3　剛体の重心と運動方程式

3.1　剛体の自由度

- **剛体**：**大きさ**を持った変形しない物体
  - 例）棒、コマ、滑車など
  - 球体などの場合も**向き**が区別できると考える（c.f. 地球）
  - 質点間の距離が固定された質点系と同じ
    （原子を質点と考えれば、現実の物質はアボガドロ数ほどの個数の質点の集まり）

次元	3 次元	2 次元	1 次元	0 次元
剛体	通常の物体	厚さのない板	太さのない棒	質点

- 3 次元の剛体の自由度（必要な変数の数）
  - 剛体の**位置**を表す重心座標 3 つ：$\boldsymbol{R} = (X, Y, Z)$
  - 剛体の**向き**を表す角度 3 つ
    例）回転軸の向きを決める 3 次元極座標の θ, ϕ とその軸のまわりの回転角 ψ
  - 太陽を座標原点とした場合、地球の位置（公転運動）は $\boldsymbol{R}$ が決め、地軸の向きを θ, ϕ が、地軸まわりの回転（自転）を ψ が決める
  - 全体で**自由度 6**：運動方程式は合計 6 つ

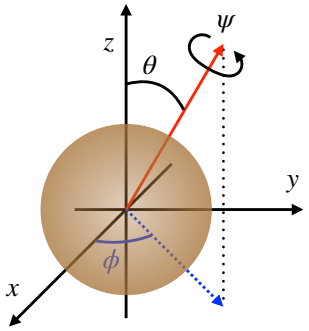

図 5: 剛体の向きを表す角度 θ、ϕ、ψ。

3.2　剛体の密度

- 剛体を微小体積 ΔV ごとに N 分割、i 番目の微小体積の質量を Δm_i、全質量 M は

$$M = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i}{\Delta V} \Delta V \quad \leftarrow (33) \tag{80}$$

  $\Delta m_i / \Delta V$：i 番目の微小体積の密度（体積 ΔV あたりの質量）

- $\Delta V \to 0, N \to \infty$ の極限（連続極限、補足参照）

$$M = \int \rho(\boldsymbol{r}) dV = \int dx \int dy \int dz \ \rho(x,y,z) \tag{81}$$

密度 $\rho(\boldsymbol{r}) \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m_i}{\Delta V}$：位置 $\boldsymbol{r}$ での単位体積あたりの質量、次元は $L^{-3}M$
微小体積 dV の質量は $\rho(\boldsymbol{r})dV$（Δm_i に対応）
積分の範囲は剛体の形で決まる（あるいは剛体の外では $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$）

  - 1 次元の剛体の場合：$\lambda(x)$ は**線密度**（単位長さあたりの質量、次元は $L^{-1}M$）

$$M = \int dx \ \lambda(x) \tag{82}$$

  - 2 次元の剛体の場合：$\sigma(x,y)$ は**面密度**（単位面積あたりの質量、次元は $L^{-2}M$）

$$M = \int dx \int dy \ \sigma(x,y) \tag{83}$$

3.3 剛体の重心

- 剛体の重心座標

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{M} \sum_i \Delta m_i \boldsymbol{r}_i \quad \leftarrow (33) \tag{84}$$

$$\xrightarrow{\text{連続極限}} \frac{1}{M} \int \rho(\boldsymbol{r}) \ \boldsymbol{r} \ dV \tag{85}$$

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \left(\int dV \ x\rho(x,y,z) \quad \int dV \ y\rho(x,y,z) \quad \int dV \ z\rho(x,y,z) \right) \tag{86}$$

位置 $\boldsymbol{r}$（$\boldsymbol{r}_i$ に対応）の微小体積の質量が $\rho(\boldsymbol{r})dV$（Δm_i に対応）

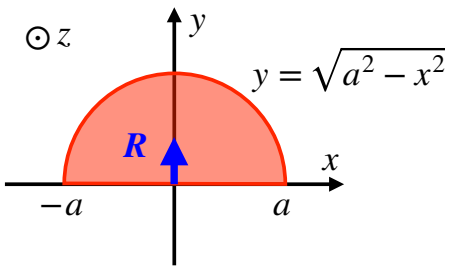

図 6: 半円板の剛体の重心座標。

- 例）一様面密度 σ（座標 x, y によらず密度が一定で $\sigma(x,y) = \sigma$）で半径 a の半円板の重心
全質量 M = 面密度 $\sigma \times$ 半円板の面積 $\pi a^2/2$

$$M = \frac{\pi a^2 \sigma}{2} \tag{87}$$

半円板の中心を原点に、円板が xy 平面内の $y \geq 0$ に配置するように座標をとる（図 6）
半円の端の点は $x^2 + y^2 = a^2$ を満たすので、半円板上端の y 座標は x の関数として

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \tag{88}$$

（$y \geq 0$ に注意）よって

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, \sigma \begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix} \tag{89}$$

各成分は（y の積分範囲に x が含まれるので y から先に積分する、補足参照）

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sigma x\, dy \\ &= \frac{\sigma}{M} \int_{-a}^{a} dx\, x[y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{\sigma}{M} \int_{-a}^{a} dx\, x\sqrt{a^2-x^2} = 0 \quad \leftarrow x \text{ の奇関数} \end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{M} \int_{-a}^{a} dx \int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sigma y\, dy \\ &= \frac{\sigma}{\pi a^2 \sigma/2} \int_{-a}^{a} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{\pi a^2} \int_{-a}^{a} dx(a^2 - x^2) = \frac{1}{\pi a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4a}{3\pi} \end{aligned} \tag{91}$$

z 成分は被積分関数が 0 なので $Z = 0$、よって重心座標は（極座標での計算は補足参照）

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{4a}{3\pi} & 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

3.4 剛体の運動方程式

- 位置 $\boldsymbol{r}_1$ に力 $\boldsymbol{F}_1$ が、$\boldsymbol{r}_2$ に $\boldsymbol{F}_2$ が、$\cdots$、$\boldsymbol{r}_n$ に $\boldsymbol{F}_n$ がはたらいている剛体（図 7 左）
- **力の作用点**：$\boldsymbol{r}_i$
  質点の場合、力の作用点は常に質点の位置座標
  剛体の場合、大きさがあるので重心座標以外の点に力が作用できる
- 重心の運動方程式（3 自由度）

$$M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{F} \equiv \sum_i \boldsymbol{F}_i \tag{93}$$

  $\boldsymbol{F}$ は全ての力の合力（質点系の全外力 $\boldsymbol{F}_{外}$）
- 力のつり合い：合力が消える、力の**作用点に無関係**

$$\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0} \tag{94}$$

- 座標原点まわりの回転の運動方程式（3 自由度）

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N} \equiv \sum_i \boldsymbol{N}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{95}$$

$\boldsymbol{L}$ は座標原点まわりの剛体の角運動量

- 力のモーメントのつり合い：力のモーメントの和が消える、力の**作用点に依存**

$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{0} \tag{96}$$

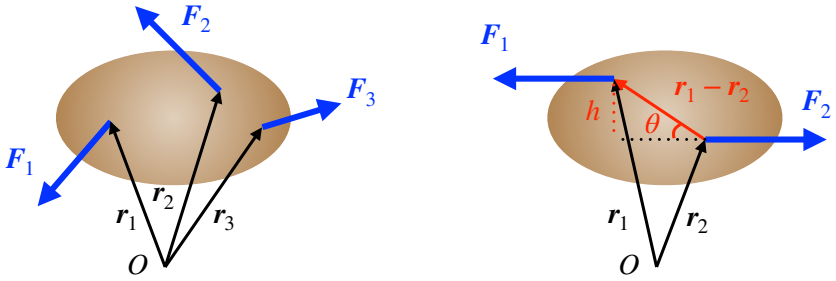

図 7: 剛体にはたらく力の例。左：一般の場合、右：偶力の場合。

- 全ての力が平行で $\boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{0}$ の場合（補足参照）、合力の作用点 $\boldsymbol{r}_{合}$

$$\boldsymbol{N} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \equiv \boldsymbol{r}_{合} \times \boldsymbol{F} \tag{97}$$

が定義できる。

- 全ての力が平行で $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ の場合、合力の作用点 $\boldsymbol{r}_{合}$ は定義できない
$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ で $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ である場合以外に、**$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ でも $\boldsymbol{N} \neq \boldsymbol{0}$** の場合がある
例）偶力（図 7 右）：剛体の異なる部分（$\boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$）に大きさが同じで平行で向きが逆の力が作用、$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2 \equiv \boldsymbol{F}_{偶}$ とすると

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_{偶} - \boldsymbol{F}_{偶} = \boldsymbol{0} \tag{98}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{偶} + \boldsymbol{r}_2 \times (-\boldsymbol{F}_{偶}) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{偶} \tag{99}$$

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ なので、偶力は重心に加速度を与えず回転させるだけ
力のモーメントの大きさ

$$|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2||\boldsymbol{F}_{偶}| \sin\theta = h|\boldsymbol{F}_{偶}| \tag{100}$$

$h = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| \sin\theta$ は作用線間の距離