第12回補足

波動方程式の解

関数

$$u_-(x, t) = u_-(x + vt) \quad (\text{A.338})$$

に対し $Y = x + vt$ と定義すると

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = v \quad (\text{A.339})$$

なので

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \frac{\partial}{\partial x} \right) u_-(x + vt) &= \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial Y} - v \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Y} \right) u_-(Y) \\ &= \left(v \frac{\partial u_-(Y)}{\partial Y} - v \frac{\partial u_-(Y)}{\partial Y} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.340})$$

である。式 (323) より $u_-(x - vt)$ は波動方程式の解である。

単振動項を含む波動方程式

波動方程式 (330) :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \omega_0^2 u(x, t) \quad (\text{A.341})$$

の解を変数分離法で求める。 ω_0 が無い場合と同様に、

$$u(x, t) = T(t)X(x) \quad (\text{A.342})$$

と時間に依存する関数 $T(t)$ と座標に依存する関数 $X(x)$ の積の形になると仮定する。これを波動方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(t)X(x)}{\partial t^2} + \omega_0^2 T(t)X(x) &= v^2 \frac{\partial^2 T(t)X(x)}{\partial x^2} \\ X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega_0^2 T(t)X(x) &= v^2 T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (\text{A.343})$$

両辺を $v^2 T(t)X(x) \neq 0$ で割ると

$$\frac{1}{v^2 T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \frac{\omega_0^2}{v^2} = \frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad (\text{A.344})$$

とできる。定数 ω_0^2/v^2 が加わっても左辺は t のみの関数、右辺は x のみの関数である。よって両辺の値は t にも x にもよらない定数でなければならない。この定数を $-p^2$ とおくと、左辺から

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0^2}{v^2} &= -p^2 \\ \frac{d^2 T(t)}{dt^2} &= -p^2 v^2 T(t) - \omega_0^2 T(t) = -(p^2 v^2 + \omega_0^2) T(t) \end{aligned} \quad (\text{A.345})$$

となる。変数が t のみになったので偏微分を常微分に置き換えた。これは単振動の微分方程式なので、一般解として

$$T(t) = T_0 \cos(\sqrt{p^2 v^2 + \omega_0^2} t + \phi) \quad (\text{A.346})$$

を採用する (T_0, ϕ は積分定数)。角振動数 ω を

$$T(t) = T_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{A.347})$$

と定義すると、波数 p と角振動数 ω の関係は

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + v^2 p^2} \quad (\text{A.348})$$

となり式 (332) の分散関係を得る。

次に式 (A.344) の右辺より

$$\begin{aligned} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= -p^2 \\ \frac{d^2 X(x)}{dx^2} &= -p^2 X(x) \end{aligned} \quad (\text{A.349})$$

であり、これもやはり単振動の方程式なので、一般解を

$$X(x) = a \sin(px) + b \cos(px) \quad (\text{A.350})$$

と書ける (a, b は積分定数)。よって全体の一般解は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= T(t) X(x) \\ &= T_0 \cos(\omega t + \phi) [a \sin(px) + b \cos(px)] \\ &= [T_0 a \sin(px) + T_0 b \cos(px)] \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (\text{A.351})$$

である。 ϕ, a, b を適切に選ぶことで進行波の解を構成できる。

式 (340) の計算

式 (339) に $\omega = vp$ を代入すると

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{p_1}^{p_2} \cos[p(x - vt)] dp \\ &= \left[\frac{\sin[p(x - vt)]}{x - vt} \right]_{p_1}^{p_2} \\ &= \frac{\sin[p_2(x - vt)] - \sin[p_1(x - vt)]}{x - vt} \\ &= 2 \frac{\sin\left[\frac{p_2 - p_1}{2}(x - vt)\right] \cos\left[\frac{p_2 + p_1}{2}(x - vt)\right]}{x - vt} \\ &= 2 \frac{\sin[\Delta p(x - vt)] \cos[\bar{p}(x - vt)]}{x - vt} \end{aligned} \tag{A.352}$$

となり式 (340) を得る。