第 1 回補足

内力の和

講義ノート式 (40) で使う等式

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ij}) \tag{A.1}$$

および式 (48) で使う等式

$$\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) = \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ji} \tag{A.2}$$

の説明。ただし和記号はそれぞれ以下の意味である：

$$\sum_i C_i = \sum_{i=1}^{N} C_i = C_1 + C_2 + \cdots C_N \tag{A.3}$$

$$\sum_{i\neq 3} C_i = C_1 + C_2 + C_4 + \cdots C_N \quad (i = 3 \text{ のみ含まず和をとる}) \tag{A.4}$$

$$\sum_{i>3} C_i = C_4 + \cdots C_N \quad (3 \text{ より大きい } i \text{ のみの和をとる}) \tag{A.5}$$

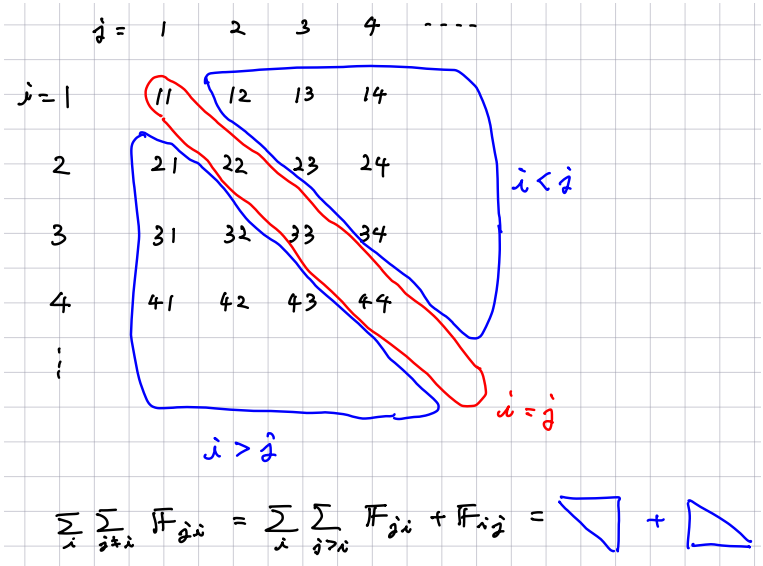

図 A.2: 式 (A.1) の和の直感的な説明。

式 (A.1) の直感的な説明：$\boldsymbol{F}_{ji}$ の ji を行列の成分だと思えば、両辺とも非対角成分の和をとることに対応している（図 A.2）。条件をつけずに $\sum_i \sum_j$ とすると行列の全ての成分の和をとることになるので、左辺の $\sum_i \sum_{j\neq i}$ は j の和をとる際に i と異なる場合のみに制限することで、対角成分だけ飛ばして（つまり非対角成分のみの）和をとることを表している。右辺の $\sum_i \sum_{j>i}$ は対角

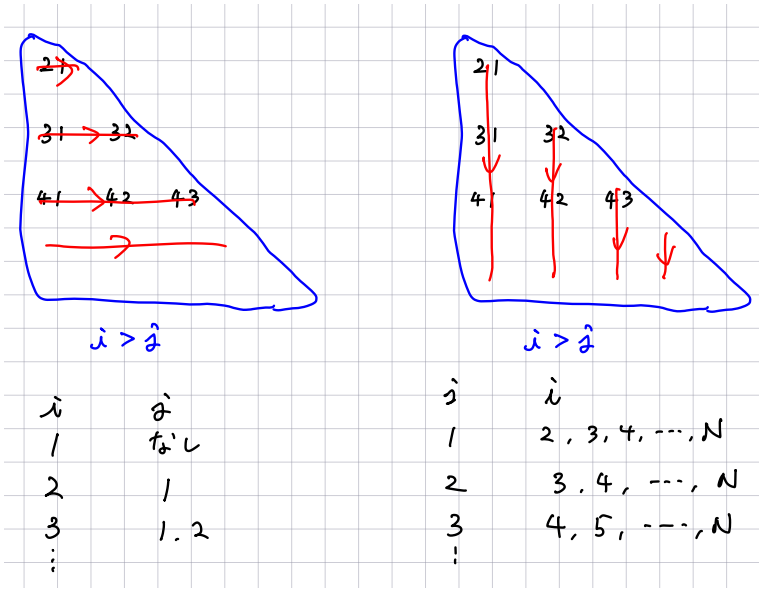

図 A.3: $i > j$ の和。

成分をのぞいた上三角成分の和をとることに対応するので、$\sum_i \sum_{j>i} \boldsymbol{F}_{ji}$ と $\sum_i \sum_{j>i} \boldsymbol{F}_{ij}$ を足すことで右上、左下両方の和をとっている。

式 (A.1) の式を使った説明：まず、$j \neq i$ は $j > i$ または $j < i$ のどちらかなので、

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_i \sum_{j>i} \boldsymbol{F}_{ji} + \sum_i \sum_{j<i} \boldsymbol{F}_{ji} \tag{A.6}$$

である。右辺第 2 項は

- i を一つ固定し、その i に対して $j < i$ の条件を満たす j を 1 から $i-1$ まで足す、これを $i = 1$ から N まで繰り返して全て足す

という意味だが、これは

- j を一つ固定し、その j に対して $j < i$ の条件を満たす i を $i+1$ から N まで足す、これを $j = 1$ から N まで繰り返して全て足す

と言い換えることができる（図 A.3）[1]。よって

$$\sum_i \sum_{j<i} \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_j \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ji} \tag{A.7}$$

和をとる添字は任意なので、

$$\sum_j \sum_{i<j} \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_i \sum_{j>i} \boldsymbol{F}_{ij} \tag{A.8}$$

[1] つまり和をとる順序は関係なく「i, j についてそれぞれ 1 から N まで動かし、$j < i$ の条件を満たすもののみ足す」とも言うことができる。

となり

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_i \sum_{j>i} \boldsymbol{F}_{ji} + \sum_i \sum_{j>i} \boldsymbol{F}_{ij} = \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ij}) \tag{A.9}$$

と式 (A.1) を得る。

式のイメージが湧かない場合は、具体的に両辺を書き下してみると良い。たとえば $N = 3$ の場合、左辺は

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} &= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{j\neq 1} \boldsymbol{F}_{j1}}_{\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{31}} + \underbrace{\sum_{j\neq 2} \boldsymbol{F}_{j2}}_{\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{32}} + \underbrace{\sum_{j\neq 3} \boldsymbol{F}_{j3}}_{\boldsymbol{F}_{13}+\boldsymbol{F}_{23}} \\
&= \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{23}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

右辺は

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ij}) &= \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j>i} (\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ij}) \right) \\
&= \underbrace{\sum_{j>1} (\boldsymbol{F}_{j1} + \boldsymbol{F}_{1j})}_{\boldsymbol{F}_{21}+\boldsymbol{F}_{12}+\boldsymbol{F}_{31}+\boldsymbol{F}_{13}} + \underbrace{\sum_{j>2} (\boldsymbol{F}_{j2} + \boldsymbol{F}_{2j})}_{\boldsymbol{F}_{32}+\boldsymbol{F}_{23}} + \underbrace{\sum_{j>3} (\boldsymbol{F}_{j3} + \boldsymbol{F}_{3j})}_{0} \\
&= \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31} + \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{32} + \boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{23}
\end{aligned} \tag{A.11}$$

となり一致していることが確認できる。

式 (A.2) の計算：

$$\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) = \sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} \tag{A.12}$$

ここで $\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji}$ は添字 ji をもったベクトルなので、$\boldsymbol{A}_{ji}$ とおく。このとき、添字に注意すると

$$\boldsymbol{A}_{ji} \equiv \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji}, \quad \boldsymbol{A}_{ab} = \boldsymbol{r}_b \times \boldsymbol{F}_{ab}, \quad \boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ij} \tag{A.13}$$

であるので、式 (A.1) より

$$\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) = \sum_i \sum_{j\neq i} \boldsymbol{A}_{ji} = \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{A}_{ji} + \boldsymbol{A}_{ij}) \tag{A.14}$$

$\boldsymbol{A}_{ji}$ を元に戻すと

$$\begin{aligned}
\sum_i \left(\boldsymbol{r}_i \times \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji} \right) &= \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ij}) \\
&= \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ji} - \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji}) \quad \leftarrow \text{作用反作用の法則 (32)} \\
&= \sum_i \sum_{j>i} (\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j) \times \boldsymbol{F}_{ji}
\end{aligned} \tag{A.15}$$

重心を基準とした座標による全角運動量

全角運動量の定義 (45) を重心を基準とした座標で書くと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \sum_i \boldsymbol{L}_i \\ &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_i m_i(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}'_i) \times (\boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'_i) \\ &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} \sum_i m_i + \boldsymbol{R} \times \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i + \sum_i \{m_i \boldsymbol{r}'_i\} \times \boldsymbol{V} + \sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}'_i \end{aligned} \tag{A.16}$$

となる。ここで

$$\sum_i m_i = M \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i &= \sum_i m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}) \\ &= \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V} \sum_i m_i \\ &= M\boldsymbol{V} - M\boldsymbol{V} \quad \leftarrow (35) \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i &= \sum_i m_i(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}) \\ &= \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R} \sum_i m_i \\ &= M\boldsymbol{R} - M\boldsymbol{R} \quad \leftarrow (33) \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{A.19}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \boldsymbol{R} \times M\boldsymbol{V} + \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{V} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i \\ &= \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{L}', \quad \boldsymbol{L}' = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i \end{aligned} \tag{A.20}$$

第 1 項は重心の角運動量、第 2 項は重心まわりの角運動量 $\boldsymbol{L}'$ である。