

12 波動方程式

12.1 波動方程式の導出

- 1次元の弦の振動、時刻 t での位置 x の変位 $u(x, t)$ (図 26 左)
変位 $u(x, t)$ は x に直交する方向 (横波)
- 弦の線密度 λ 、位置 x にある微小部分にはたらく力 T と S 、弦の角度 θ と ϕ (図 26 右)

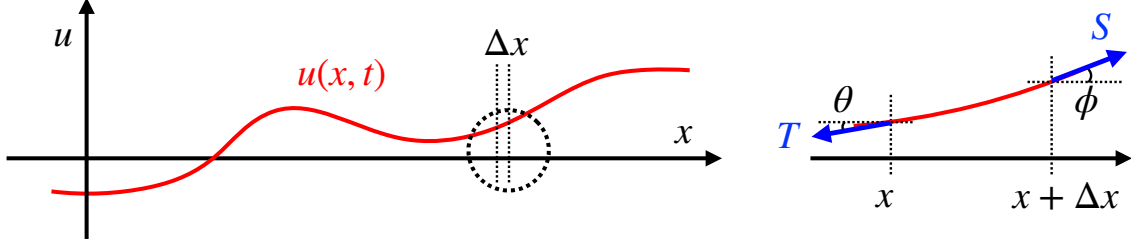


図 26: 弦の振動の模式図。左：全体図、右：微小区間の拡大図。

- 運動方程式： x 方向は変位なし、長さ ΔL の区間の質量は $\lambda \Delta x$

$$0 = S \cos \phi - T \cos \theta \quad (316)$$

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = S \sin \phi - T \sin \theta \quad (317)$$

変位 u が十分小さいと $\theta, \phi \ll 1$ なので ($\cos \theta \simeq 1, \sin \theta \simeq \theta$)

$$0 \simeq S - T \quad (318)$$

$$\lambda \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \simeq S \phi - T \theta \simeq T(\phi - \theta) \quad (319)$$

- 角度 θ, ϕ は u - x グラフの傾きなので ($\tan \theta \simeq \theta$)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \tan \theta \simeq \theta, \quad \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x+\Delta x, t)} = \tan \phi \simeq \phi \quad (320)$$

式 (319) に代入し $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取ると、式 (265) と同じ **波動方程式**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{T}{\lambda} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] \\ &= v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (321)$$

ここで速度 v は

$$v^2 = \frac{T}{\lambda} \quad (322)$$

連続体の式 (266) と比較すると $T = ka, \lambda = m/a$ と対応している。

12.2 進行波と定在波

- 波動方程式より

$$0 = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \quad (323)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \quad (324)$$

このとき以下の関数は波動方程式の解になっている（符号に注意）

$$u_+(x, t) = u_+(x - vt), \quad u_-(x, t) = u_-(x + vt) \quad (325)$$

説明： $X = x - vt$ と定義すると

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = -v \quad (326)$$

なので

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) u_+(x - vt) &= \left(\frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X} + v \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial}{\partial X} \right) u_+(X) \\ &= \left(-v \frac{\partial u_+(X)}{\partial X} + v \frac{\partial u_+(X)}{\partial X} \right) = 0 \end{aligned} \quad (327)$$

$u_-(x, t)$ については補足参照

- $u_+(x, t)$ は $t = 0$ の変位 $u_+(x, 0)$ を $+vt$ 平行移動：速度 v で x 軸正方向に進む**進行波**
 $u_-(x, t)$ は $u_-(x, 0)$ を $-vt$ 平行移動：速度 v で x 軸負方向に進む波（図 27）

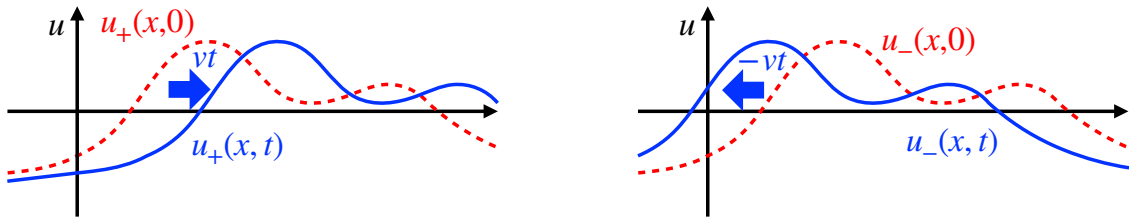


図 27: 進行波の模式図。左： x 軸正方向に進む解 $u_+(x - vt)$ 、右 x 軸正方向に進む波 $u_-(x + vt)$ 。

- 基準振動（式 (269), (271), $A = 0$ ）

$$\begin{aligned} u(x, t) &= B \cos(px) \cos(\omega t) \\ &= \frac{B}{2} \cos(px - \omega t) + \frac{B}{2} \cos(px + \omega t) \\ &= \frac{B}{2} \cos(p[x - vt]) + \frac{B}{2} \cos(p[x + vt]) \end{aligned} \quad (328)$$

第 1 項は u_+ 、第 2 項は u_- の進行波

- 基準振動は正方向と負方向の進行波の重ね合わせ：**定在波**
同じ振動数の波の重ね合わせで、各点で位相がそろっている
- 角振動数 ω と波数 k の**分散関係**

$$\omega = vp \quad (329)$$

12.3 位相速度と群速度

- バネでつながれた振り子の連続極限：

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \underbrace{v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}}_{\text{バネによる振動の伝搬}} \underbrace{-\omega_0^2 u(x, t)}_{\text{振り子による単振動}} \quad (330)$$

プラズマ中の振動の場合、 ω_0 はプラズマ振動数と呼ばれる

- 進行波の解と分散関係（補足参照）

$$u_+(x, t) = C \cos(px - \omega t), \quad u_-(x, t) = C \cos(px + \omega t) \quad (331)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + v^2 p^2} \quad (332)$$

分散性の波： ω が p に比例しない場合、 $\omega_0 \rightarrow 0$ で式 (329) に帰着

- **位相速度** v_ϕ と **群速度** v_g

$$v_\phi = \frac{\omega}{p} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + v^2 p^2}}{p}, \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial p} = v \frac{vp}{\sqrt{\omega_0^2 + v^2 p^2}} \quad (333)$$

一般には p ごとに異なる速度、 $\omega_0 \rightarrow 0$ でどちらも v に帰着（ p に依存しなくなる）

12.4 波束

- **異なる波数**の波の重ね合わせ：空間的に局在した**波束**の伝播
- 波数 p_1 と $p_2 > p_1$ の2つの波の重ね合わせ（2自由度の場合のうなり参照）

$$u(x, t) = \cos(p_2 x - \omega_2 t) + \cos(p_1 x + \omega_1 t) = \underbrace{\cos(\bar{p}x - \bar{\omega}t)}_{\text{波 1}} \times \underbrace{2 \cos(\Delta p x - \Delta \omega t)}_{\text{波 2}} \quad (334)$$

$$\bar{p} = \frac{p_2 + p_1}{2}, \quad \Delta p = \frac{p_2 - p_1}{2}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}, \quad \Delta \omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad (335)$$

- ほぼ同じ波数の波 $p_1 \simeq p_2$ を重ね合わせた場合

$$\Delta p \ll \bar{p}, \quad \Delta \omega \ll \bar{\omega} \quad (336)$$

- $t = 0$ での波形

$$u(x, 0) = \underbrace{\cos(\bar{p}x)}_{\text{波 1}} \times \underbrace{2 \cos(\Delta p x)}_{\text{波 2}} \quad (337)$$

波 1：波長 $1/\bar{p}$ の短い波、波 2：波長 $1/\Delta p$ の長い波（図 28 左）

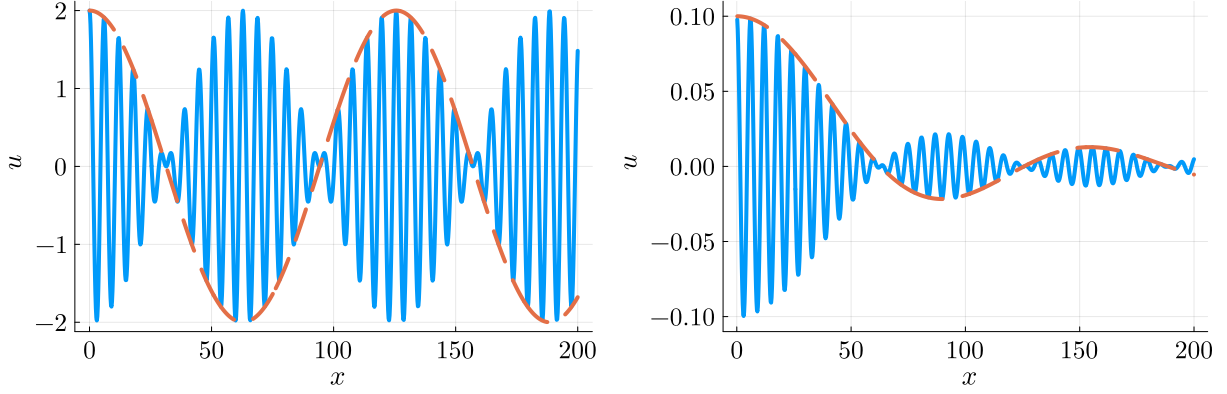


図 28: 左：式 (337) の $u(x, 0)$ （実線）と $2 \cos[\Delta p x]$ （破線）のプロット。右：式 (341) の $u(x, 0)$ （実線）と $2 \sin[\Delta p x]/x$ （破線）のプロット。

- 伝播速度 ($p_2 \rightarrow p_1$)

$$(\text{波 1}) = \cos \left[\bar{p} \left(x - \frac{\bar{\omega}}{\bar{p}} t \right) \right], \quad (\text{波 2}) = 2 \cos \left[\Delta p \left(x - \frac{\Delta \omega}{\Delta p} t \right) \right] \quad (338)$$

波 1： $\bar{\omega}/\bar{p} \simeq \omega_1/p_1 \simeq \omega_2/p_2 = v_\phi$ 位相速度で進行

波 2： $\Delta \omega/\Delta p \simeq \partial \omega/\partial p = v_g$ 群速度で進行

- 分散関係が式 (329) の場合： $v_\phi = v_g$ であり図 28 が平行移動
式 (332) の場合： $v_\phi \neq v_g$ であり破線に対応する細かい波の頂点が変化（HP の動画参照）
- $p_1 \leq p \leq p_2$ の複数の振動数のモードの重ね合わせ
 L が十分大きく振動数の和を積分で置き換えて良いとすると

$$u(x, t) = \int_{p_1}^{p_2} \cos(px - \omega(p)t) dp \quad (339)$$

分散関係が式 (329) の場合（補足参照）

$$u(x, t) = 2 \frac{\sin[\Delta p(x - vt)] \cos[\bar{p}(x - vt)]}{x - vt} \quad (340)$$

- $t = 0$ での波形

$$u(x, 0) = \underbrace{\cos(\bar{p}x)}_{\text{波 1}} \times \underbrace{\frac{2 \sin(\Delta p x)}{x}}_{\text{波 2}} \quad (341)$$

$x = 0$ を中心に局在した波：波束