13　反射、透過

13.1　固定端での反射

- 波動方程式 (265)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{342}$$

解は進行波の重ね合わせ（f_+, f_- は 1 変数関数）

$$u(x,t) = u_+(x,t) + u_-(x,t) = f_+(x-vt) + f_-(x+vt) \tag{343}$$

- $x=0$ に**固定端**：変位は常に 0 なので、任意の t で

$$u(0,t) = 0 \tag{344}$$

- $x<0$ の領域から x 軸正方向に有限の幅の**入射波** $f_+(x-vt)$ が進行する場合（図 29）
境界条件 (344) は $f_+(x-vt)$ のみでは満たせない：負方向に進む**反射波** $f_-(x+vt)$ が必要

- f_- を含む一般解 (343) を式 (344) に代入すると

$$f_+(-vt) + f_-(vt) = 0 \tag{345}$$

任意の時刻 t で成立するには、関数 f_- と f_+ の関係は

$$f_-(X) = -f_+(-X) \tag{346}$$

- 一般解（$x<0$ のみが波動が起きる領域）

$$u(x,t) = f_+(x-vt) - f_+[-(x+vt)] = \underbrace{f_+(x-vt)}_{\text{入射波}} \underbrace{-f_+(-x-vt)}_{\text{反射波}} \quad (x<0) \tag{347}$$

反射波は入射波と形が同じで変位の符号が逆（図 29、HP の動画参照）：位相が π ずれる

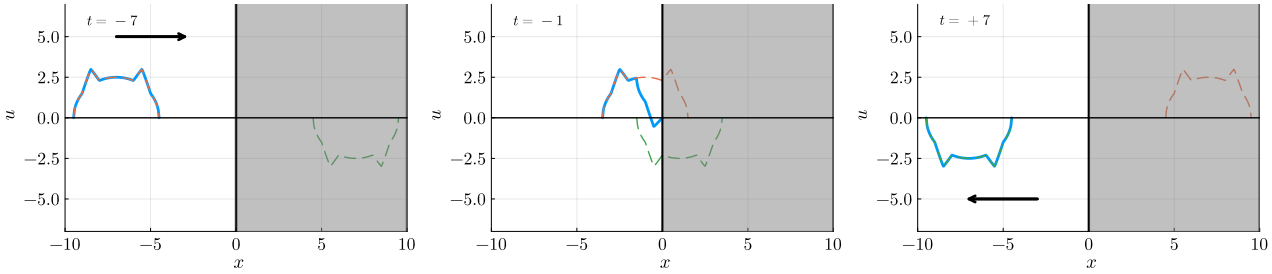

図 29: 固定端による反射。入射波と反射波（破線）を重ね合わせたものが実際の波（実線）

13.2　自由端での反射

- $x=0$ に**自由端**：変位の微分は常に 0 なので、任意の t で

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{348}$$

- $f_+(x-vt)$ のみでは満たせないので式 (343) を代入すると

$$\left.\frac{\partial f_+(x-vt)}{\partial x}\right|_{x=0}+\left.\frac{\partial f_-(x+vt)}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{349}$$

ここで $X=x-vt$ とすると

$$\left.\frac{\partial f_+(x-vt)}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial X}{\partial x}\frac{df_+(X)}{dX}\right|_{X=-vt}=\left.\frac{df_+(X)}{dX}\right|_{X=-vt}\equiv f'_+(-vt) \tag{350}$$

一方 $Y=-vt$ とすると（変数は t しかないので常微分）

$$\frac{df_+(-vt)}{dt}=\frac{dY}{dt}\left.\frac{df_+(Y)}{dY}\right|_{Y=-vt}=-v\left.\frac{df_+(Y)}{dY}\right|_{Y=-vt}=-vf'_+(-vt) \tag{351}$$

であるので、

$$\left.\frac{\partial f_+(x-vt)}{\partial x}\right|_{x=0}=f'_+(-vt)=-\frac{1}{v}\frac{df_+(-vt)}{dt} \tag{352}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}-\frac{1}{v}\frac{df_+(-vt)}{dt}+\frac{1}{v}\frac{df_-(vt)}{dt}&=0\\ \frac{df_-(vt)}{dt}&=\frac{df_+(-vt)}{dt}\end{aligned} \tag{353}$$

であり t で積分すると

$$f_-(vt)=f_+(-vt)+C \tag{354}$$

C は積分定数

- 一般解

$$u(x,t)=f_+(x-vt)+f_+[-(x+vt)]=\underbrace{f_+(x-vt)}_{\text{入射波}}\underbrace{+f_+(-x-vt)}_{\text{反射波}}\quad(x<0) \tag{355}$$

積分定数 C は十分 $|t|$ が大きいとき $x=0$ の変位が 0 であるために $C=0$
反射波は入射波と形と変位の符号が同じ（図 30、HP の動画参照）：位相が同じ

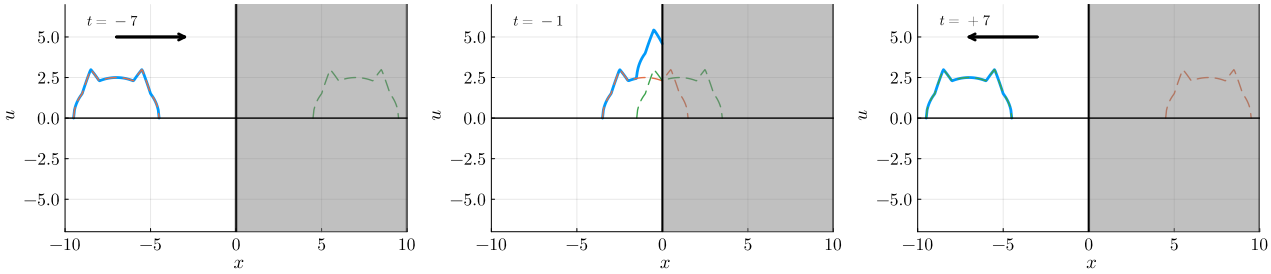

図 30: 自由端による反射。入射波と反射波（破線）を重ね合わせたものが実際の波（実線）

13.3 異なる媒質での反射、透過

- $x > 0$ と $x < 0$ で速度 v の値が異なる媒質中を伝わる波
- 波動方程式（$v_1 \neq v_2$）

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \begin{cases} v_1^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & (x < 0) \\ v_2^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & (x > 0) \end{cases} \tag{356}$$

- $x < 0$ の領域で x 軸正方向に有限の幅の**入射波** $f_+(x - v_1 t)$ が進行する場合
  $x > 0$ に**透過波** $g_+(x - v_2 t)$ と $x < 0$ に**反射波** $g_-(x + v_1 t)$ があらわれる

$$u(x,t) = \begin{cases} f_+(x - v_1 t) + g_-(x + v_1 t) & (x < 0) \\ g_+(x - v_2 t) & (x > 0) \end{cases} \tag{357}$$

- $x = 0$ での**境界条件**
  変位が連続 $u(x,t)|_{x \to 0^-} = u(x,t)|_{x \to 0^+}$

$$f_+(-v_1 t) + g_-(v_1 t) = g_+(-v_2 t) \tag{358}$$

  変位の微分が連続 $\partial u(x,t)/\partial x|_{x \to 0^-} = \partial u(x,t)/\partial x|_{x \to 0^+}$（変位がなめらか、エネルギー流が保存するという条件）

$$\left.\frac{\partial f_+(x - v_1 t)}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial g_-(x + v_1 t)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial g_+(x - v_2 t)}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{359}$$

$$-\frac{1}{v_1}\frac{df_+(-v_1 t)}{dt} + \frac{1}{v_1}\frac{dg_-(v_1 t)}{dt} = -\frac{1}{v_2}\frac{dg_+(-v_2 t)}{dt} \tag{360}$$

$$f_+(-v_1 t) - g_-(v_1 t) = \frac{v_1}{v_2} g_+(-v_2 t) \tag{361}$$

  ただし十分 $|t|$ が大きいとき $x = 0$ の変位が 0 であるため積分定数は 0 とした

- $g_\pm$ を f_+ を用いて表すと（補足参照）

$$g_-(X) = -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} f_+(-X), \quad g_+(X) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} f_+\left(\frac{v_1}{v_2} X\right) \tag{362}$$

- 一般解

$$u(x,t) = \begin{cases} \underbrace{f_+(x-v_1t)}_{\text{入射波}} \underbrace{-\dfrac{v_1-v_2}{v_1+v_2} f_+[-x-v_1t]}_{\text{反射波}} & (x<0) \\ \underbrace{\dfrac{2v_2}{v_1+v_2} f_+\left[\dfrac{v_1}{v_2}(x-v_2t)\right]}_{\text{透過波}} & (x>0) \end{cases} \tag{363}$$

- $v_1 > v_2$ の場合（図 31、HP の動画参照）
  - 反射波の係数 $-(v_1-v_2)/(v_1+v_2) < 0$：入射波と位相は π ずれる
  - 透過波の係数 $2v_2/(v_1+v_2) > 0$：入射波と位相は同じ
    $2v_2/(v_1+v_2) < 1$：入射波より振幅が小さくなり速度が遅くなる

- $v_1 < v_2$ の場合（図 32、HP の動画参照）
  - 反射波の係数 $-(v_1-v_2)/(v_1+v_2) > 0$：入射波と位相は同じ
  - 透過波の係数 $2v_2/(v_1+v_2) > 0$：入射波と位相は同じ
    $2v_2/(v_1+v_2) > 1$：入射波より振幅が大きくなり速度が速くなる

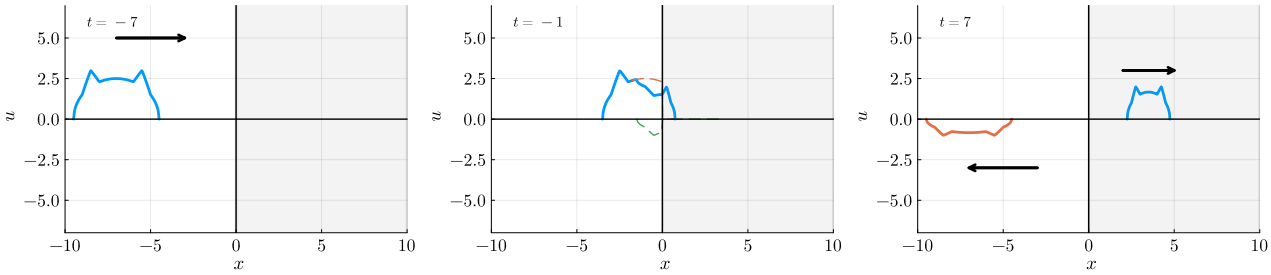

図 31: 異なる媒質での透過と反射（$v_2 = 0.5v_1$）。

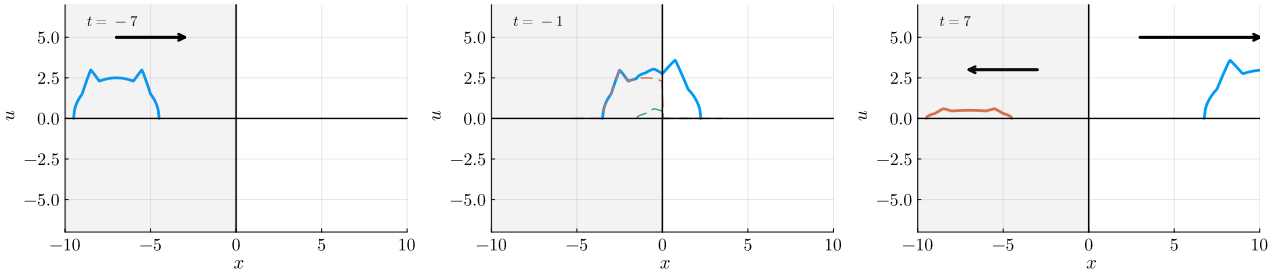

図 32: 異なる媒質での透過と反射（$v_2 = 1.5v_1$）。