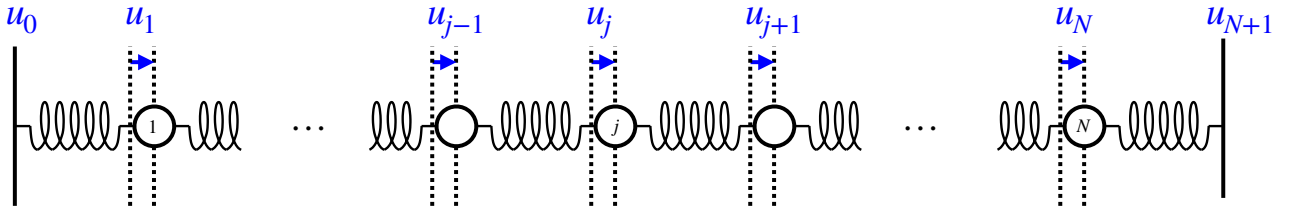


図 23: N 自由度の振動。

- 運動方程式 ($j = 2, 3, \dots, N - 1$)

$$m\ddot{u}_1 = -ku_1 + k(u_2 - u_1) = k(u_2 - 2u_1) \quad (254)$$

$$m\ddot{u}_j = -k(u_j - u_{j-1}) + k(u_{j+1} - u_j) = k(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) \quad (255)$$

$$m\ddot{u}_N = -ku_N - k(u_N - u_{N-1}) = k(u_{N-1} - 2u_N) \quad (256)$$

- 端の変位を u_0, u_{N+1} と定義（補足参照）

$$m\ddot{u}_j = k(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (257)$$

固定端：端が壁で動かない場合、上の運動方程式、任意の時刻 t で**境界条件**

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0 \quad (258)$$

自由端：端が固定されていない場合、 $\ddot{u}_1$ と $\ddot{u}_N$ が変化し（補足参照）

$$u_0(t) = u_1(t), \quad u_{N+1}(t) = u_N(t) \quad (259)$$

- 基準振動：

$$u_j(t) = C_j \cos(\omega t + \phi) \quad (260)$$

- 初期条件：初期変位 $u_i(t = 0)$ 、初速度 $\dot{u}_i(t = 0)$ で指定（ N 自由度なので $2N$ 個）

10.2 連続極限と波動方程式

- ばねの長さが無限に小さい場合、質点は連続的に分布 → 波動の媒質とみなせる
連続極限：質点間の距離 $a \rightarrow 0$ の極限を考える
 このとき質点の数 $N \rightarrow \infty$ として連続体の長さ $L = a(N + 1)$ を一定に保つ

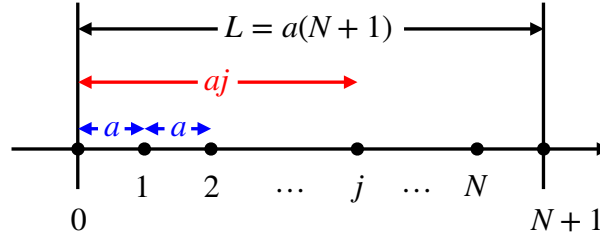


図 24: N 自由度系の質点の左端からの距離。

- 左端から j 番目の質点までの距離 → 左端から測った媒質の位置座標 x

$$aj \quad (0 \leq j \leq N + 1) \quad \rightarrow \quad x \quad (0 \leq x \leq L) \quad (261)$$

- 変位の表記： j 番目の質点の変位 → 位置 x の媒質の変位

$$u_j(t) \quad \rightarrow \quad u(x, t) \quad (262)$$

- 式 (257) 左辺：変位 $u(x, t)$ は位置 x と時間 t の関数なので、 t に関する **偏微分** (補足参照)

$$\ddot{u}_j(t) = \frac{d^2 u_j(t)}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (263)$$

- 式 (257) 右辺： $aj = x$ のとき $a(j + 1) = x + a$ 、 $a(j - 1) = x - a$ (補足参照)

$$\frac{u_{j+1}(t) + u_{j-1}(t) - 2u_j(t)}{a^2} = \frac{u(x + a, t) + u(x - a, t) - 2u(x, t)}{a^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (264)$$

- N 自由度の運動方程式 → **波動方程式** (1 次元)

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} = \frac{ka^2}{m} \frac{u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j}{a^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (265)$$

線形偏微分方程式、重ね合わせの原理が成立

- (位相) 速度 v ：ばね定数と質量の極限 (次元は LT^{-1})

$$\frac{ka^2}{m} \quad \rightarrow \quad v^2 \quad (266)$$

- 固定端**境界条件：端で変位がゼロ

$$u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (267)$$

自由端境界条件：端で変位の変化 (x 微分) がゼロ

$$u_0(t) = u_1(t), \quad u_{N+1}(t) = u_N(t) \quad \rightarrow \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (268)$$

10.3 一般解

- **基準振動**：式 (260) の連続極限（変数分離での解き方は補足参照）

$$u(x, t) = C(x) \cos(\omega t + \phi) \quad (0 \leq x \leq L) \quad (269)$$

- 波動方程式に代入（引数が x のみになったら偏微分を常微分で置き換えて良い）

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 [C(x) \cos(\omega t + \phi)]}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 [C(x) \cos(\omega t + \phi)]}{\partial x^2} \\ C(x) [-\omega^2 \cos(\omega t + \phi)] &= v^2 \cos(\omega t + \phi) \frac{d^2 C(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2 C(x)}{dx^2} &= -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 C(x) \end{aligned} \quad (270)$$

- 振幅 $C(x)$ の解（ A, B は実数の積分定数）：

$$C(x) = A \sin(px) + B \cos(px), \quad p = \frac{\omega}{v} \quad (271)$$

振動数 ω は p で決まるので **p に対する条件**を調べる

- **固定端**の場合：任意の時刻で式 (267) なので

$$C(0) = C(L) = 0 \quad (272)$$

$C(0) = 0$ より $B = 0$ となり

$$C(L) = A \sin(pL) = 0 \quad \Rightarrow \quad pL = n\pi \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n\pi}{L} \quad (n: \text{整数}) \quad (273)$$

$n = 0$ は振幅が常に 0 で振動しない自明な解、 $n < 0$ は $n > 0$ で表現できるので

$$p^{(n)} = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{固定端}) \quad (274)$$

n に上限がない：無限個の**波数** $p^{(n)}$ とそれに対応する $\omega^{(n)} = p^{(n)}v$ を持つ基準振動

- **自由端**の場合：任意の時刻で式 (268) なので

$$\left. \frac{dC(x)}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dC(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad (275)$$

$x = 0$ の条件より $A = 0$ であり、 n を整数として

$$\left. \frac{dC(x)}{dx} \right|_{x=L} = \left. \frac{dB \cos(px)}{dx} \right|_{x=L} = -pB \sin(pL) = 0 \quad (276)$$

固定端と同じ条件だが $n = 0$ は $C(x) = B$ で非自明な解なので

$$p^{(n)} = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{自由端}) \quad (277)$$

- 角振動数 $\omega^{(n)}$ と波長 $\lambda^{(n)}$: $u(x, t) = u(x + \lambda^{(n)}, t)$ より

$$\omega^{(n)} = p^{(n)}v = \frac{n\pi}{L}v, \quad \lambda^{(n)} = \frac{2\pi}{p^{(n)}} = \frac{2L}{n} \quad (278)$$

- 基準振動 ($0 \leq x \leq L$) : 波動方程式 (265) の解

$$u^{(n)}(x, t) = \begin{cases} A^{(n)} \sin(p^{(n)}x) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) & n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{固定端}) \\ B^{(n)} \cos(p^{(n)}x) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) & n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{自由端}) \end{cases} \quad (279)$$

- 一般解 : 基準振動の重ね合わせ

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin(p^{(n)}x) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) & (\text{固定端}) \\ \sum_{n=0}^{\infty} B^{(n)} \cos(p^{(n)}x) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) & (\text{自由端}) \end{cases} \quad (280)$$

積分定数は $\{A^{(n)}, \phi^{(n)}\}$ または $\{B^{(n)}, \phi^{(n)}\}$ で合計無限個

10.4 有限の N の振動

- 基準振動 (260) を運動方程式に代入 (補足参照)

$$-\omega^2 C_j = \frac{k}{m}(C_{j+1} + C_{j-1} - 2C_j) \quad (281)$$

C_j は連続極限の $C(x)$ で $x = aj$ として得られる。固定端の場合、

$$C_j^{(n)} = A \sin\left(\frac{nj\pi}{N+1}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (282)$$

n の最大値は N (補足参照)

- 角振動数

$$\omega^{(n)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{p^{(n)}a}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \quad (283)$$

角振動数 $\omega^{(n)}$ と波数 $p^{(n)}$ の関係 : 分散関係

連続極限 ($a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$) で $p^{(n)}a \ll 1$ であり、 $\sin x = x + \mathcal{O}(x^3)$ より式 (278) を再現

$$\omega^{(n)} \sim 2\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{p^{(n)}a}{2} \rightarrow vp^{(n)} \quad (\text{連続極限}) \quad (284)$$

- 一般解 : 基準振動の重ね合わせ

$$u_j(t) = \sum_{n=1}^N C^{(n)} \sin\left(\frac{nj\pi}{N+1}\right) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) \quad (285)$$

積分定数は $\{C^{(n)}, \phi^{(n)}\}$ で合計 $2N$ 個