

第13回補足

式(352)の計算

講義ノートの議論より

$$\left. \frac{\partial f_+(x-vt)}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{v} \frac{df_+(-vt)}{dt} \quad (\text{A.353})$$

が得られた。確認のため、例として関数

$$f_+(z) = z^2 + z \quad (\text{A.354})$$

を考えると、

$$f_+(x-vt) = (x-vt)^2 + x-vt = x^2 - 2xvt + x + v^2t^2 - vt \quad (\text{A.355})$$

$$f_+(-vt) = v^2t^2 - vt \quad (\text{A.356})$$

であるので、

$$\left. \frac{\partial f_+(x-vt)}{\partial x} \right|_{x=0} = (2x - 2vt + 1)|_{x=0} = -2vt + 1 \quad (\text{A.357})$$

一方

$$-\frac{1}{v} \frac{df_+(-vt)}{dt} = -\frac{1}{v} (2v^2t - v) = -2vt + 1 \quad (\text{A.358})$$

と確かに一致することがわかる。

f_- について、 $X = x + vt$ とすると

$$\left. \frac{\partial f_-(x+vt)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \frac{df_-(X)}{dX} \right|_{x=0} = \left. \frac{df_-(X)}{dX} \right|_{x=0} = f'_-(vt) \quad (\text{A.359})$$

一方 $Y = vt$ とすると

$$\frac{\partial f_-(vt)}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{df_-(Y)}{dY} = v \frac{df_-(Y)}{dY} = v f'_-(vt) \quad (\text{A.360})$$

であるので、

$$\left. \frac{\partial f_-(x+vt)}{\partial x} \right|_{x=0} = f'_-(vt) = \frac{1}{v} \frac{\partial f_-(vt)}{\partial t} \quad (\text{A.361})$$

となる。

式 (362) の計算

式 (358) に v_1/v_2 をかけて式 (361) を引くと

$$\begin{aligned}
 \frac{v_1}{v_2} f_+(-v_1 t) + \frac{v_1}{v_2} g_-(v_1 t) - [f_+(-v_1 t) - g_-(v_1 t)] &= \frac{v_1}{v_2} g_+(-v_2 t) - \frac{v_1}{v_2} g_+(-v_2 t) \\
 \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right) f_+(-v_1 t) + \left(\frac{v_1}{v_2} + 1 \right) g_-(v_1 t) &= 0 \\
 \frac{v_1 + v_2}{v_2} g_-(v_1 t) &= -\frac{v_1 - v_2}{v_2} f_+(-v_1 t) \\
 g_-(v_1 t) &= -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} f_+(-v_1 t)
 \end{aligned} \tag{A.362}$$

ここで $v_1 t = X$ とすると、関数 f_+ と g_- の関係は

$$g_-(X) = -\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} f_+(-X) \tag{A.363}$$

となる。また、式 (358) と式 (361) の和をとると

$$\begin{aligned}
 f_+(-v_1 t) + g_-(v_1 t) + [f_+(-v_1 t) - g_-(v_1 t)] &= g_+(-v_2 t) + \frac{v_1}{v_2} g_+(-v_2 t) \\
 \left(1 + \frac{v_1}{v_2} \right) g_+(-v_2 t) &= 2f_+(-v_1 t) \\
 \frac{v_1 + v_2}{v_2} g_+(-v_2 t) &= 2f_+(-v_1 t) \\
 g_+(-v_2 t) &= \frac{2v_2}{v_1 + v_2} f_+(-v_1 t) \\
 g_+(-v_2 t) &= \frac{2v_2}{v_1 + v_2} f_+ \left[\frac{v_1}{v_2} (-v_2 t) \right]
 \end{aligned} \tag{A.364}$$

ここで $v_2 t = X$ とすると、関数 f_+ と g_+ の関係は

$$g_+(X) = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} f_+ \left(\frac{v_1}{v_2} X \right) \tag{A.365}$$

となる。