第10回補足

N 自由度の振動の境界条件

N 自由度の運動方程式の一般形 (257) は、$j = 1$ と $j = N$ の場合

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 + u_0 - 2u_1) \tag{A.273}$$

$$m\ddot{u}_N = k(u_{N+1} + u_{N-1} - 2u_N) \tag{A.274}$$

となる。これらの方程式は u_0 と u_{N+1} を含むが、質点の変位は 1 から N までしか定義されていないので、u_0 と u_{N+1} を元の運動方程式を再現するように指定する。固定端の場合、端点は壁で動かないので、境界条件 (258)

$$u_0 = u_{N+1} = 0 \tag{A.275}$$

であり、代入すると

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - 2u_1) \tag{A.276}$$

$$m\ddot{u}_N = k(u_{N-1} - 2u_N) \tag{A.277}$$

と元の運動方程式 (254), (256) を再現する。

自由端の場合、質点 1 の変位 u_1 に連動して端点 u_0 が変化し、u_N に連動して単点 u_{N+1} が変化する。よって境界条件は

$$u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N \tag{A.278}$$

と式 (259) になる。ばね 1 は質点 1 に力をおよぼさないため、質点 1 の運動方程式は、式 (254) でばね 1 からの力を消すことで得られる。同様にばね $N + 1$ は質点 N に力をおよぼさないため、質点 N の運動方程式は、式 (256) でばね $N + 1$ からの力を消すことで得られる。つまり

$$m\ddot{u}_1 = k(u_2 - u_1) \tag{A.279}$$

$$m\ddot{u}_N = -k(u_N - u_{N-1}) \tag{A.280}$$

これは式 (A.273), (A.274) に境界条件 (259) を代入した結果と一致する。

偏微分

2 変数関数 $f(x, y)$ は、変数 x と y の入力に対し関数の値 $f(x, y)$ を出力する関数である。(x, y) 平面で図示するなら、平面上の各点で値 $f(x, y)$ を z 方向に示す。例として $f(x, y) = \sin(x - 2y)$ のグラフを図 A.12 に示す。図から明らかなように、ある点 (x, y) での $f(x, y)$ の x 方向の傾きと y 方

向の傾きは一般に一致しない。

通常の 1 変数関数の微分である常微分は関数の傾き（引数の変化に対する変化率）であるのに対し、**偏微分**は多変数関数で**他の変数の値を固定した場合の傾き**を与える。定義は

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta,y)-f(x,y)}{\Delta}=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) \tag{A.281}$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x,y+\Delta)-f(x,y)}{\Delta}=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) \tag{A.282}$$

実際の使い方は、偏微分する変数以外は定数とみなして微分すれば良い（A, B, C は定数）：

$$\frac{\partial}{\partial x}(Ax^2y+Bx+C)=\underbrace{Ay}_{\text{定数}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+B=2Axy+B \tag{A.283}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Ax^2y+Bx+C)=\underbrace{Ax^2}_{\text{定数}}\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{(Bx+C)}_{\text{定数}}=Ax^2 \tag{A.284}$$

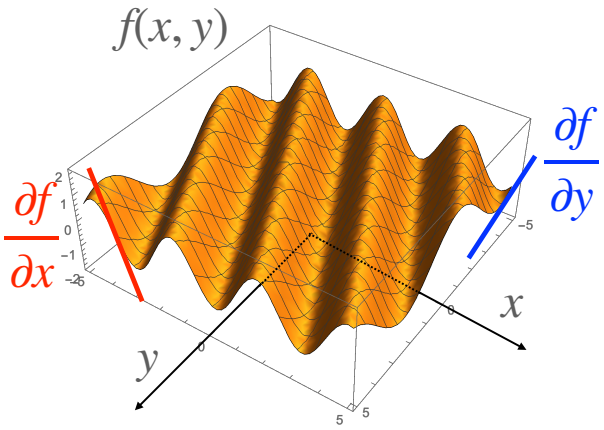

図 A.12: 2 変数関数 $f(x,y)=\sin(x-2y)$。

式 (264) の空間微分

$f(x\pm\Delta,y)$ を x, y のまわりで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} f(x\pm\Delta,y) &= f(x,y)\pm\Delta\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{2!}(\pm\Delta)^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\mathcal{O}(\Delta^3) \\ &= f(x,y)\pm\Delta\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{2}\Delta^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\mathcal{O}(\Delta^3) \end{aligned} \tag{A.285}$$

であるので

$$
\begin{aligned}
f(x+\Delta,y)+f(x-\Delta,y)-2f(x,y) &= f(x,y)+\Delta\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{2}\Delta^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \\
&\quad + f(x,y)-\Delta\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{1}{2}\Delta^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \\
&\quad - 2f(x,y)+\mathcal{O}(\Delta^3) \\
&= \Delta^2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\mathcal{O}(\Delta^3)
\end{aligned}
\tag{A.286}
$$

となるため

$$
\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta,y)+f(x-\Delta,y)-2f(x,y)}{\Delta^2}=\lim_{\Delta\to 0}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\mathcal{O}(\Delta)\right]=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}
\tag{A.287}
$$

である。

波動方程式の変数分離での解法

波動方程式 (265)：

$$
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}
\tag{A.288}
$$

の解を変数分離法で求める。解の形を

$$
u(x,t)=T(t)X(x)
\tag{A.289}
$$

と時間に依存する関数 $T(t)$ と座標に依存する関数 $X(x)$ の積の形になると仮定する。これを波動方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T(t)X(x)}{\partial t^2} &= v^2\frac{\partial^2 T(t)X(x)}{\partial x^2} \\
X(x)\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} &= v^2 T(t)\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}
\end{aligned}
\tag{A.290}
$$

両辺を $v^2T(t)X(x)\neq 0$ で割ると

$$
\frac{1}{v^2T(t)}\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}=\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}
\tag{A.291}
$$

とできる。この式の**左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数**である。つまり

$$
F(t)=G(x)
\tag{A.292}
$$

のような形になっている。x を変化させると右辺は変化するが左辺は変化しない。逆に t を変化させると左辺のみ変化する。両方の場合で等式が成立するためには、両辺の値は **t にも x にもよらない定数**でなければならない。この定数を $-p^2$ とおくと、左辺から

$$\frac{1}{v^2T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = -p^2$$
$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} = -p^2v^2T(t) \tag{A.293}$$

となる。変数が t のみになったので偏微分を常微分に置き換えた。これは単振動の微分方程式なので、一般解として

$$T(t) = T_0\cos(pvt+\phi) \tag{A.294}$$

を採用する（C, ϕ は積分定数）。次に式 (A.291) の右辺より

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -p^2$$
$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -p^2X(x) \tag{A.295}$$

であり、これもやはり単振動の方程式なので、一般解を

$$X(x) = a\sin(px) + b\cos(px) \tag{A.296}$$

と書ける（a, b は積分定数）。これらを合わせると

$$\begin{aligned} u(x,t) &= T(t)X(x) \\ &= T_0\cos(pvt+\phi)[a\sin(px)+b\cos(px)] \\ &= [T_0a\sin(px)+T_0b\cos(px)]\cos(pvt+\phi) \end{aligned} \tag{A.297}$$

であり、$\omega = pv$ であることに注意すると、$T_0a = A$, $T_0b = B$ ととることで、式 (271) を式 (269) に代入した基準振動の一般解が再現される。変数分離による偏微分方程式の解法は、量子力学の時間と空間座標の分離や、極座標での動径座標と角度座標の分離などでも使われる。

有限自由度の振動

基準振動 (260)

$$u_j = C_j\cos(\omega t+\phi) \quad (j = 0,1,2,\cdots,N,N+1) \tag{A.298}$$

の形を仮定すると

$$\frac{d^2u_j}{dt^2} = C_j\omega\frac{d}{dt}[-\sin(\omega t+\phi)] = -C_j\omega^2\cos(\omega t+\phi) \tag{A.299}$$

なので、運動方程式 (257) より

$$\begin{aligned} m\frac{d^2u_j}{dt^2} &= k(u_{j+1}+u_{j-1}-2u_j) \\ -mC_j\omega^2\cos(\omega t+\phi) &= k[C_{j+1}\cos(\omega t+\phi)+C_{j-1}\cos(\omega t+\phi)-2C_j\cos(\omega t+\phi)] \\ -\omega^2 C_j &= \frac{k}{m}(C_{j+1}+C_{j-1}-2C_j) \end{aligned} \tag{A.300}$$

と C_j に関する漸化式になる。

連続極限の $C(x)$ で $x=aj$ とすると、固定端の場合

$$C_j^{(n)} = A\sin\left(p^{(n)}aj\right) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}aj\right) = A\sin\left(\frac{nj\pi}{N+1}\right) \tag{A.301}$$

となる。ここで $L=a(N+1)$ の関係を用いた。このとき、

$$C_0^{(n)} = A\sin(0) = 0 \tag{A.302}$$

$$C_{N+1}^{(n)} = A\sin\left(\frac{n(N+1)\pi}{N+1}\right) = A\sin(n\pi) = 0 \tag{A.303}$$

であるので、n が整数であれば式 (260) より基準振動は確かに境界条件 (258) を満たしている。

次に、独立な n の範囲について考える。

- $n=0$ の場合、全ての $C_j^{(n)}=0$（自明な解）なので考えない。
- m を整数として $n=m(N+1)$ の場合、j が整数なので

  $$C_j^{(n)} = A\sin\left(\frac{m(N+1)j\pi}{N+1}\right) = A\sin(mj\pi) = 0 \tag{A.304}$$

  となりやはり自明な解なので考えない。
- $\sin(-x)=-\sin x$ より、負の $n=-l<0$ の解は

  $$C_j^{(-l)} = A\sin\left(\frac{-lj\pi}{N+1}\right) = -A\sin\left(\frac{lj\pi}{N+1}\right) \tag{A.305}$$

  となるが、これは A の符号を変えた $C_j^{(l)}$（$l>0$）の解と同じである。つまり負の n の解は正の n の解で表されるため独立ではなく考えない。
- j が整数の場合、周期性より $\sin(2j\pi-x)=\sin(-x)=-\sin x$ が成り立つので、$(N+1)+n$

の解は

$$
\begin{aligned}
C_j^{(N+1+n)} &= A\sin\frac{[(N+1)+n]j\pi}{N+1} \\
&= A\sin\frac{[2(N+1)+n-(N+1)]j\pi}{N+1} \\
&= A\sin\left(2j\pi-\frac{[(N+1)-n]j\pi}{N+1}\right) \\
&= -A\sin\frac{[(N+1)-n]j\pi}{N+1}
\end{aligned}
\tag{A.306}
$$

となり（C の符号を変えることで）$(N+1)-n$ の解で表現できる

- よって n の値は $n=1,2,\cdots,N$ のみ考えれば良い（図 A.13 参照）$\Rightarrow$ **N 個の独立な基準振動**

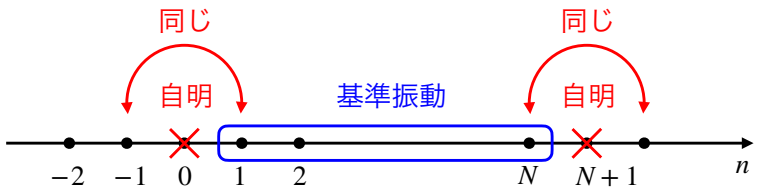

図 A.13: とりうる n の値の模式図。

n 番目の基準振動に対応する角振動数を $\omega^{(n)}$ とすると、式 (A.300) に代入して

$$
\begin{aligned}
-(\omega^{(n)})^2 A\sin\left(p^{(n)}aj\right) &= \frac{k}{m}\left[A\sin\left(p^{(n)}aj+p^{(n)}a\right)+A\sin\left(p^{(n)}aj-p^{(n)}a\right)-A\sin\left(p^{(n)}aj\right)\right] \\
(\omega^{(n)})^2\sin\left(p^{(n)}aj\right) &= -\frac{k}{m}\Big[\left(p^{(n)}aj\right)\cos\left(p^{(n)}a\right)+\cos\left(p^{(n)}aj\right)\sin\left(p^{(n)}a\right) \\
&\qquad +\left(p^{(n)}aj\right)\cos\left(p^{(n)}a\right)-\cos\left(p^{(n)}aj\right)\sin\left(p^{(n)}a\right)-2\sin\left(p^{(n)}aj\right)\Big] \\
(\omega^{(n)})^2\sin\left(p^{(n)}aj\right) &= -\frac{k}{m}\left[2\sin\left(p^{(n)}aj\right)\cos\left(p^{(n)}a\right)-2\sin\left(p^{(n)}aj\right)\right] \\
(\omega^{(n)})^2 &= 2\frac{k}{m}\left[1-\cos\left(p^{(n)}a\right)\right] \\
(\omega^{(n)})^2 &= 4\frac{k}{m}\sin^2\left(\frac{p^{(n)}a}{2}\right) \\
\omega^{(n)} &= 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{p^{(n)}a}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{na\pi}{2L}\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)
\end{aligned}
\tag{A.307}
$$

ここで $\omega^{(n)}>0$ となる解を選んだ。