

2 衝突

2.1 弾性衝突・非弾性衝突

- 衝突：**外力なし**で2つの物体が衝突し速度が変化（2質点系）
衝突前の速度 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 、衝突後の速度 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ （図3左）
- 弾性衝突**：衝突の前後で力学的エネルギーが保存する場合
衝突前と衝突後は同じ2つの物体
- 非弾性衝突**：衝突時にエネルギーが失われる（物体が変形する、火花が出る、など）場合や、衝突の前後で状態が変化する（物体が割れる）場合
- 運動量保存（いつでも成立）

$$\mathbf{P} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2 \quad (51)$$

- エネルギー保存（弾性衝突の場合のみ）

$$K = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \mathbf{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{u}_2^2 \quad (52)$$

ポテンシャルエネルギーは0：外力は仕事をせず、内力の仕事は1と2で符号が反対

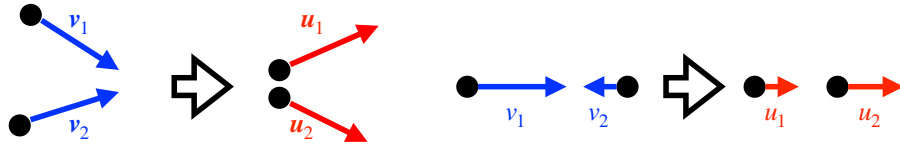


図3: 衝突の模式図。左：3次元運動の衝突。右：1次元運動の衝突（右向きが正、 $v_2 < 0$ ）。

- 2質点系の**相対座標**、相対速度：質点2を基準とした質点1の座標

$$\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (53)$$

どちらを基準にするかで2通り考えられるが、1と2の名前の付け替えで同じになる

- 重心系での速度は（補足参照）

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} = \frac{m_2}{M} \mathbf{v} \quad (54)$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} = -\frac{m_1}{M} \mathbf{v} \quad (55)$$

- 相対速度 $\mathbf{v}$ を用いると全運動エネルギーは（補足参照）

$$K = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 \quad (56)$$

- 換算質量**（補足参照）

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \quad (57)$$

2.2 1次元衝突

- 1次元の衝突：速度ベクトルは1成分 (v_1, u_1 など)、正負が向きを表す、図3右
- 運動量保存

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad (58)$$

と式 (35) より、重心速度 V は

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{M} \quad (59)$$

- 反発係数

$$-e \equiv \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2} = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad u = -ev \quad (60)$$

大きさ：衝突後の相対速度/衝突前の相対速度、符号：衝突して逆向きになるので負

- 式 (54), (54) より、重心系での衝突前の速度は

$$v'_1 = \frac{m_2}{M} v, \quad v'_2 = -\frac{m_1}{M} v \quad (61)$$

衝突後の速度は、反発係数 (60) を用いて

$$u'_1 = \frac{m_2}{M} u = -\frac{m_2}{M} ev = -ev'_1 \quad (62)$$

$$u'_2 = -\frac{m_1}{M} u = \frac{m_1}{M} ev = -ev'_2 \quad (63)$$

つまり重心系では衝突後に速度が $-e$ 倍になる

- 全運動エネルギー：重心系では $V = 0$ なので、式 (56) より衝突前は

$$K = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (64)$$

衝突後は

$$K_{\text{後}} = \frac{1}{2} \mu u^2 = \frac{1}{2} \mu (-ev)^2 = e^2 K \quad (65)$$

と e^2 倍になる

- $e = 1$: 弾性衝突、運動エネルギーが保存
- $e < 1$: 非弾性衝突、運動エネルギーが損失
- $e = 0$: 完全非弾性衝突、衝突後2物体が合体（衝突後の重心系の速度が0）
- ($e > 1$: 非弾性衝突、内部エネルギーを速度に変える、回転するコマの衝突など)

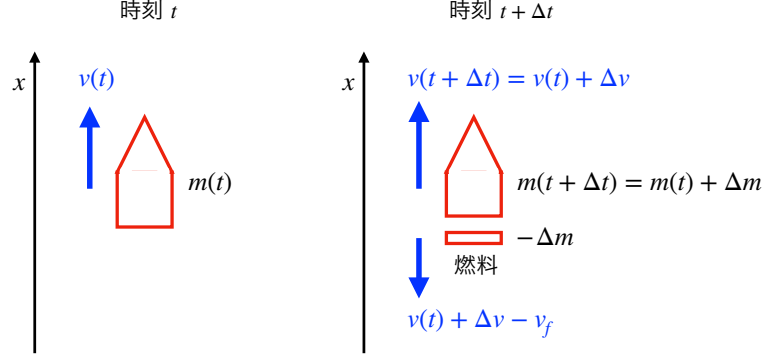


図 4: 燃料を放出しながら加速するロケット ($v(t) + \Delta v - v_f$ の向きは速度に依存する)。

2.3 質量が時間変化する運動

- 宇宙空間で燃料を放出しながら加速するロケット、進行方向に x 軸、1 次元運動 (図 4)
放出した燃料の分ロケットが軽くなる → ロケットの**質量が時間依存**
- 時刻 t : 質量 $m(t)$ 、速度 $v(t)$ のロケット (図 4 左)

$$P(t) = m(t)v(t) \quad (66)$$

- 時刻 $t + \Delta t$: 軽くなったロケットと放出された燃料 (図 4 右)

$$P(t + \Delta t) = P_{\square}(t + \Delta t) + P_{\text{燃}}(t + \Delta t) \quad (67)$$

- ロケットの質量 $m(t + \Delta t) \equiv m(t) + \Delta m$ 、速度 $v(t + \Delta t) \equiv v(t) + \Delta v$
ロケットの質量が減る: $\Delta m < 0$ 、加速される: $\Delta v > 0$

$$P_{\square}(t + \Delta t) = m(t + \Delta t)v(t + \Delta t) = m(t)v(t) + \Delta m v(t) + \Delta v m(t) + \cancel{\Delta m \Delta v} \quad (68)$$

Δt が十分小さい $\rightarrow \Delta m, \Delta v$ も小さく $\Delta m^2, \Delta m \Delta v, \Delta v^2$ などは無視

- ロケットの質量が $\Delta m < 0$ 変化 $\rightarrow$ 燃料の質量は $-\Delta m > 0$
ロケットの静止系での (ロケットから見た) 燃料の放出速度 $-v_f$ ($v_f > 0$ で x 軸負の向き)
(外から見た) 燃料の速度: $v(t) + \Delta v - v_f$

$$P_{\text{燃}}(t + \Delta t) = -\Delta m[v(t) + \Delta v - v_f] = -\Delta m v(t) - \cancel{\Delta m \Delta v} + \Delta m v_f \quad (69)$$

よって全体の運動量は

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) &= m(t)v(t) + \Delta m v(t) + \Delta v m(t) - \Delta m v(t) + \Delta m v_f \\ &= P(t) + \Delta v m(t) + \Delta m v_f \end{aligned} \quad (70)$$

- 運動量保存 $P(t) = P(t + \Delta t)$ より (補足参照)

$$\dot{v}(t) = -v_f \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \quad (71)$$

- 時刻 $t = 0$ で $v(0) = v_0$ 、 $m(0) = m_0$ とし、両辺を $t = 0$ から $t = T > 0$ まで積分

$$\int_0^T dt \frac{dv}{dt} = \int_{v(t=0)}^{v(t=T)} dv = [v]_{v_0}^{v(T)} = v(T) - v_0 \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \left[-v_f \frac{1}{m(t)} \frac{dm(t)}{dt} \right] &= -v_f \int_{m(t=0)}^{m(t=T)} dm \frac{1}{m} = -v_f [\ln m]_{m_0}^{m(T)} \\ &= v_f [\ln(m_0) - \ln(m(T))] = v_f \ln \left[\frac{m_0}{m(T)} \right] \end{aligned} \quad (73)$$

ツィオルコフスキーの公式：時刻 T での速度 $v(T)$ を与える

$$v(T) = v_0 + v_f \ln \left[\frac{m_0}{m(T)} \right] \quad (74)$$

$m_0 > m(T)$ より $m_0/m(T) > 1$ つまり $\ln[m_0/m(T)] > 0$ なので $v(T) > v_0$ (加速される)
より加速するには： v_f (燃料放出速度) 大、または $m_0/m(T)$ 大 (燃料放出量大)

2.4 外力がはたらく場合

- 燃料を放出しながら重力 (外力、 x 軸負の向き) に逆らって加速されるロケット
時刻 t のロケットにはたらく重力

$$F(t) = -m(t)g \quad (75)$$

- 運動量は保存せず、時間変化が重力で与えられる

$$\dot{P}(t) = -m(t)g = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} \quad (76)$$

- 運動量の変化 ΔP

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = \Delta v m(t) + \Delta m v_f \quad (77)$$

- 運動方程式

$$\begin{aligned} -m(t)g &= m(t)\dot{v}(t) + v_f \dot{m}(t) \\ \dot{v}(t) &= -g - v_f \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \end{aligned} \quad (78)$$

積分すると

$$v(T) = v_0 - gT + v_f \ln \left[\frac{m_0}{m(T)} \right] \quad (79)$$

重力の効果： $-gT < 0$ で減速 $\rightarrow$ 燃料放出でこれに打ち勝たないと加速できない