第2回補足

式(54), (55) の計算

式(33)の全質量は $N = 2$ のとき $M = m_1 + m_2$ 、式(35)の重心速度は $N = 2$ のとき $\mathbf{V} = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/M$ なので

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \quad \leftarrow (37) \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{M}\mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M} \quad \leftarrow (33), (35) \\
 &= \frac{m_1}{M}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1) + \frac{m_2}{M}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
 &= \frac{m_2}{M}\mathbf{v} \quad \leftarrow (53)
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}'_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} \quad \leftarrow (37) \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{M}\mathbf{v}_2 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M} \quad \leftarrow (33), (35) \\
 &= -\frac{m_1}{M}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \frac{m_2}{M}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_2) \\
 &= -\frac{m_1}{M}\mathbf{v} \quad \leftarrow (53)
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

より式(54), (55)を得る。

式(56) の計算

全運動エネルギーは

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}'_2)^2 \quad \leftarrow (42) \\
 &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{M}\mathbf{v}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-\frac{m_1}{M}\mathbf{v}\right)^2 \quad \leftarrow (54), (55) \\
 &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{M^2}\mathbf{v}^2 \\
 &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(m_1 + m_2)}{M(m_1 + m_2)}\mathbf{v}^2 \quad \leftarrow (33) \\
 &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\mathbf{v}^2 \\
 &= \frac{1}{2}M\mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{v}^2 \quad \leftarrow (57)
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

より式(56)を得る。

式(57)の計算

換算質量は

$$\begin{aligned}\mu &\equiv \frac{m_1 m_2}{M} \quad \leftarrow \text{定義} \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \leftarrow (33) \\ &= \frac{1}{\frac{m_1}{m_1 m_2} + \frac{m_2}{m_1 m_2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}\end{aligned}\tag{A.24}$$

のように書ける。 $m_1 + m_2$ と $m_1 m_2$ のどちらが分子か忘れたときは、 μ が質量の次元であることを思い出せば掛け算の $m_1 m_2$ が分子であることがわかる。最後の表式は、換算質量 μ が

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\tag{A.25}$$

のように「質量を逆数にして足したものの逆数」であることを表している。

式(71)の計算

運動量保存より

$$\begin{aligned}P(t) &= P(t + \Delta t) \\ P(t) &= P(t) + \Delta v m(t) + \Delta m v_f \quad \leftarrow (70) \\ \Delta v m(t) &= -\Delta m v_f \\ \Delta v &= -\frac{v_f}{m(t)} \Delta m \\ \frac{\Delta v}{\Delta t} &= -\frac{v_f}{m(t)} \frac{\Delta m}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} &= -\frac{v_f}{m(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}\end{aligned}\tag{A.26}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ 極限は、速度の変化 Δv が

$$\begin{aligned}v(t + \Delta t) &= v(t) + \Delta v \\ \Delta v &= v(t + \Delta t) - v(t)\end{aligned}\tag{A.27}$$

であるので、微分の定義(13)より

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \dot{v}(t)\tag{A.28}$$

同様に

$$\begin{aligned}m(t + \Delta t) &= m(t) + \Delta m \\ \Delta m &= m(t + \Delta t) - m(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} = \frac{dm(t)}{dt} = \dot{m}(t)\end{aligned}\tag{A.29}$$

よって

$$\dot{v}(t) = -v_f \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\tag{A.30}$$

と式 (71) を得る。