

第11回補足

初期速度と初期位相

固定端の場合を考える。条件 (288) は

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left. \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)}) \right|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [-\omega^{(n)} \sin(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)})] \Big|_{t=0} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \omega^{(n)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin(\phi^{(n)}) \\ &= -A^{(1)}\omega^{(1)} \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) \sin(\phi^{(1)}) - A^{(2)}\omega^{(2)} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \sin(\phi^{(2)}) - \dots \quad (\text{A.308})\end{aligned}$$

である。各項の係数はそれぞれ異なるため、右辺が任意の x で 0 になるには、全ての $n = 1, 2, \dots$ で

$$\sin(\phi^{(n)}) = 0 \quad (\text{A.309})$$

である必要がある。初期位相の範囲を $0 \leq \phi^{(n)} < 2\pi$ とすると、条件を満たすのは、 $\phi^{(n)} = 0$ または π であるが、 $\sin(x + \pi) = \sin(x + \pi - 2\pi) = \sin(x - \pi) = -\sin(\pi - x) = -\sin x$ なので、任意に選べる積分定数 $A^{(n)}$ の符号を反転することで $\phi^{(n)} = \pi$ の解は $\phi^{(n)} = 0$ で表すことができる。よって一般性を失わずに全ての n で

$$\phi^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{A.310})$$

とすることができる。自由端の場合も t 依存性は同じ $\cos(\omega^{(n)}t + \phi^{(n)})$ であるので、同様に $n = 1, 2, \dots$ に対して $\phi^{(n)} = 0$ が従う。 $n = 0$ は $\omega^{(n)} = 0$ であるのでそもそも t に依存しない定数である。よって $B^{(0)} \cos(\phi^{(0)})$ をあらためて $B^{(0)}$ と定義しなおせば一般性を失わずに $\phi^{(0)} = 0$ とすることができる。以上より、固定端、自由端両方の場合で、初速度 0 の条件を満たすために、全ての $\phi^{(n)}$ を 0 に選ぶことができる。

三角関数の直交性

三角関数の加法定理より

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\begin{aligned}\cos(A - B) - \cos(A + B) &= 2 \sin A \sin B \\ \sin A \sin B &= \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}\end{aligned}\tag{A.311}$$

$$\begin{aligned}\cos(A - B) + \cos(A + B) &= 2 \cos A \cos B \\ \cos A \cos B &= \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}\end{aligned}\tag{A.312}$$

である。まず $\sin \sin$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}& \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(n)}x) \sin(p^{(m)}x) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{\cos(p^{(n)}x - p^{(m)}x) - \cos(p^{(n)}x + p^{(m)}x)}{2} dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{\cos[(p^{(n)} - p^{(m)})x] - \cos[(p^{(n)} + p^{(m)})x]}{2L} dx\end{aligned}\tag{A.313}$$

i) $n \neq m$ の場合: $p^{(n)} - p^{(m)} \neq 0$ なので

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{\sin[(p^{(n)} - p^{(m)})x]}{2L(p^{(n)} - p^{(m)})} \right]_{-L}^L - \left[\frac{\sin[(p^{(n)} + p^{(m)})x]}{2L(p^{(n)} + p^{(m)})} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{\sin[(p^{(n)} - p^{(m)})L] - \sin[(p^{(n)} - p^{(m)})(-L)]}{2L(p^{(n)} - p^{(m)})} - \frac{\sin[(p^{(n)} + p^{(m)})L] - \sin[(p^{(n)} + p^{(m)})(-L)]}{2L(p^{(n)} + p^{(m)})} \\ &= \frac{\sin[(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L})L] - \sin[(\frac{n\pi}{L} - \frac{m\pi}{L})(-L)]}{2L(p^{(n)} - p^{(m)})} - \frac{\sin[(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L})L] - \sin[(\frac{n\pi}{L} + \frac{m\pi}{L})(-L)]}{2L(p^{(n)} + p^{(m)})} \\ &= \frac{\sin[(n - m)\pi] - \sin[-(n - m)\pi]}{2L(p^{(n)} - p^{(m)})} - \frac{\sin[(n + m)\pi] - \sin[-(n + m)\pi]}{2L(p^{(n)} + p^{(m)})}\end{aligned}\tag{A.314}$$

n, m はともに整数であるので $n \pm m$ も整数、よって $\sin[(n \pm m)\pi] = 0$ であり

$$= 0\tag{A.315}$$

ii) $n = m$ の場合: $p^{(m)} = p^{(n)}$ なので

$$\begin{aligned}& \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(n)}x) \sin(p^{(n)}x) dx = \int_{-L}^L \frac{\cos[(p^{(n)} - p^{(n)})x] - \cos[(p^{(n)} + p^{(n)})x]}{2L} dx \\ &= \int_{-L}^L \frac{\cos[0]}{2L} dx - \int_{-L}^L \frac{\cos[2p^{(n)}x]}{2L} dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_0^L 1 dx - \int_{-L}^L \frac{\cos[2p^{(n)}x]}{2L} dx \\ &= \frac{1}{2L} [x]_{-L}^L - \left[\frac{\sin[2p^{(n)}x]}{4Lp^{(n)}} \right]_{-L}^L \\ &= 1 - \frac{\sin[2\frac{n\pi}{L}L] - \sin[2\frac{n\pi}{L}(-L)]}{4Lp^{(n)}} \\ &= 1 - \frac{1}{L} \frac{\sin[2n\pi] - \sin[-2n\pi]}{2p^{(n)}} \\ &= 1\end{aligned}\tag{A.316}$$

次に $\cos \cos$ の場合、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(p^{(n)}x) \cos(p^{(m)}x) dx \\
&= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \frac{\cos(p^{(n)}x - p^{(m)}x) + \cos(p^{(n)}x + p^{(m)}x)}{2} dx \\
&= \int_{-L}^L \frac{\cos[(p^{(n)} - p^{(m)})x] + \cos[(p^{(n)} + p^{(m)})x]}{2L} dx
\end{aligned} \tag{A.317}$$

であり、間の符号が異なるだけで積分は同様になる。

i) $n \neq m$ の場合： $p^{(n)} - p^{(m)} \neq 0$ なので

$$= \frac{\sin[(n - m)\pi] - \sin[-(n - m)\pi]}{2L(p^{(n)} - p^{(m)})} + \frac{\sin[(n + m)\pi] - \sin[-(n + m)\pi]}{2L(p^{(n)} + p^{(m)})} = 0 \tag{A.318}$$

ii) $n = m$ の場合： $p^{(m)} = p^{(n)}$ なので

$$= 1 + \frac{1}{L} \frac{\sin[2n\pi] - \sin[-2n\pi]}{2p^{(n)}} = 1 \tag{A.319}$$

最後に $\cos \sin$ の場合、 $\cos(p^{(m)}x)$ は x の偶関数、 $\sin(p^{(n)}x)$ は x の奇関数であり、偶関数と奇関数の積である $\cos(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x)$ は x の奇関数になる（第3回補足参照）。奇関数の対称区間の積分であるため、

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x) dx = 0 \tag{A.320}$$

となる。

フーリエ級数展開の係数

式 (291) の $f(x)$ を

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(p^{(n)}x) dx \tag{A.321}$$

に代入することを考える。このとき、 $f(x)$ を展開する際の和の添字 n は上の式ですでに使われているので、別の添字 m を用いると

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[B^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} B^{(m)} \cos(p^{(m)}x) + \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \sin(p^{(m)}x) \right] \sin(p^{(n)}x) dx \\
&= \frac{B^{(0)}}{L} \underbrace{\int_{-L}^L \sin(p^{(n)}x) dx}_{=0 \text{ (奇関数)}} + \sum_{m=1}^{\infty} B^{(m)} \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x) dx}_{=0 \text{ (294)}} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(m)}x) \sin(p^{(n)}x) dx}_{=\delta_{mn} \text{ (292)}} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \delta_{mn}
\end{aligned} \tag{A.322}$$

クロネッカーのデルタは $n = m$ のときのみ 1 でそれ以外は 0 なので

$$\sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \delta_{mn} = A^{(1)} \times \underbrace{\delta_{1n}}_{=0} + A^{(2)} \times \underbrace{\delta_{2n}}_{=0} + \cdots + A^{(n)} \times \underbrace{\delta_{nn}}_{=1} + \cdots = A^{(n)} \quad (\text{A.323})$$

と式 (298) を得る。つまり δ_{mn} をかけて m で和をとると、残りの部分の m を n で置き換えたものになる。次に $B^{(n)}$ ($n \geq 1$) は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(p^{(n)} x) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[B^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} B^{(m)} \cos(p^{(m)} x) + \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \sin(p^{(m)} x) \right] \cos(p^{(n)} x) dx \\ &= \frac{B^{(0)}}{L} \underbrace{\int_{-L}^L \cos(p^{(n)} x) dx}_{=0 \text{ 以下の (A.325)}} + \sum_{m=1}^{\infty} B^{(m)} \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos(p^{(m)} x) \cos(p^{(n)} x) dx}_{=\delta_{mn} \text{ (293)}} \\ & \quad + \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \underbrace{\frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin(p^{(m)} x) \cos(p^{(n)} x) dx}_{=0 \text{ (294)}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B^{(m)} \delta_{mn} \\ &= B^{(n)} \end{aligned} \quad (\text{A.324})$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos(p^{(n)} x) dx &= \left[\frac{\sin(p^{(n)} x)}{p^{(n)}} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{\sin(p^{(n)} L) - \sin(-p^{(n)} L)}{p^{(n)}} \\ &= \frac{\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)}{p^{(n)}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.325})$$

を用いた。最後に $B^{(0)}$ は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \left[B^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} B^{(m)} \cos(p^{(m)} x) + \sum_{m=1}^{\infty} A^{(m)} \sin(p^{(m)} x) \right] dx \\ &= \frac{B^{(0)}}{2L} \underbrace{\int_{-L}^L dx}_{=2L} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^{(m)}}{2L} \underbrace{\int_{-L}^L \cos(p^{(m)} x) dx}_{=0 \text{ (A.325)}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^{(m)}}{2L} \underbrace{\int_{-L}^L \sin(p^{(m)} x) dx}_{=0 \text{ (奇関数)}} \\ &= B^{(0)} \end{aligned} \quad (\text{A.326})$$

となる。係数 $1/2$ に注意。

複素フーリエ変換と係数

以下では関数 $f(x)$ は実数であるとする。このとき展開係数 $A^{(n)}$, $B^{(n)}$ も実数である。指数関数と三角関数の関係

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (\text{A.327})$$

を用いると式 (291) は

$$\begin{aligned} f(x) &= B^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)} \cos(p^{(n)}x) + \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \sin(p^{(n)}x) \\ &= B^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n)} \frac{e^{ip^{(n)}x} + e^{-ip^{(n)}x}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \frac{e^{ip^{(n)}x} - e^{-ip^{(n)}x}}{2i} \\ &= B^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B^{(n)}}{2} e^{ip^{(n)}x} + \frac{B^{(n)}}{2} e^{-ip^{(n)}x} + \frac{A^{(n)}}{2i} e^{ip^{(n)}x} - \frac{A^{(n)}}{2i} e^{-ip^{(n)}x} \right) \\ &= B^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\frac{B^{(n)}}{2} + \frac{A^{(n)}}{2i} \right] e^{ip^{(n)}x} + \left[\frac{B^{(n)}}{2} - \frac{A^{(n)}}{2i} \right] e^{-ip^{(n)}x} \right) \\ &= B^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left[\frac{B^{(n)}}{2} + \frac{-iA^{(n)}}{2i(-i)} \right] e^{ip^{(n)}x} + \left[\frac{B^{(n)}}{2} - \frac{-iA^{(n)}}{2i(-i)} \right] e^{-ip^{(n)}x} \right) \\ &= B^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B^{(n)} - iA^{(n)}}{2} e^{ip^{(n)}x} + \frac{B^{(n)} + iA^{(n)}}{2} e^{-ip^{(n)}x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.328})$$

となる。ここで $p^{(n)} = n\pi/L$ を用いると

$$f(x) = B^{(0)} e^{i0\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B^{(n)} - iA^{(n)}}{2} e^{in\pi x/L} + \frac{B^{(n)} + iA^{(n)}}{2} e^{-in\pi x/L} \right) \quad (\text{A.329})$$

となる。ここで第3項で $n = -m$ と変数を置き換えると、 n が1から ∞ まで動くとき m は -1 から $-\infty$ まで動くので

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^{(n)} + iA^{(n)}}{2} e^{-in\pi x/L} &= \sum_{m=-1}^{-\infty} \frac{B^{(-m)} + iA^{(-m)}}{2} e^{-i(-m)\pi x/L} \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{B^{(-n)} + iA^{(-n)}}{2} e^{in\pi x/L} \end{aligned} \quad (\text{A.330})$$

とできる。ここで和をとる添字はなんでも良いので m を n と書き直した。よって

$$\begin{aligned} f(x) &= B^{(0)} e^{i0\pi x/L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B^{(n)} - iA^{(n)}}{2} e^{in\pi x/L} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{B^{(-n)} + iA^{(-n)}}{2} e^{in\pi x/L} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L} \end{aligned} \quad (\text{A.331})$$

と書ける。ここで

$$c_0 = B^{(0)}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{B^{(n)} - iA^{(n)}}{2} & n > 0 \\ \frac{B^{(-n)} + iA^{(-n)}}{2} & n < 0 \end{cases} \quad (\text{A.332})$$

と定義した。 $A^{(n)}, B^{(n)}$ は $n > 0$ のみで定義されていることに注意。負の $n < 0$ を $n = -m$ ($m > 0$) とすると

$$c_{-m} = \frac{B^{(m)} + iA^{(m)}}{2} = \left[\frac{B^{(m)} - iA^{(m)}}{2} \right]^* = c_m^* \quad (m > 0) \quad (\text{A.333})$$

となり、正の m の係数 c_m の複素共役になっていることがわかる。よって一般に係数 c_n は複素数だが、正負の和を全てとった $f(x)$ は実数になっていることがわかる⁶。

$n > 0$ に対する係数 c_n は、式 (298), (299) を用いると

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{B^{(n)} - iA^{(n)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(p^{(n)}x) dx - \frac{i}{2} \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(p^{(n)}x) dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) [\cos(p^{(n)}x) - i \sin(p^{(n)}x)] dx \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ip^{(n)}x} dx \quad (n > 0) \end{aligned} \quad (\text{A.334})$$

と書ける。最後の表式に $n = 0$ を代入すると、 $p^{(0)} = 0\pi/L = 0$ より

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ip^{(0)}x} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^0 dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = B^{(0)} = c_0 \quad (\text{A.335})$$

となる。ここで式 (299), (A.332) を用いた。よってこれは $n = 0$ でも正しい表式である。同様に負の $n < 0$ を $n = -m$ ($m > 0$) とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ip^{(-m)}x} dx &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{im\pi x/L} dx \\ &= \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-im\pi x/L} dx \right]^* \\ &= [c_m]^* \quad \leftarrow (\text{A.334}) \\ &= c_{-m} \quad \leftarrow (\text{A.333}) \end{aligned} \quad (\text{A.336})$$

⁶ここでは1次元の波動を扱っているので変位を表す $f(x)$ が実数であるが、複素フーリエ変換自体は $f(x)$ が複素関数の場合も定義できる（量子力学の波動関数など）。この場合は $A^{(n)}, B^{(n)}$ が実数である必要がないため、係数 c_n も式 (A.333) の関係を満たす必要はない。

となり負の場合も係数を再現している。よって全ての整数 n で

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ip^{(n)}x} dx \quad (\text{A.337})$$

と書ける。