

11 フーリエ級数展開

11.1 波動方程式の一般解と初期条件

- 1次元の波動方程式と一般解

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (0 \leq x \leq L) \quad (286)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin(p^{(n)}x) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) & \text{(固定端)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} B^{(n)} \cos(p^{(n)}x) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) & \text{(自由端)} \end{cases}, \quad p^{(n)} = \frac{n\pi}{L} \quad (287)$$

- 時間に関する微分方程式：ある時刻から次の時刻への変化率（時間微分）を決める
→ **初期条件**（最初の位置、速度）を決めたら後の時間の位置、速度が原理的にわかる
- 初期条件として、 $t = 0$ で位置 x の変位が $f(x)$ という関数で、初速度が全て 0

$$u(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (288)$$

- 条件 (288) より、全ての $\phi^{(n)} = 0$ （補足参照、 $\cos$ の微分が 0）で

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin(p^{(n)}x) & \text{(固定端)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} B^{(n)} \cos(p^{(n)}x) & \text{(自由端)} \end{cases}, \quad p^{(n)} = \frac{n\pi}{L} \quad (0 \leq x \leq L), \quad (289)$$

与えられた $f(x)$ に対し、 $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ をどのように選べば良いか？

11.2 フーリエ級数展開

- **フーリエ級数展開**：関数 $f(x)$ を **三角関数の無限和** で表現

- 例： $L = \pi$ の場合 ($p^{(n)} = n$) の関数 $f(x) = x$ の級数展開

$$f(x) = x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(nx) = 2 \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \cdots \right] \quad (290)$$

項の数を増やすと $f(x) = x$ の直線に近づいていく（図 25）

$x = \pi$ 付近の振動は関数の不連続性に起因し項を増やしても消えない（ギブズ現象）

- 一般の関数 $f(x)$ を考えるため、区間を $-L \leq x \leq L$ とする
 $\sin$ は奇関数、 $\cos$ は偶関数で、一般の関数は偶関数と奇関数の和で書けるため、

$$f(x) = B^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)} \cos(p^{(n)}x) + \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin(p^{(n)}x) \quad (-L \leq x \leq L) \quad (291)$$

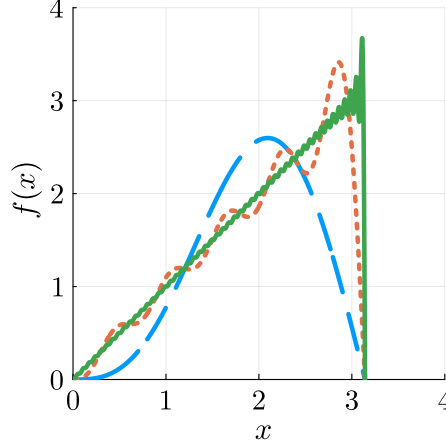


図 25: 区間 $0 \leq x \leq \pi$ での関数 $f(x) = x$ の $\sin(nx)$ によるフーリエ級数展開 (290)。破線：2 項での近似、点線：10 項での近似、実線：100 項での近似。

- 三角関数の**直交性** ($p^{(n)} = n\pi/L$ で n, m は 1 以上の整数)

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (292)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(p^{(m)}x) \cos(p^{(n)}x) dx = \delta_{nm} \quad (293)$$

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x) dx = 0 \quad (294)$$

- 式 (292) の説明 (詳細と他の式は補足参照)：三角関数の公式より

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(n)}x) \sin(p^{(m)}x) dx = \int_{-L}^L \frac{\cos[(p^{(n)} - p^{(m)})x] - \cos[(p^{(n)} + p^{(m)})x]}{2L} dx \quad (295)$$

- i) $n \neq m$ の場合： $p^{(n)} - p^{(m)} \neq 0$ なので

$$= \frac{\sin[(n - m)\pi] - \sin[-(n - m)\pi]}{2L(p^{(n)} - p^{(m)})} - \frac{\sin[(n + m)\pi] - \sin[-(n + m)\pi]}{2L(p^{(n)} + p^{(m)})} = 0 \quad (296)$$

- ii) $n = m$ の場合： $p^{(m)} = p^{(n)}$ なので

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(n)}x) \sin(p^{(n)}x) dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{\cos[0]}{2L} dx - \int_{-L}^L \frac{\cos[2p^{(n)}x]}{2L} dx = 1 - \frac{\sin[2n\pi] - \sin[-2n\pi]}{4Lp^{(n)}} = 1 \end{aligned} \quad (297)$$

- フーリエ級数展開 (291) の**係数** (n は 1 以上の整数)

$$A^{(n)} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(p^{(n)}x) dx, \quad (298)$$

$$B^{(0)} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad B^{(n)} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(p^{(n)}x) dx \quad (299)$$

- 式 (298) の確認 (詳細と式 (299) は補足参照) : 式 (291) の $f(x)$ を代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(p^{(n)}x) dx &= \frac{B^{(0)}}{L} \underbrace{\int_{-L}^L \sin(p^{(n)}x) dx}_{=0 \text{ (奇関数)}} + \sum_{m=1}^{\infty} B^{(m)} \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x) dx}_{=0 \text{ (294)}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x) dx}_{=\delta_{mn} \text{ (292)}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \delta_{mn} = A^{(n)}
\end{aligned} \tag{300}$$

11.3 ベクトル空間との関係

- 3次元空間の実ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ の内積

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \tag{301}$$

規格直交化された基底ベクトル

$$(\mathbf{e}^{(i)}, \mathbf{e}^{(j)}) = \delta_{ij}, \quad \mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{302}$$

任意のベクトル $\mathbf{a}$ の基底による展開

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}^{(i)}, \quad a_i = (\mathbf{a}, \mathbf{e}^{(i)}) \tag{303}$$

$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ もベクトル : 実ベクトル全体 $\{\mathbf{a}\}$ は 3次元ベクトル空間をなす

- 区間 $-L \leq x \leq L$ の実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ の内積

$$(f, g) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) g(x) dx \tag{304}$$

規格直交化された基底関数 (式 (292), (293), (294))

$$(\mathbf{e}^{(i)}, \mathbf{e}^{(j)}) = \delta_{ij}, \tag{305}$$

$$\{\mathbf{e}^{(i)}\} = \{1/\sqrt{2}, \cos(p^{(1)}x), \cos(p^{(2)}x), \dots, \sin(p^{(1)}x), \sin(p^{(2)}x), \dots\} \tag{306}$$

任意の関数 $f(x)$ の基底による展開 (式 (291), (298), (299)、厳密には $f(x)$ の条件と基底の完全性が必要)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \mathbf{e}^{(i)}(x), \quad C_i = (f, \mathbf{e}^{(i)}) \tag{307}$$

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ も関数 : 関数 $\{f(x)\}$ 全体は無次元ベクトル空間をなす

11.4 フーリエ変換

- 関数 $f(x)$ つまり展開係数 $A^{(n)}, B^{(n)}$ が実数のとき、指数関数と三角関数の関係

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (308)$$

を用いてフーリエ級数展開 (291) は以下のようにまとめられる (補足参照)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx \quad (309)$$

$c_n, e^{in\pi x/L}$ はそれぞれ複素数だが $c_{-n} = c_n^*$ の関係があるため和をとった $f(x)$ は実数

- $L \rightarrow \infty$ 極限: $p^{(n)} = n\pi/L$ なので隣り合う波数の間隔 Δp は

$$\Delta p = p^{(n+1)} - p^{(n)} = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \quad (310)$$

$\Delta p \rightarrow 0$ なので波数 p は連続変数 (分母に L があるが n が無限大まで動くので p は有限)

$$\frac{n\pi}{L} \rightarrow p \quad (311)$$

c_n は $1/L$ に比例するため、有限の係数を

$$\frac{c_n}{\Delta p} \rightarrow c(p) \quad (312)$$

とすると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta p \frac{c_n}{\Delta p} e^{i(n\pi/L)x} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx} dp \quad (313)$$

$$\frac{c_n}{\Delta p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) e^{-i(n\pi/L)x} dx \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \quad (314)$$

- 座標の関数 $f(x)$ から波数の関数 $c(p)$ のフーリエ変換、 $c(p)$ から $f(x)$ への逆フーリエ変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(p) e^{ipx} dp, \quad c(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \quad (315)$$

$c(p)$ は複素数だが $c(-p) = [c(p)]^*$ の関係があるため積分した $f(x)$ は実数

- 自由度と変数のまとめ (フーリエ変換の相手が有限なら離散、無限なら連続)

系	座標	波数
N 自由度振動	j (離散有限)	$p^{(n)}, n = 1, 2, \dots, N$ (離散有限)
連続自由度振動, $0 \leq x \leq L$	x (連続有限)	$p^{(n)}, n = 1, 2, \dots$ (離散無限)
連続自由度振動, $-\infty < x < \infty$	x (連続無限)	p (連続無限)